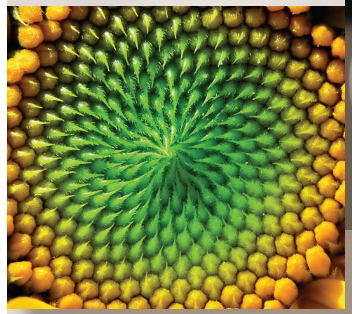
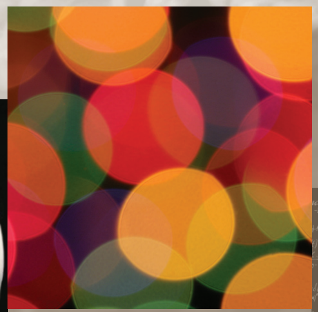
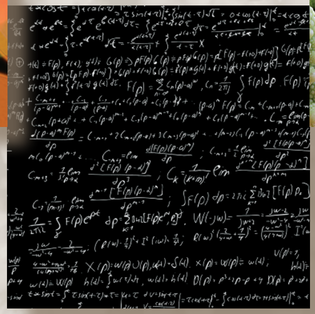
MATEMÁTICAS
PARA PROFESORES DE PREESCOLAR Y PRIMARIA

Este libro, que ponemos a disposición de los maestros de preescolar y primaria, presenta los temas fundamentales que se consideran para el abordaje de las matemáticas con sus estudiantes. A través de la reflexión sobre la disciplina y los hechos históricos vinculados a su desarrollo, se ofrecen herramientas para el diseño de situaciones didácticas y para el planteamiento de preguntas y situaciones que constituyan retos alcanzables tanto para los maestros como para sus estudiantes.

Los autores de este libro prepararon adicionalmente un conjunto de materiales digitales interactivos, como una herramienta didáctica que proporciona nuevas formas de aproximarse a los distintos temas con los estudiantes. El lector podrá acceder a dichos recursos en la dirección <http://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/ 2012_FC_AMITE/>. Estos materiales pueden utilizarse, de acuerdo con la planeación didáctica del docente, para introducir o explorar conceptos matemáticos, ejercitar, modelar situaciones, plantear simulaciones o para la evaluación de los aprendizajes.

La obra ofrece un espacio para que los docentes profundicen sus conocimientos matemáticos y les proporciona elementos para proponer problemas interesantes y debidamente articulados a los estudiantes, para propiciar actitudes positivas hacia la disciplina y para desarrollar estrategias que les permita enfrentar los retos matemáticos con sus estudiantes.




978-607-02-3705-8
9 786070 237058

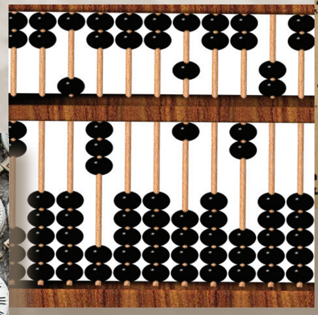
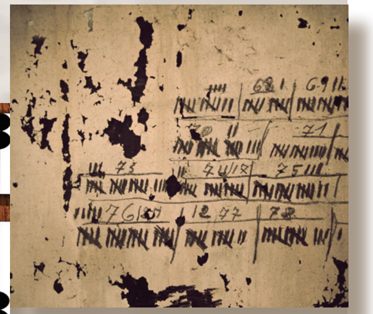
siglo veintiuno editores

Ciudad de México
Capital en Movimiento

MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS
PARA PROFESORES DE PREESCOLAR Y PRIMARIA



Ciudad de México
Capital en Movimiento

MATEMÁTICAS

PARA PROFESORES DE PREESCOLAR Y PRIMARIA

MATEMÁTICAS

PARA PROFESORES DE PREESCOLAR Y PRIMARIA

Coordinadora académica
Enna Carvajal Cantillo

Desarrollo del pensamiento lógico-matemático en la educación preescolar
Concepción Ruiz Ruiz-Funes

Actitudes hacia el estudio de las matemáticas
Sonia Ursini Legovich
María Delia Montes Heredia
Martha Patricia Ramírez Mercado
Silvia García Peña
Fernando Brambila Paz *Revisión de contenidos*

Sentido numérico
Ana Laura Barriendos Rodríguez
Tatiana Mendoza Von der Borch
Manuel Falconi *Apéndice y revisión de contenidos*

Forma, espacio y medida
Emilio Domínguez Bravo
José Cruz García Zagal
Alejandro Bravo Mojica *Revisión de contenidos*

Tratamiento de la información y probabilidad
Alejandra González Dávila
Leticia Montserrat Vargas Rocha
José Luis Abreu León *Revisión de contenidos*

siglo veintiuno editores

Matemáticas para profesores de preescolar y primaria / coordinadora Enna Carvajal Cantillo ; [autor] Concepción Ruiz Ruiz-Funes … [y otros]. -- 1ª ed. -- México : UNAM, Facultad de Ciencias : Siglo XXI Editores, 2012.
192 páginas : ilustraciones ; 28 cm. -- (Las prensas de ciencias)

Bibliografía: p. 183-187
ISBN 978-607-02-3705-8 (UNAM)
ISBN 978-607 (Siglo XXI)

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza (Primaria). 2. Matemáticas – Estudio y enseñanza (Preescolar). 3. Educación preescolar – Innovaciones tecnológicas. 4. Educación primaria – Innovaciones tecnológicas. I. Carvajal Cantillo, Enna, coordinadora. II. Ruiz Ruiz-Funes, Concepción. III. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. IV. título. V. Serie.

372.7-scdd21 Biblioteca Nacional de México

MATEMÁTICAS PARA PROFESORES DE PREESCOLAR Y PRIMARIA
Coordinación general | Rosaura Ruiz Gutiérrez
Coordinación académica | Enna Carvajal Cantillo
Coordinación operativa | Alfredo Arnaud Bobadilla
Coordinación editorial | Rosanela Álvarez y María Oscos
Diseño de interiores y portada | María Luisa Martínez Passarge

Revisión de estilo | Leticia Aréstegui, Alejandro Reza, Andrea Torres Camacho
Recursos informáticos | Deyanira Monroy Zariñán (selección, adaptación e integración); Víctor Hugo García Jarillo (Programación y adaptación a DescartesJS); José Luis Abreu León, Óscar Escamilla González, Joel Espinosa Longi (apoyo técnico)

• La Dra. Sonia Ursini Legovich pertenece al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav).

MATEMÁTICAS PARA PROFESORES DE PREESCOLAR Y PRIMARIA
1ª edición | 2012

D.R. © agosto 2012
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria, Coyoacán, 04510 México, D.F.

D.R. © agosto 2012
Siglo XXI Editores, S.A. de C.V.
Av. Cerro del Agua 248, Romero de Terreros, Coyoacán, 04310 México, D.F.

Gobierno del Distrito Federal
Secretaría de Educación
Av. Chapultepec 49, 6° piso, col. Centro, 06010 México, D.F.

Como complemento de los textos de este libro, el profesor podrá visitar la página <http://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/2012_FC_AMITE/>, donde encontrará nuevos materiales didácticos interactivos para enriquecer su práctica docente.

ISBN Siglo XXI: 978-607-03-0434-7
ISBN UNAM: 978-607-02-3705-8

PRESENTACIÓN

El libro que el lector tiene entre sus manos es un esfuerzo más que la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través de la Facultad de Ciencias, ha realizado en apoyo a la Educación Básica.

Desde 2008, la UNAM ha diseñado, elaborado e impartido cursos y diplomados en las áreas de Español, Inglés, Tecnologías de la Información y Comunicación, Ciencias y Matemáticas para formar a más de 320 000 profesores de primaria en la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB).

Dentro de estas actividades, la Facultad de Ciencias estuvo encargada de realizar ocho cuadernos de estratégicas didácticas y diez cursos de actualización para matemáticas y ciencias dirigidas a docentes de preescolar, primaria y secundaria. Asimismo, realizó un diagnóstico sobre los planes de estudio de Educación Básica para las áreas de Matemáticas y Ciencias, y entregó una propuesta de contenidos fundamentales para la Educación Básica en dichas áreas, misma que sirvió como referente para la revisión y actualización de planes y programas de estudio llevada a cabo por la Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Aunado a estos cursos y diplomados, la Dirección General de Evaluación Educativa (DGEE) de la UNAM elaboró una investigación para determinar las necesidades de formación continua en educación básica, relacionando los resultados de la prueba Enlace con los niveles de marginación de cada uno de los estados y municipios del país.

De manera muy puntual quisiera resaltar el acento que se ha puesto, en todas estas acciones, en el fomento y desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo en los niños, siendo éstos elementos irrenunciables en los que la UNAM fundamenta sus principios de investigación y docencia.

Tenemos la convicción de que el sistema educativo está emplazado a realizar una transformación en los esquemas de enseñanza-aprendizaje, romper formatos preestablecidos y, en muchos casos, superar la manera en que el mismo docente fue formado. Para lograrlo, se requiere transcender la formación lineal y memorística, la enseñanza de conocimientos muchas veces descontextualizados y ajenos a la realidad del niño, así como fomentar la actitud participativa, activa, crítica y reflexiva que permita a los estudiantes la movilización de los aprendizajes, mediante su articulación, integración y experimentación.

Con este libro, que se realiza en colaboración con la Secretaría de Educación Pública del Gobierno del Distrito Federal, dirigido a profesores de preescolar y primaria, la Facultad de Ciencias reitera su compromiso en el espíritu de coadyuvar a las acciones de mejora continua en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las áreas que le competen.

En este libro, como en su homólogo de *Ciencias Naturales para profesores de preescolar y primaria*, la Facultad de Ciencias ha puesto su experiencia, su conocimiento y su inteligencia para apoyar a los docentes de Educación Básica, de manera que tengan herramientas suficientes que les permitan abordar temas de complejidad, al tiempo que desarrollen una cultura más amplia sobre las disciplinas de Biología, Física, Química, y Matemáticas.

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
Directora de la Facultad de Ciencias, unam

INTRODUCCIÓN

Este libro tiene como punto de partida el documento *Los conocimientos fundamentales de matemáticas en la educación básica* elaborado por un grupo de académicos de la Facultad de Ciencias de la UNAM,[1] el cual propone criterios útiles para el diseño y la elaboración de los programas de matemáticas dirigidos al nivel básico. El material que ponemos a su disposición retoma el enfoque de dicho documento para el abordaje de las matemáticas, el cual enfatiza el planteamiento de preguntas y situaciones que constituyen retos alcanzables y promueve la formulación de conjeturas, la utilización de conocimientos previos, el desarrollo de argumentos para validar resultados y la generación de estrategias propias para enfrentarlos. Sin embargo, se deslinda de aquellos textos que ofrecen estrategias didácticas concretas; se dirige al docente como aprendiz de las matemáticas, abriéndole un espacio para alimentar su propia curiosidad y para profundizar sus conocimientos matemáticos.

A través de la reflexión sobre la disciplina, los hechos históricos vinculados a su desarrollo y el estudio de temas seleccionados de los programas de matemáticas para los niveles educativos de preescolar y primaria (2011), se espera que este material contribuya con el desarrollo de actitudes distintas frente al conocimiento matemático, que brinde oportunidades para asumir retos basados en el descubrimiento y situaciones didácticas que permitan contextualizar los contenidos como herramientas útiles en la vida. Se trata de que la aproximación a las matemáticas que experimente le permita explorar nuevas ideas sobre lo que significa aprender y, en último término, enseñar matemáticas.

El libro inicia con la sección de preescolar, la cual proporciona elementos para que el docente sea capaz de facilitar el desarrollo del pensamiento lógico matemático de sus alumnos. Las sugerencias parten del uso de material concreto que seguramente le resultará familiar; sin embargo, se plantean nuevas preguntas para propiciar en el niño, tanto individualmente como en interacción con los demás, la elaboración de significados base para construir saberes matemáticos. La intervención del profesor a través de situaciones didácticas que generen un ambiente para plantear preguntas y orientar el avance en el análisis e interpretación lógico-matemática de cada situación resulta crucial para el andamiaje matemático de futuros niveles educativos.

La estructura general en el caso de los textos dirigidos al nivel primaria se organiza de manera similar a los ejes temáticos del programa de estudios: sentido numérico; forma, espacio y medida, y tratamiento de la información. Sin embargo, en primer lugar se aborda el tema de las actitudes hacia el estudio de las matemáticas como eje que permea transversalmente todos los demás y que permite analizar y comprender la necesidad de

---

[1] L. A. Briseño, G. Carrasco, D. Cetina, L. M. Marván, M. Quintero y M. del C. Tovar, *Los conocimientos fundamentales de matemáticas en la educación básica*, Facultad de Ciencias, UNAM, s/f.

propiciar en los alumnos el interés por esta disciplina y la comprensión de su importancia a través del empleo que se le ha dado a lo largo de la historia, así como favorecer un acercamiento crítico a la misma.

Por esta razón, para los demás ejes se desarrollan temas seleccionados a partir de elementos históricos de contextualización, considerando problemas o situaciones que dieron origen al desarrollo de algunos conceptos matemáticos que se enseñan y aprenden en primaria y que tienen relación con la actividad humana, las matemáticas en la naturaleza y/o el desarrollo de las propias matemáticas. Las actividades o problemas que se presentan le permitirán crear o recrear conceptos matemáticos con el objetivo de profundizar en sus conocimientos.

Las distintas secciones incorporan momentos de formalización, entendidos como una síntesis de los temas abordados y un espacio para las definiciones y generalizaciones cuando ello aplica. Por último, se intercala información centrada en la actividad docente, es decir, referencias a situaciones específicas de la enseñanza y del aprendizaje de contenidos matemáticos, tales como sugerencias relevantes o errores comunes de los alumnos que son de importancia para tomar en cuenta en la interacción en el aula.

Se ha incorporado al libro un disco con recursos digitales interactivos como una herramienta didáctica adicional que proporciona nuevas formas de aproximarse a los distintos temas. Están organizados conforme a los ejes temáticos y de acuerdo con algunos de los temas abordados en los programas de estudio. Si bien no están asociados con algún grado en particular, permiten, en algunos casos, acercarse a los contenidos en varios de ellos, de acuerdo con el enfoque que usted quiera darles.

Los recursos abordan temas tan variados como la lectura y escritura de números decimales y fracciones, las sucesiones, las operaciones aritméticas básicas; figuras geométricas que permiten la exploración de sus elementos para el cálculo de superficies, así como para la medición y clasificación de ángulos. En relación con el eje de tratamiento de la información, los recursos ofrecen actividades para el recuento de datos, el cálculo de frecuencias, la exploración de la noción de media aritmética, y la construcción de gráficas, entre otros temas.

Todos ellos son producto de una cuidadosa selección de aquellos disponibles libremente en la red y de fácil navegación. Además, están adaptados de tal manera que no requieren de la instalación de programas especiales para poder visualizarse y utilizarse. El número de actividades para realizar es variable así como la extensión de las mismas. Pueden utilizarse para que el alumno trabaje de manera individual, en equipos o en grupo, de acuerdo con su planeación didáctica, para introducir o explorar conceptos matemáticos, ejercitar, modelar situaciones, plantear simulaciones o para la evaluación de los aprendizajes. En este mismo disco se pone a su disposición un instrumento diseñado específicamente para valorar la actitud hacia las matemáticas de sus estudiantes, del cual se hablará ampliamente en la sección correspondiente.

En suma, esperamos que el material despierte su interés en las matemáticas, le invite a reflexionar sobre cómo proponer problemas interesantes y debidamente articulados a sus alumnos para facilitar su construcción de conocimientos matemáticos y propiciar en ellos actitudes positivas hacia la disciplina, pero, más que nada, que contribuya con sus propias estrategias para enfrentar los retos matemáticos junto con sus estudiantes.

Los autores

MATEMÁTICAS

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO EN LA EDUCACIÓN PREESCOLAR

ANTES DE EMPEZAR

El presente texto parte de la base de que nada sustituye la enorme experiencia que tienen los docentes sobre cómo desarrollan los niños de nivel preescolar el pensamiento lógico y el pensamiento matemático. Busca, retomando dicha experiencia, puntualizar una serie de conceptos y estrategias que permitirán que la labor de los profesores, en torno a este tema, se enriquezca.

La propuesta está dirigida a orientar el trabajo cotidiano en el aula, de manera que el proceso de enseñanza-aprendizaje se convierta en una vivencia significativa y que se establezcan bases sólidas que permitan que el pensamiento lógico y matemático se desarrolle a lo largo de toda la vida.

Antes de comenzar, se propone que el docente escriba un texto muy breve en el que reflexione acerca de los siguientes puntos:

¿Cómo se relacionan los niños entre ellos?
¿Cómo se relaciona usted con los niños?
¿Cómo se relacionan los niños con usted?
¿Les gustan las actividades con materiales concretos?
¿Les gustan las situaciones en las que se les presentan problemas?
¿Les gusta tomar decisiones?
¿Les gusta pensar en voz alta?
¿Les gusta trabajar con sus compañeros para resolver un problema?
¿Cómo enseñan a sus compañeros las soluciones que encuentran?

Seguramente le ha ocurrido en varias ocasiones que se queda sorprendido al notar las respuestas tan distintas que los niños dan en una actividad determinada o ante alguna pregunta.

¿Por qué pueden llegar a ser tan distintas estas respuestas?

Para responder esta pregunta es necesario reflexionar sobre la manera en la que los niños de nivel preescolar desarrollan las distintas formas de pensamiento. Estos procesos están determinados por su vida cotidiana, las características de su entorno familiar y social, las condiciones económicas, educativas y culturales en las que vive, la forma en la que sus relaciones afectivas se desarrollan, etcétera.

Es por ello que debemos ser muy observadores y poner mucha atención a las preguntas que los niños hacen, a sus inquietudes y sus intereses, porque justamente así se pueden ir descubriendo cuáles son las características de su entorno personal y social.

Es indispensable escuchar a los niños y las niñas, oír sus comentarios, sus dudas, poner atención a cuándo y por qué se distraen, cómo y qué preguntan, en qué momentos lo hacen, cómo interactúan con sus compañeros y con usted, cómo usan los materiales y cuáles son sus errores más frecuentes. Todos, todos los detalles son importantes para entender cuál es el contexto de los niños y las niñas que estamos formando.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Con la manipulación de los objetos y por medio de la comunicación con el profesor y con sus compañeros, los niños de preescolar establecen, poco a poco, relaciones de carácter lógico. El desarrollo del juego simbólico les permite desarrollar habilidades como clasificar y agrupar con criterios cualitativos; conforme este tipo de juego se vuelve más elaborado y complejo, los niños se vuelven capaces de establecer relaciones de causalidad, deducir, sacar conclusiones y generalizar.

Los niños empiezan a desarrollar esquemas lógicos desde muy temprano. Transitan por distintas etapas de aprendizaje, por medio de las cuales pasan de la manipulación de objetos concretos a la representación simbólica y a la abstracción generalizadora. Pensemos, por ejemplo, en el niño que juega con un avioncito de madera y que después es capaz de representar el avioncito con un bloque de madera, para finalmente dar las características que son comunes a todos los aviones: que tienen alas, que vuelan, etc. Pasar de un tipo de juego a otro le permite ir estableciendo relaciones lógicas que perdurarán toda la vida.

Tener en mente que estas etapas son inherentes a todos los juegos que realiza el niño permite al docente propiciar que el niño realice las operaciones lógicas de comparar, secuenciar, relacionar y agrupar.

La educación preescolar debe proponer a los niños y a sus padres experiencias educativas que promuevan no sólo el aprendizaje de conceptos, sino —y sobre todo— el desarrollo de formas diversas de pensar.

La etapa que va del primero hasta el sexto año de vida es decisiva en muchos sentidos para las personas. En ella el niño inicia los procesos de individualización y, al mismo tiempo, de socialización. Comienza el desarrollo del pensamiento lógico-matemático basado, fundamentalmente, en las relaciones que se establecen con el medio que les rodea.

El desarrollo de esta forma de pensamiento es un proceso continuo que comienza en esta etapa de la vida y que nunca concluye.

Promover el desarrollo del pensamiento lógico matemático presupone proponer a los alumnos actividades que les permitan ir modificando los esquemas de conocimientos que tienen, es decir, permitir y propiciar que construyan aprendizajes significativos.

El desarrollo de esta forma de pensamiento es resultado de procesos complejos en los que intervienen, de manera decisiva, la estimulación física, emocional e intelectual que reciben los niños. Es un proceso continuo que puede ocurrir de manera diferente en cada niño.

Actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento lógico-matemático

Algunas actividades que promueven el desarrollo del pensamiento lógico-matemático son las siguientes:

- Manipular objetos con características fáciles de describir y de diferenciar: tamaño, forma, color, grosor, etc. Los objetos son el material básico de toda la experiencia y actividad en la educación preescolar.
- Agrupar objetos y formar colecciones. Primero, los niños formarán conjuntos o colecciones muy elementales; quizá sin tener ningún criterio para agrupar. Poco a poco, las agrupaciones serán más complejas y responderán a criterios que ellos mismos irán estableciendo; por ejemplo, objetos del mismo color, de la misma forma, que sirvan para lo mismo, etcétera.
- Explicar por qué se han agrupado los objetos. Verbalizar las diferencias y las semejanzas de los objetos que conforman una colección.
- Dada una colección, determinar si un objeto determinado cumple o no el criterio de agrupación, es decir, decidir si el objeto pertenece o no al conjunto.
- Ordenar los objetos de una colección de acuerdo con algún criterio establecido por los niños. Por ejemplo, de chico a grande; primero los azules, luego los rojos y finalmente los amarillos; primero los transportes de dos ruedas y luego los de cuatro, etcétera.
- Establecer relaciones entre los objetos, entre los acontecimientos, entre sus compañeros, etcétera.
- Fomentar la idea de que clasificar, comparar, secuenciar y ordenar se vuelvan actividades de la vida cotidiana. Si bien el aula es un lugar idóneo para que ello ocurra, no es —y no debe ser— el único.

- Promover el uso de juegos de construcción, de rompecabezas, loterías, etcétera.
- Promover la reflexión individual y colectiva en torno a las actividades que se realizan en el aula, en el patio, en casa, etcétera.
- Plantear problemas y buscar, individual y colectivamente, estrategias para resolverlos.
- Analizar y comparar dichas estrategias.

Estas actividades deben pasar, tal y como se mencionó anteriormente, por las etapas de manipulación concreta, simbolización y abstracción o generalización.

El conocimiento de la realidad física y el conocimiento lógico-matemático son distintos. Cuando se le dan a un niño dos bloques del mismo tamaño, la misma forma, pero distinto color, el hecho de que el niño diga de qué color son o qué forma tienen es conocimiento de la realidad física; el hecho de que además establezca que hay similitudes y diferencias entre ellos pertenece al ámbito del conocimiento lógico-matemático. Las semejanzas y las diferencias no son propiamente características de los bloques, no les son intrínsecas. Son relaciones que el niño establece entre los dos objetos.

Los niños van construyendo el conocimiento lógico-matemático y, por ende, desarrollando el pensamiento lógico-matemático, al establecer relaciones entre los objetos. El conocimiento lógico-matemático consiste en la coordinación de dichas relaciones.

La capacidad de coordinar estas relaciones se va desarrollando de la mano con el lenguaje hablado. La posibilidad de expresar verbalmente las relaciones que establece entre los objetos le permite al niño comprenderlas, ampliarlas, modificarlas y desarrollarlas.

Los objetos existen para el niño en la medida en que interactúa con ellos. Identificarlos, diferenciarlos, observarlos y describirlos le permite tomar conciencia de ellos. Así, llega a una etapa en la que, aun cuando el objeto no está, como el niño se ha formado una representación, realiza en la mente todas las experiencias que antes tenía sólo con la manipulación directa. Este hecho, que es la base del pensamiento simbólico, determina la posibilidad de desarrollar el pensamiento lógico-matemático.

El desarrollo del pensamiento lógico-matemático en un niño depende de muchos factores: el entorno, la vida familiar, las emociones, los afectos que recibe o no recibe, sus deseos, sus expectativas, las experiencias previas, el ambiente social y familiar que lo rodea. La forma en la que un niño resuelve un problema depende de los procesos lógico-matemáticos, pero también, por supuesto, de todos los demás factores.

El hecho de que los niños respondan de cierta manera a las situaciones de acuerdo con sus historias personales influye en la movilización o inhibición del pensamiento y de la voluntad. De ahí que un docente nunca puede ignorar estos factores decisivos en el desarrollo de un niño.

El pensamiento-lógico matemático que empieza a desarrollarse en este nivel es la base del tipo de pensamiento que se tendrá a lo largo de la vida. ¿Por qué es importante buscar que los niños desarrollen un pensamiento lógico-matemático?

El objetivo más importante es formar niños curiosos, inquisitivos, inteligentes, interesados en entender el mundo que les rodea, con iniciativa, sin miedo a cometer errores.

Lo más importante de promover el desarrollo del pensamiento lógico-matemático es formar niños que sepan pensar.

Propuestas de materiales y recursos metodológicos

Bloques lógicos

Son un material excelente para proponer problemas que permitan a los niños establecer relaciones lógicas. Pueden comprarse o hacerse en la escuela utilizando cartón grueso o material fomi.

Deben hacerse 48 bloques que cumplan con lo siguiente:
Tener tres características: forma, color y tamaño
Forma: cuadrado, círculo, triángulo y rectángulo
Color: rojo, azul y amarillo
Tamaño: grande y pequeño

De esta manera se tendrán: 12 cuadrados, 12 círculos, 12 triángulos y 12 rectángulos.

Para cada una de las formas habrá:
4 figuras rojas, 4 figuras azules y 4 figuras amarillas.

De cada uno de estos grupos de cuatro figuras, la mitad será grande y la mitad será pequeña. Así cada bloque tendrá las tres características mencionadas.

Actividades que pueden hacerse con los bloques lógicos:

- Distinguir las características en las que son semejantes y en las que son diferentes.
- Verbalizar dichas características.
- Agrupar los bloques de acuerdo con sus características. Por ejemplo, el grupo de los bloques azules, el de los bloques delgados, el de bloques cuadrados, etcétera.
- Clasificaciones (por forma, tamaño, color…).
- Ordenar (por tamaños).
- Comparar (muchos, pocos).
- Nociones de más y menos.
- Situaciones en el espacio.
- Vocabulario de los bloques.
- Noción de cantidad.

Son muchísimas las situaciones educativas que pueden proponerse con estos materiales.

Materiales de manipulación y observación

Juegos de arena y agua: estos materiales permiten comparar, medir, observar, deducir, conjeturar. Por ejemplo, basta una cubeta de agua y diversos objetos para hacerse preguntas como:
¿Este objeto flota?
¿Este objeto se hunde?

¿Cuál de los dos objetos se hundirá más rápido?
¿Por qué?

Bloques de construcciones: con estos bloques se proponen situaciones de distintos grados de complejidad, desde hacer pilas de bloques hasta construcciones complicadas.

Es importante señalar que las piezas deben ser grandes para los niños pequeños y que conforme los niños son mayores usen piezas o bloques más pequeños.

Nociones que pueden desarrollarse con estos materiales:

- Peso, equilibrio y medida.
- Formas en el espacio.
- Nociones sobre relaciones espaciales tales como: largo, corto, encima, debajo.
- Clasificaciones por forma y tamaño.
- Desarrollo de la memoria visual.
- Desarrollo de la creatividad.

ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN

La mayoría de la gente coincide en el papel fundamental que las matemáticas han tenido históricamente en el desarrollo de nuestra sociedad. En particular han sido la base del desarrollo científico y tecnológico e intervienen en casi todas las disciplinas. Esto las ha posicionado como un conocimiento fundamental que debe ser aprendido por todas las personas. Es por ello que los sistemas educativos incluyen a las matemáticas como una parte fundamental del currículo.

Con el afán de mejorar la calidad de los logros obtenidos en el área de matemáticas se han hecho modificaciones curriculares y sugerencias pedagógicas. También se ha centrado la atención hacia estudios sobre los afectos que despiertan las matemáticas. En particular, se propone tomar en cuenta las actitudes hacia las matemáticas como un factor que puede influir en la disposición del aprendizaje de esta asignatura. Esto ha llevado a incorporar las actitudes hacia el estudio de las matemáticas en los últimos programas de estudio.

A pesar de que el estudio de los sentimientos de rechazo hacia las matemáticas, así como los de buena disposición hacia su estudio es relativamente reciente, se reconoce su importancia. La misma Secretaría de Educación Pública ha considerado fundamental que el profesorado se preocupe por el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas (disposición para aprender, gusto, interés) y por las actitudes (perseverancia, método, argumentación) de sus propios estudiantes hacia las matemáticas.

El desarrollo de las actitudes en torno al estudio de las matemáticas no debe verse como algo aislado que tiene que trabajarse por separado, sino su incorporación debe ser de forma transversal y de tal manera que ayude a tener una buena disposición hacia el estudio de esta disciplina para lograr construir, analizar y comprender el sentido mismo de las matemáticas, su función y uso.

El estudio de las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas ya tiene una larga historia. Desde los años setenta del siglo xx ha sido un tema de interés para los investigadores en educación matemática. Estos estudios han puesto en evidencia que muchos alumnos manifiestan que las matemáticas son difíciles y que la clase de matemáticas no les gusta. Estas afirmaciones forman parte de su actitud hacia las matemáticas e inciden en la manera en la que enfrentan esta disciplina.

Tomar en cuenta las actitudes de los alumnos desde los primeros acercamientos a las matemáticas tiene que ser uno de los objetivos fundamentales del profesor. No es suficiente procurar que aprendan los contenidos matemáticos, es importante que la experiencia que viven en la escuela promueva el desarrollo de actitudes que los lleven hacia una buena disposición para acercarse a esta disciplina. Si bien, no se ha encontrado una evidencia contundente de la relación directa entre actitudes y aprendizaje, es importante que el profesor tome en cuenta las actitudes que tienen sus alumnos hacia las matemáticas para llevar a cabo medidas que los ayuden a acercarse al estudio de esta disciplina con interés, con confianza y sin miedo.

Para alcanzar este propósito, en este capítulo se ofrece un primer acercamiento a la noción de actitud, presentando los aspectos que la componen y los factores que inciden en su formación. En un segundo apartado se muestran algunos hallazgos recientes sobre las actitudes hacia las matemáticas que tienen los alumnos mexicanos de educación básica. Por último se señalan algunas ideas sobre cómo el maestro puede averiguar cuáles son las actitudes de sus estudiantes hacia las matemáticas. La intención es que el profesor disponga de algunos elementos básicos que le permitan considerar este aspecto importante que influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Este material se hizo con la intención de que el lector no asuma un papel pasivo sino que interactúe constantemente con lo que lee, por ello se hacen preguntas de reflexión a lo largo de todo el capítulo. Es recomendable tener a la mano un cuaderno en donde se anoten las respuestas a las preguntas antes de continuar leyendo, de esta manera lo que lea será significativo y contará, además, con un registro de sus opiniones y creencias; registro que podrá consultar cada vez que sea necesario.

LAS ACTITUDES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Resulta muy interesante que a principios del siglo pasado, en un texto de aritmética escrito en 1904 para las primarias de nuestro país, el autor inicie su prólogo de la siguiente manera:

> "La letra con sangre entra" era el lema de los que nos precedieron en la ardua tarea de educar e instruir a los niños: lema que expresa un concepto absolutamente erróneo, porque el niño toma aversión a lo que lo hace sufrir, y no se interesa vivamente ni estudia con gusto sino lo que le agrada.

En el fragmento anterior se nota la presencia de una parte afectiva al mencionar el gusto y agrado en contraposición con el sufrimiento que puede ocasionar algo que se estudia. Este autor intuía que los afectos juegan un papel importante en el aprendizaje.

Autores actuales también reconocen la importancia de los aspectos afectivos al enfrentarse a la resolución de problemas. George Polya, considerado uno de los pioneros en el enfoque de la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas, menciona:

> Sería un error creer que la resolución de problemas es un asunto "puramente intelectual"; la determinación, las emociones, juegan un papel importante.

Mientras que Alan Shoenfeld, un investigador muy reconocido, al enlistar los aspectos que influyen en la resolución de problemas, también pone énfasis en los afectos:

- Conocimiento base
- Estrategias de resolución de problemas

- Gestión y control
- Creencias y afectos
- Prácticas (coincide parcialmente con cuestiones socioculturales)

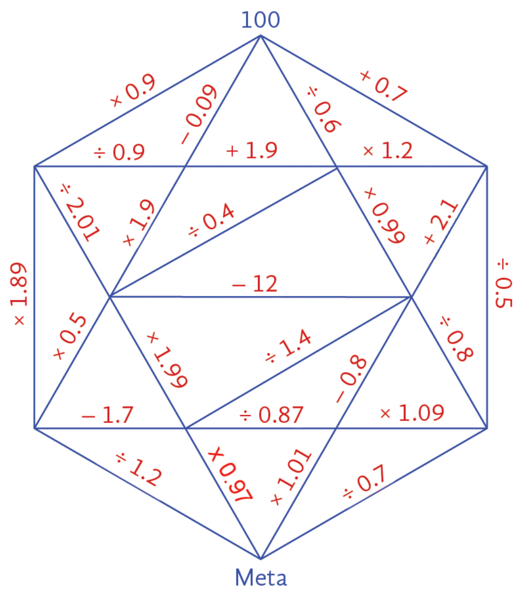
Ambos autores concuerdan en que hay aspectos no intelectuales que influyen en la manera en que los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos y, en consecuencia, a la manera en que aprenden y aplican las matemáticas. Polya menciona las emociones, y Shoenfeld, las creencias y los afectos. Por ello no sólo es interesante, sino muy útil explorar las emociones, creencias, afectos y, en general, las actitudes hacia las matemáticas, con el propósito de conocer a los estudiantes desde esta perspectiva y tener más herramientas y elementos para tomar decisiones al trabajar esta disciplina en el salón.

A continuación se muestran tres situaciones en las que se considera que la presencia de las actitudes hacia las matemáticas es notoria.

Los números me "apanican"

En un taller para maestros se entregó una hoja con el siguiente diagrama para hacer una actividad relacionada con los números decimales.

Diagrama 1 |



Inmediatamente alguien comentó: "¡Ay Dios mío!, ¿qué es esto? Es que cuando veo tantos números, y luego decimales, me 'apanico'."

Sin duda, la respuesta del maestro muestra que tiene miedo o que se siente inhibido ante ese contenido matemático y seguramente esto afectará la forma en que enfrente el problema al tratar de resolverlo.

> ¿Cuál cree que es la actitud hacia las matemáticas del profesor al que se le presentó el diagrama con números decimales? ¿Por qué cree que ha desarrollado ese pánico a los números?

Angustia y miedo ante los exámenes de matemáticas

Juan es un alumno de primaria que piensa que matemáticas es la materia más difícil de la escuela, pero que es muy importante sacar buenas calificaciones y debe estudiarlas mucho para lograrlo. También cree que él no es bueno en matemáticas porque siempre le cuesta mucho trabajo entender los problemas y se tarda en resolverlos. El día de hoy el profesor les ha hecho un examen y él se puso muy nervioso porque sentía que no había estudiado lo suficiente. Durante el examen sentía angustia y miedo porque no comprendía los problemas, al grado que sólo respondió cinco de diez preguntas.

> ☛ ¿Cuál cree que es la actitud de Juan hacia las matemáticas? ¿Por qué cree que ha desarrollado esa actitud?

Este pequeño relato sobre Juan nos dice qué piensa sobre las matemáticas y qué piensa sobre sí mismo y cómo esto lo afecta, tanto en sus emociones, como en su desempeño cuando va a presentar un examen.

Tere sí puede escribir

Un maestro de primer grado pregunta a los niños de su clase:[1] "Si Tere tiene 5 lápices y le quitan 5, ¿podrá escribir?" Un alumno responde: "Depende, si tiene una pluma, sí."

El maestro no sólo no admite la respuesta como correcta, sino que reprende al niño porque no pone atención y no toma en serio la clase. Años más tarde, cuando el niño está en quinto grado, recuerda esta anécdota platicando con un amigo y le comenta: "¡Qué respuesta más tonta di! ¡Claro que Tere no podía escribir!"

> ☛ ¿Cómo cree que se sintió el niño cuando fue reprendido por su respuesta?
>
> El alumno en primer grado respondió en cierta forma al problema de los lápices y en quinto grado cambió de opinión con respecto a la solución que él había dado. Este cambio denota que ahora el niño:
>
> Es más obediente
> Es menos creativo
> Es menos espontáneo
> Aprendió a responder lo que el maestro espera
> Cree que al resolver un problema matemático siempre hay que dar una respuesta numérica
>
> ¿Cree que este cambio en el niño es favorable para el aprendizaje de las matemáticas?

[1] Adaptado de Vila y Callejo, 2004.

Las experiencias escolares influyen en la manera en que los estudiantes se relacionan afectivamente con las matemáticas y muchas de esas experiencias están fuertemente vinculadas con lo que para los docentes significa aprender y enseñar matemáticas.

Juan y el profesor sienten miedo e inseguridad ante los problemas matemáticos que tienen que resolver y, en este caso, lo importante es tratar de determinar qué es lo que los ha llevado a tener estas actitudes hacia las matemáticas. Por esta razón, es muy importante reflexionar acerca de cuál es la visión que tenemos de las matemáticas. El siguiente texto de Alan J. Bishop presenta una visión de las matemáticas:

> Las matemáticas se encuentran en una posición nada envidiable: es una de las materias escolares más importantes que los niños de hoy deben estudiar y al mismo tiempo es una de las peor comprendidas. Su reputación intimida. Todo el mundo sabe que es importante y que su estudio es necesario. Pero pocas personas se sienten cómodas con ellas [...].
>
> Sin duda, los educadores, los padres y la sociedad en general consideran que las matemáticas son una de las materias más importantes del currículo escolar, estando sólo por detrás del idioma nacional. Hoy en día, si alguien quiere tener éxito, debe estudiar matemáticas; ésta es la "creencia popular" de muchos padres en muchos países del mundo. En consecuencia, millones de niños de todo el mundo forcejean con las complejidades de cálculos, ecuaciones, triángulos y fracciones, mientras millones de enseñantes forcejean con las complejidades de inculcar la comprensión matemática en los jóvenes que tienen a su cargo [...].
>
> Sin duda, algunos niños tienen éxito; es decir, aprenden a emplear las técnicas matemáticas, obtienen las respuestas correctas, utilizan los métodos correctos y aprueban los exámenes [...].
>
> Sin embargo, la situación es bastante diferente para la mayoría de los jóvenes que no tienen éxito. Siguen creyendo que las matemáticas son importantes, pero también que son difíciles —imposibles para muchos— ,misteriosas, sin sentido y aburridas. No "tratan" de nada y provocan sentimientos de temor, de falta de confianza y, sin duda, de odio. Para algunos, llegan a provocar sentimientos de presión y de estar bajo el dominio de alguien, no se sabe de quién.

¿Qué ideas comparte y destacaría del texto de Bishop con respecto a la forma en cómo se ven y viven las matemáticas?

Lo que señala el texto es, sin duda, algo que se ha visto o escuchado de alguna persona, o tal vez hasta experimentado en nosotros mismos. A pesar de que las matemáticas sean consideradas difíciles, aburridas y temidas por los estudiantes y la población en su mayoría, son también un conocimiento fundamental en la formación de las personas. De ahí que sean omnipresentes en todos los currículos de la educación básica, media superior y en un gran número de carreras universitarias. Es tanta la importancia social que tienen las matemáticas que se piensa que todos deben aprenderlas, a pesar del rechazo que generan en la mayoría.

Tomar conciencia de la visión que se tiene de las matemáticas y de lo que se piensa acerca de esta disciplina resulta relevante porque, como maestros, influimos en las primeras experiencias que los alumnos de primaria tienen con esta disciplina. Es en este nivel de enseñanza cuando los estudiantes empiezan a acercarse a esta materia escolar e irán desarrollando sus actitudes hacia ella.

Si tuviera que explicarle a alguien qué son las matemáticas, ¿qué le diría?

En un taller dirigido a maestros de educación básica se les planteó la situación anterior. Algunas de las respuestas que dieron son las siguientes:

- Es una disciplina que sigue pasos, un orden riguroso.
- Es una ciencia que se encarga del estudio de los números y todas sus relaciones y aplicaciones.
- Es una ciencia que se creó para facilitar la resolución de los problemas que se presentan en la vida diaria.
- Son las operaciones básicas que nos acompañan en toda nuestra vida, porque en nuestra vida en todo momento aplicamos matemáticas. Desde que nacemos somos un número.
- Es una ciencia que se encuentra en cada una de las cosas que hacemos, vemos y comemos. Son la base de la educación y para toda la vida la vamos a necesitar.

Seguramente comparte algunas de las ideas que están expresadas en estas respuestas, pero no todas son iguales aunque tengan puntos en común, como que es una ciencia o que son importantes para nuestra vida. Es lógico pensar que en la manera en la que nos explicamos qué son las matemáticas, reflejamos lo que pensamos acerca de esta ciencia. Así lo que creemos está determinado por la forma en que las hemos vivido y construido como estudiantes, como profesores, como padres de familia, o simplemente como una persona que vive en una sociedad en un determinado momento histórico y en una determinada cultura.

Además, la manera en la que los maestros concebimos las matemáticas influye en la manera en que las enseñamos. Considere, por ejemplo, al maestro que piensa que:

> Son las operaciones básicas que nos acompañan en toda nuestra vida, porque en nuestra vida en todo momento aplicamos matemáticas. Desde que nacemos somos un número.

Si este maestro concibe que las matemáticas son las operaciones básicas es muy probable que en sus clases dé prioridad a algoritmos y mecanizaciones. Esta forma de acercar o de enseñar las matemáticas puede hacer que los alumnos vayan perdiendo el interés por el estudio de esta asignatura y, eventualmente, genera rechazo hacia ella.

Una vez consideradas las situaciones anteriores, es conveniente empezar a explorar un poco más a fondo qué son las actitudes y cuáles son sus componentes.

¿Qué se entiende por actitud?

Antes de iniciar lo invitamos a responder la siguiente pregunta:

> ¿Qué entiende por actitud?

Cuando a un grupo de maestros de matemáticas se les preguntó qué eran para ellos las actitudes, dieron respuestas como las siguientes:

- Son las formas en que me comporto de acuerdo con el estado de ánimo.
- Son manifestaciones de querer o no trabajar.
- La forma o estilo de las personas para enfrentar situaciones, problemas o vivencias, y se pueden clasificar en positivas y negativas.
- Es la disponibilidad de una persona al realizar una actividad.
- Postura, conducta, que asumimos frente a algo o alguien.
- Es la acción que se tiene ante una situación y puede ser negativa o positiva.
- Son estilos de pensamiento y comportamiento coherentes hacia determinado tipo de situaciones.
- Es una conducta con un matiz emocional que predispone una conducta ante una situación.

Los maestros dieron una gran variedad de definiciones y no todas incluyen las mismas ideas. Se dice que las actitudes son: *pensamiento*, *conducta*, *postura*, *acción*, *una forma de enfrentar, una forma de actuar, un comportamiento.* ¿Todos estos términos son sinónimos? También se habla de que en las actitudes hay un *matiz emocional*, que *dependen del estado de ánimo* y que *pueden ser negativas o positivas*. La definición de actitud que usted dio, ¿se parece a alguna de las dadas por estos profesores?

En realidad, el concepto de *actitud* es objeto de discusión porque no se ha llegado a un acuerdo en su definición. Desde que Herbert Spencer en 1862 utilizara por primera vez el término *actitud*, han sido numerosas las definiciones propuestas por los estudiosos en esta materia:

> Es la intensidad de afecto a favor o en contra de un objeto psicológico.
>
> Es una colección de cogniciones, opiniones y hechos (conocimientos), incluyendo las evaluaciones (sentimientos) positivas y negativas; todo relacionándose y describiendo a un tema u objeto central.
>
> Es una disposición psicológica personal que implica la valoración, positiva o negativa, de un objeto, mediante respuestas explícitas o implícitas, que contienen a la vez elementos cognitivos, afectivos y de conducta.

Para tratar de explicar lo que son las actitudes han surgido diferentes modelos sin que hasta el momento se tenga un consenso. En particular, hay un modelo que incluye tres componentes y que permite comprender algunas de las actitudes hacia las matemáticas. Para ilustrar cuáles son esos tres componentes de las actitudes, analicemos nuevamente el caso de Juan:

> Juan es un alumno de 5° grado de primaria que piensa que matemáticas es la materia más difícil de la escuela, pero que es muy importante sacar buenas calificaciones y debe estudiarlas mucho para lograrlo. También cree que él no es bueno en matemáticas porque siempre le cuesta mucho trabajo entender los problemas y se tarda en resolverlos. El día de hoy el profesor les ha hecho un examen y se puso muy nervioso, sentía que no había estudiado lo suficiente. Durante el examen sentía angustia y miedo porque no entendía los problemas, al grado que sólo pudo responder cinco de diez preguntas.

El texto describe a Juan por lo que piensa (**creencias**), lo que siente (**emociones**) y lo que hace (**conducta**).

Creencias	*Juan cree que:* Matemáticas es la materia más difícil. Es muy importante sacar buenas calificaciones y que para eso debe estudiarlas mucho. Él no es bueno en matemáticas porque le cuesta trabajo entenderlas.
Emociones	*Juan:* Se siente nervioso. Siente angustia y miedo.
Conductas	*Juan:* Se tarda en resolver los problemas. Al momento de contestar el examen sólo resolvió cinco preguntas.

¿Cómo ha llegado Juan a tener esas creencias sobre las matemáticas y sobre él mismo? ¿Por qué siente nervios y angustia al resolver los problemas? Los estudiantes, como personas que viven dentro de una sociedad y cultura determinadas y que han tenido experiencias tanto escolares como extraescolares con las matemáticas, van desarrollado una serie de emociones, creencias y conductas que influirán en la manera en que conviven con las matemáticas al estudiarlas y aprenderlas.

Emociones, creencias y conductas son componentes de las actitudes.

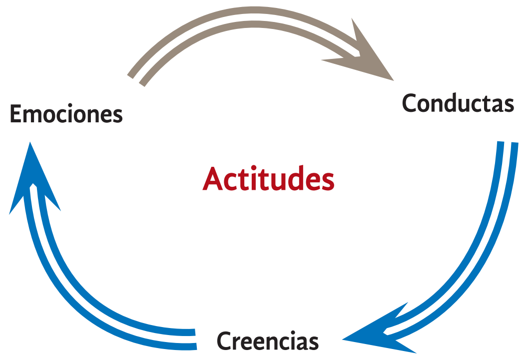


Diagrama 2 |

Según este modelo, la actitud que cada persona tiene hacia las matemáticas está dada por sus creencias acerca de esta disciplina, lo que siente y lo que hace cuando está ante ella. Éstos son los tres componentes de las actitudes: cognitivo, afectivo y conductual. El siguiente esquema explica más claramente los componentes de la actitud:[2]

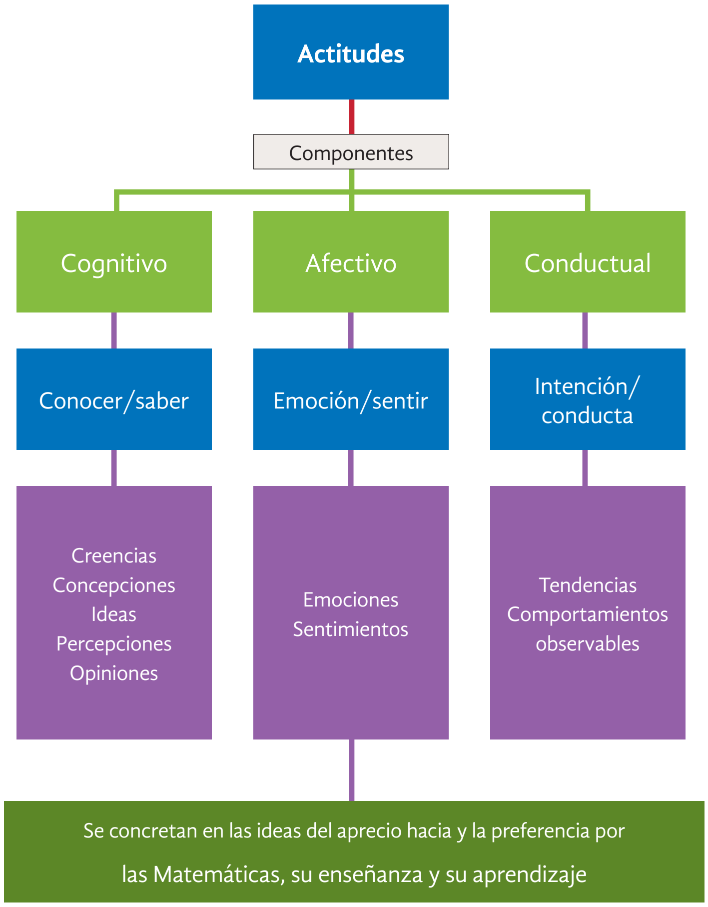


Diagrama 3 |

A partir de este esquema, el componente cognitivo de las actitudes está dado por lo que conocemos y sabemos, y esto se traduce en las ideas, creencias, percepciones, etc., que tenemos sobre las matemáticas. El componente afectivo se manifiesta por medio de las emociones y sentimientos que experimentamos al estar en contacto con ellas, ya sea cuando estamos en la clase de matemáticas, cuando resolvemos un problema, cuando vemos al maestro, cuando en casa nos preguntan por nuestras calificaciones, etc. Finalmente, el componente conductual se refiere a las intenciones que posteriormente se traducen en acciones cuando hay que actuar en una tarea que involucre a las matemáticas, sea en la escuela o en la vida misma.

[2] Adaptado de Martínez, 2008.

Factores que influyen en la formación de las actitudes

Cada persona está expuesta o vive sus experiencias con las matemáticas dentro de un mundo de información y vivencias que le permiten construir una manera de ver las matemáticas. Esta construcción no es individual, sino social, es decir, no depende de la persona aislada, depende del *mundo* en el que vive. Este *mundo* resulta ser una compleja red de influencias que va modelando sus actitudes en torno a las matemáticas y al quehacer matemático, conformando así su visión hacia esta ciencia, hacia su aprendizaje y hacia sí mismo como aprendiz y usuario de ella.

> ¿Cuáles cree que son los aspectos de la vida de una persona que más influyen en la construcción de su visión hacia las matemáticas?

Seguramente entre los que escribió están la escuela y la familia, pero también hay otros aspectos que influyen en la manera en que se perciben, se enseñan y se aprenden las matemáticas, por ejemplo:

- ¿Cómo y dónde surge el conocimiento matemático?
- ¿Quién controla la enseñanza?
- ¿Qué o quién determina lo que se enseña y cómo se enseñan las matemáticas escolares?
- ¿Cómo se forman los profesores que enseñan matemáticas?
- ¿En dónde se utilizan las matemáticas?

Todos los ámbitos o contextos que de alguna manera influyen en la información que llega a los estudiantes sobre las matemáticas y en la manera en que las viven y se relacionan con ellas forman lo que algunos investigadores han llamado el *mundo sociomatemático* de los estudiantes. El diagrama 4 representa ese *mundo sociomatemático* del alumno.

Observamos que la escuela y la familia son los contextos más cercanos al alumno. Es lógico pensar que son también los que mayor influencia ejercen en los alumnos en su manera de ver las matemáticas y, en consecuencia, también en sus actitudes.

> ¿Está usted de acuerdo con que la escuela influye en las actitudes que los alumnos tienen hacia las matemáticas? ¿De qué manera cree que se da esta influencia?

Es en la escuela donde el alumno vive la mayor parte de sus experiencias con las matemáticas. Podemos considerar el salón de clases como el *sitio cultural* en el cual el estudiante es socializado o *enculturizado* en un modo particular de pensar y de hacer matemáticas y donde se desarrollarán sus actitudes hacia las matemáticas como consecuencia de aspectos como los siguientes:

a) Las creencias que tenga sobre:
   - Las matemáticas como ciencia

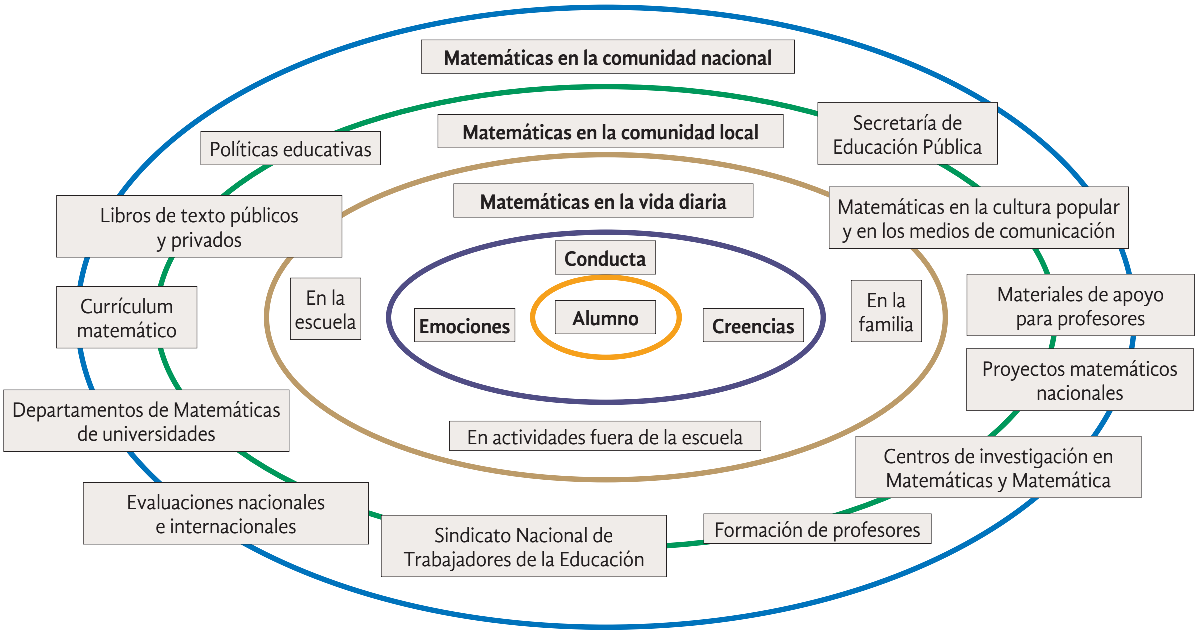


Diagrama 4 |

- Las matemáticas como disciplina escolar
- Uno mismo y su relación con las matemáticas: como aprendiz (autoconfianza) y en el desempeño en tareas matemáticas (autoeficacia)
- El contexto en el cual la educación matemática acontece: el salón de clases, el profesor, los compañeros, etcétera.

b) Las emociones que experimente en su hacer matemático:

- Libertad, alegría, felicidad, interés, curiosidad, buen ánimo, diversión, gusto, tranquilidad, confianza, tristeza, miedo, nerviosismo, coraje, disgusto, desconcierto, aburrimiento, desánimo, frustración, confusión, desesperación, indiferencia, intranquilidad, bloqueo.

c) Las acciones que ejecute ante la presencia de las matemáticas:

- Rapidez, tardanza, pasividad, actividad, interés, desinterés, agilidad, atención, esfuerzo, al resolver una tarea.

Es importante mencionar que hasta este momento hemos hablado de *actitudes hacia las matemáticas* como aquellas que tienen que ver con la valoración que se hace de esta ciencia y el aprecio e interés por esta disciplina y su aprendizaje, como consecuencia de las experiencias vividas, principalmente en el contexto escolar. En cambio, cuando hablamos de *actitudes matemáticas*, éstas se relacionan con las habilidades de pensamiento que se espera desarrollen los estudiantes con el estudio de las matemáticas, como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes para el trabajo en matemáticas. Creemos que para que estas actitudes matemáticas se den es necesario que la actitud hacia las matemáticas las propicie.

¿Cómo lograr que las actitudes hacia las matemáticas promuevan las actitudes matemáticas deseadas? Habría que establecer primero qué actitudes hacia las matemáticas queremos. Lo más común sería decir: *queremos que los alumnos tengan una buena actitud*; pero, ¿cuál es una buena actitud hacia las matemáticas?

☛ ¿Cuál considera usted que debería ser la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y su aprendizaje?

Probablemente dentro de las ideas que haya escrito estén: que crean que las matemáticas son importantes y que les van a servir para la vida, que las vean como algo que es fácil aprender si las estudian, que tengan el gusto por aprenderlas, que en la clase estén interesados y trabajen las actividades que se les ponen y las resuelvan correctamente. Sin duda, esto es lo que la mayoría de los maestros desearían de sus alumnos.

☛ 1. ¿Conoce usted lo que piensan sus alumnos de las matemáticas y de la clase de matemáticas?
2. Si clasificara a sus alumnos en dos grupos —a los que les gustan las matemáticas y a los que no les gustan—, ¿qué grupo cree que sería mayor?
3. Y si los clasificara en los que les gusta la clase de matemáticas y en los que no les gusta, ¿cree que los dos grupos tendrían el mismo número de alumnos? ¿Por qué?

En el siguiente apartado conoceremos algunas actitudes hacia las matemáticas que se reportan en diversas investigaciones hechas en México.

ALGUNOS HALLAZGOS SOBRE LAS ACTITUDES DE ESTUDIANTES MEXICANOS HACIA LAS MATEMÁTICAS

Los alumnos, a lo largo de su paso por la educación primaria, van construyendo ciertas actitudes hacia las matemáticas. Se ha preguntado alguna vez, ¿cuáles son las actitudes que sus alumnos tienen con respecto a esta asignatura y su enseñanza?, ¿les gusta o no les gusta?, ¿les parece fácil o difícil?, ¿aburrida o entretenida?, ¿creen que es una ciencia exacta en la que todo está dicho?

☛ ¿Considera que saber las respuestas a las preguntas anteriores es importante para tomar decisiones sobre cómo trabajar en la clase de matemáticas? ¿Por qué?

Preparar y trabajar las clases sólo considerando los aspectos disciplinares y no reconociendo a los alumnos como personas con creencias, emociones y tendencias de conducta que influyen en su aprendizaje es considerar que nuestros estudiantes no son personas sino máquinas a las que hay que programar para que aprendan los contenidos que indica el programa.

En este apartado presentamos los resultados de algunas investigaciones sobre las actitudes hacia las matemáticas de niños y adolescentes mexicanos. La mayoría de las investigaciones realizadas en México relacionadas con esta temática corresponden al nivel secundaria. Las actitudes hacia las matemáticas de los alumnos de primaria casi no han sido estudiadas en nuestro país; no obstante, se han explorado algunas creencias y dado que éstas forman parte de las actitudes expondremos también algunos de los resultados obtenidos en este nivel escolar.

Hemos elegido dos investigaciones que consideramos representativas.

1. *Una investigación hecha en Aguascalientes con alumnos de segundo, cuarto y sexto grado de escuelas primarias urbanas y rurales*. La investigación incluyó diferentes aspectos, entre ellos la visión que sobre las matemáticas tienen los estudiantes. Se realizaron entrevistas individuales a 58 alumnos. Aunque entre los propósitos de este estudio no estaba el trabajar con actitudes, mucho de lo que se encontró se refiere a éstas.[3]
2. *Un estudio llevado a cabo con 192 estudiantes de 16 secundarias en el Distrito Federal*. Esta investigación tuvo como propósito conocer las diferencias de género en varios aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas, entre ellos las actitudes de los estudiantes de tercer grado hacia esta asignatura. Considerando los propósitos de este apartado se mostrarán los resultados generales sin separarlos por género. Para investigar las actitudes de estos estudiantes se aplicó la escala AMMEC.[4] En este estudio también se hicieron entrevistas por equipos.[5]

Presentaremos lo que estas investigaciones reportan acerca de cuatro aspectos:

1. El gusto por las matemáticas.
2. Concepciones de la matemática, su utilidad e importancia.
3. Concepciones sobre el papel del maestro.
4. La autoconfianza de los alumnos para trabajar en matemáticas.

Esperamos que conocer algunas de las actitudes que los niños y los adolescentes tienen acerca de las matemáticas le ayude a considerar elementos y herramientas para observarlos de una manera más completa e integral.

El gusto por las matemáticas

Antes de presentar lo que algunos niños y adolescentes mexicanos opinan sobre su gusto por las matemáticas consideramos necesario hacer una aclaración. Es muy común pensar que tener gusto por la matemática es tener una actitud positiva hacia la misma. Nosotros creemos que no necesariamente esta materia le debe gustar a todos los alumnos, consideramos que lo conveniente es que los estudiantes den argumentos informados de por qué les gustan o no les gustan las matemáticas, pensando que para opinar se requiere, sin lugar a dudas, conocer sobre lo que se está hablando, es decir, estar informado.

---

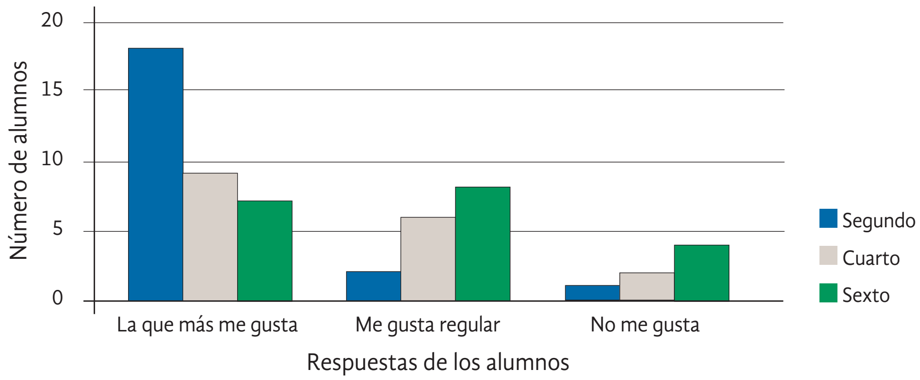
[3] Investigación coordinada por la doctora Alicia Ávila. Todos los testimonios presentados de los alumnos de primaria son copias textuales de esta investigación y se muestran entre comillas.
[4] Escala de Actitudes hacia las Matemáticas y las Matemáticas Enseñadas con Computadora.
[5] Investigación coordinada por la doctora Sonia Ursini. Todos los testimonios presentados de los alumnos de secundaria son copias textuales de esta investigación y se muestran entre comillas.

1. Considere el grupo con el que está trabajando. ¿A cuántos alumnos cree usted que les gustan las matemáticas?
2. Enumere tres posibles razones por las que usted piensa que a algunos de sus alumnos no les gustan las matemáticas.
3. Enumere tres posibles razones por las que usted cree que a algunos de sus alumnos sí les gustan las matemáticas.

Cuando a grupos de segundo, cuarto y sexto de primaria se les preguntó sobre su gusto por las matemáticas, se obtuvieron los siguientes resultados:[6]

Gráfica 1 | Inclinación por las matemáticas

Alumnos de primaria



La gráfica muestra que, conforme se avanza en la escolaridad, las matemáticas dejan de ser la materia que más les gusta a los alumnos. En esta investigación se reporta que la principal razón que los alumnos externan para justificar por qué no les gustan es la dificultad que tienen para comprenderlas:

- "Está muy difícil."
- "No me gusta porque casi no puedo, casi no le entiendo a las cosas, se me hacen difíciles."
- "Son difíciles porque te dejan muchos problemas, como contestar cuartos…, y las divisiones porque no les entiendo."

Otra de las razones que exponen los estudiantes es que las matemáticas les parecen aburridas.

- "No hay casi nada interesante; sí les entiendo a las clases, pero la maestra explica muy lento y me aburro."

Lo anterior puede interpretarse como un foco de alerta en varios sentidos. Por un lado, algunos autores señalan que, dado que en las matemáticas los contenidos se van acumu-

[6] Las gráficas se hicieron a partir de las tablas con datos numéricos que presentan los resultados de la investigación.

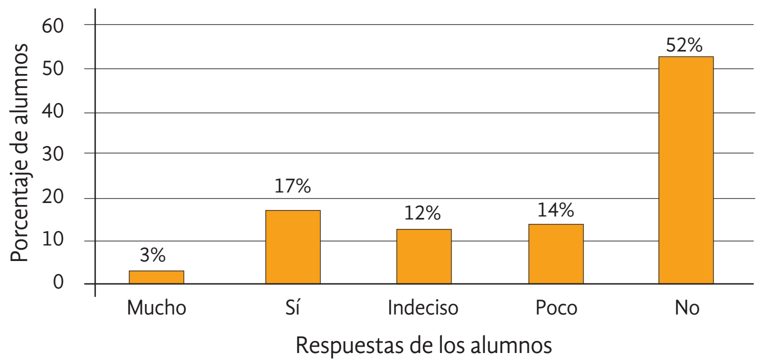
lando de forma escalonada —en donde cada peldaño representa algún conocimiento (conceptos, algoritmos, procedimientos, etc.)—, cuando un peldaño falla provoca que a los estudiantes les parezca que las matemáticas son difíciles y que no las comprenden. Parece ser que "componiendo" dicho peldaño disminuye ese sentimiento de dificultad hacia ciertos contenidos. Por otro lado, también existe la creencia errónea de que las habilidades matemáticas son innatas y que si no se nace con ellas ya no se puede hacer nada. Esto provoca que algunos estudiantes sientan que "no nacieron para las matemáticas", "no se les dan los números", etc., creencias que pueden erradicarse a partir de experiencias que se promuevan en el salón de clases.

En secundaria, la mayoría de los estudiantes de tercer grado siente poco o ningún gusto por las matemáticas (véase la gráfica 2).

Algunas razones que dan los estudiantes son las siguientes:

- "Es que de repente sí me gustan, pero después ya no, cuando no les entiendo."
- "Pues es que, bueno, para mí no son así, difíciles, pero no me gustan, no me gustan. Son horribles, ¿no?"

Gráfica 2 | Matemáticas es la materia que más me gusta
Alumnos de 3° de secundaria



Esta última opinión resulta interesante porque rompe con la idea de que la facilidad implica necesariamente el gusto y la dificultad, el rechazo: al menos un alumno comenta que, aunque no se le hacen difíciles, no le gustan.

No sólo en estos dos estudios hechos en México el gusto por la matemática decrece con el pasar de los años escolares, otras investigaciones en nuestro país y también internacionales señalan la misma tendencia.

Creencias sobre la matemática, su utilidad e importancia

Ya hemos dicho que se considera a las matemáticas como una de las asignaturas más relevantes. Si bien todas las asignaturas tienen su valor y son importantes para la formación del ciudadano, en los últimos años, en la mayoría de los países, la asignatura de matemáticas se ha vuelto la más importante del currículo, a pesar de que la gran mayoría del alumnado sigue teniendo fuertes dificultades con esta disciplina. Los fracasos a los que se enfrentan, tomando en cuenta que es muy común asociar las matemáticas con la inteligencia, pueden ir menguando la autoconfianza, lo que vuelve al alumno inseguro de sus propias capacidades.

Las creencias sobre lo que son las matemáticas, su utilidad e importancia tienden a formarse a partir del ambiente social y cultural en el que se desenvuelven los alumnos y, sin lugar a dudas, estas creencias influyen en la manera en que se relacionan con esta disciplina en el salón de clases. Por ejemplo, creer que la matemática es una ciencia en la que sólo hay un procedimiento correcto para resolver los problemas puede ocasionar que los estudiantes se acerquen a ésta con cierto miedo e inseguridad. Considerar que hay muchos caminos para resolver los problemas, por el contrario, despertaría su creatividad e interés.

¿Conoce usted lo que sus alumnos piensan sobre qué son las matemáticas?

Escriba dos posibles respuestas que usted cree que darían sus alumnos a cada una de estas preguntas:

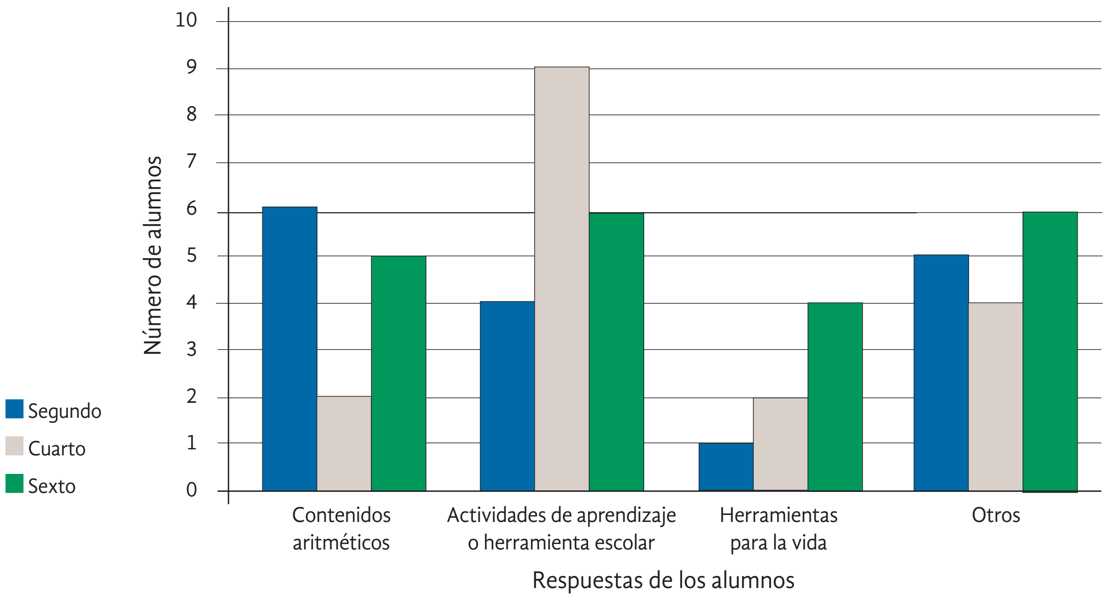
a) ¿Qué son las matemáticas?

b) ¿Para qué sirven?

En la siguiente gráfica se observa cómo entienden las matemáticas los alumnos de primaria que participaron en este estudio:[7]

Gráfica 3 | Cómo se entienden las matemáticas

Entrevista a 58 alumnos de primarias urbanas y rurales



Sumando los alumnos de los tres grados en cada categoría de la gráfica se observa que 13 de los 58 alumnos entrevistados identificaron a las matemáticas con contenidos aritméticos, mientras que 19 conciben las matemáticas como una herramienta que sirve para la escuela y 7 las consideraron como una herramienta para la vida. Es destacable que esta última concepción creció de un grado escolar a otro.

Como ejemplo de las respuestas de los alumnos ante la pregunta: “Para ti, ¿qué son las matemáticas?”, niños de segundo grado dieron respuestas como:

- “Son sumas.”
- “Son multiplicaciones y números.”

[7] A seis alumnos de segundo grado no se les aplicó la pregunta.

Mientras que una alumna de sexto grado respondió:

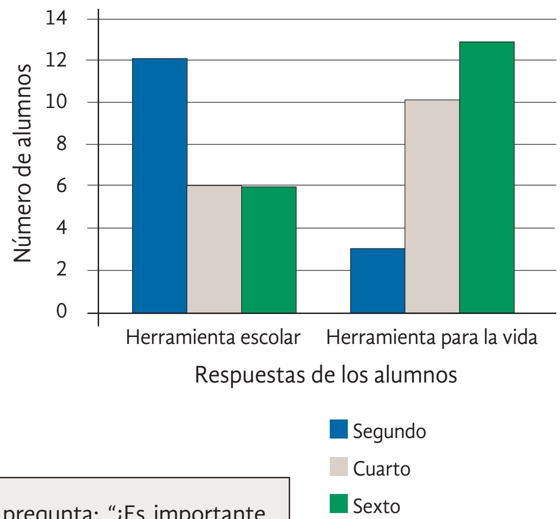
- "Es una materia donde puedo aprender cosas, como resolver problemas de suma y resta; es como una materia, aprender a multiplicar, a dividir."

En cuanto a la utilidad de las matemáticas, al hacer la pregunta: "¿Para qué crees que sirven las matemáticas?", los alumnos de primaria las consideraron como una herramienta escolar o para la vida, como se observa en la gráfica 4. Lo que denota es que la creencia de lo que son las matemáticas y para qué sirven, son muy similares.

Una niña de sexto grado opinó:

- [las matemáticas sirven] "para llegar a ser más grande en la vida o también para poder pasar de año, saber, cuando hay un problema de la familia de cierta cantidad de dinero, saber cómo, si nos han robado; contar los números, cómo vamos en el dinero, cómo lo vamos gastando [...]".

Gráfica 4 | Utilidad de las matemáticas
Entrevista a 58 alumnos de primarias urbanas y rurales



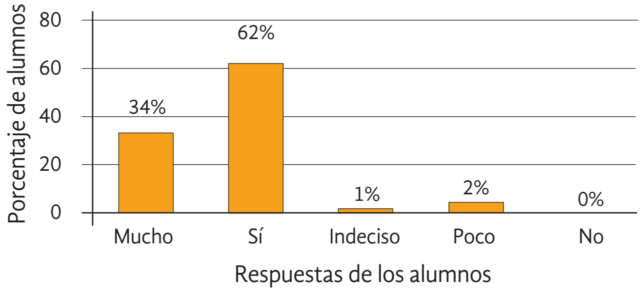
1. Imagine que plantea a todos los alumnos de su grupo la pregunta: "¿Es importante aprender matemáticas?", con cinco opciones de respuesta: no, poco, indeciso, sí, mucho.
   ¿Qué porcentaje de respuesta cree que tendría cada una de las opciones?

2. Escriba dos posibles respuestas que considere sus alumnos darían a la pregunta: "¿Por qué es importante aprender matemáticas?"

En cuanto a secundaria, casi la totalidad de los 192 estudiantes de tercero consideraron que aprender matemáticas es importante. La gráfica 5 muestra los porcentajes de respuesta. Entre las razones que dieron están las siguientes: son importantes como herramienta escolar; como requisito para continuar estudiando; como herramienta para la vida. Es interesante mencionar que al referirse a las matemáticas como herramienta para la vida, los argumentos se reducen a transacciones comerciales:

- "Cuando nos vamos de viaje, porque hay que calcular, ¿no?"
- "Casi para todo. Cuando vas a comprar. Cuando haces operaciones, cuando vas a comprar tu despensa, el IVA, más el IVA."
- "O de repente llegan a tener cierto dinero y llega alguien más vivo que tú y sabe más matemáticas, y te puede dar bajón con tu dinero."

Gráfica 5 | Es importante aprender matemáticas
Alumnos de 3° de secundaria



En muy pocos casos pudieron dar ejemplos de otra índole:

- “En todo se utiliza, ¿no? Hasta para la ropa. Sí, porque tienes que sacar las medidas, después de medir. Sí, si se pasa tantito ya no sale la ropa. Sí, para los trazos.”
- “Es importante hasta para cortar madera tienes que saber matemáticas, para saber cuánto le tienes que poner y dónde le tienes que cortar y todo, y son importantes para cualquier cosa.”

Estos resultados muestran dos hechos interesantes:

a) Nuestros alumnos consideran que es importante aprender matemáticas, pero,
b) No tienen claro el porqué de su importancia.

La idea de que es una herramienta para la vida aparece en primaria y se afianza en secundaria, probablemente debido a la posición que la sociedad otorga a las matemáticas. No obstante, los argumentos que dan los alumnos son “pobres” en el sentido de que se refieren principalmente a situaciones de compraventa, son muy pocos los ejemplos que dan y que no implican el uso de la aritmética. Sin lugar a dudas todo ello forma parte de la visión que se tiene de las matemáticas en nuestra sociedad; y es muy probable que su idea de que aprender matemáticas es importante provenga de lo que escuchan de otras personas, más que de lo que hayan experimentado personalmente.

La creencia de que las matemáticas son una herramienta escolar pone en evidencia la concepción de que esta disciplina es una asignatura escolar que tiene muy poco o nada que ver con su vida fuera de la institución. Esta falta de argumentos para justificar la utilidad o la importancia de las matemáticas, más allá de la escuela, tiene que ver con la manera en que se trabajan en clase, los ejemplos que se manejan, el tipo de problemas que se plantean en el aula, mismos que a su vez, probablemente, reflejan la concepción que los docentes mismos tienen de las matemáticas.

Concepciones sobre el papel del maestro

Las creencias que nuestros alumnos tienen acerca de cuál es el papel o la función del maestro podrían ser un obstáculo para modificar el enfoque que emplee el docente para trabajar matemáticas.

Recordemos que, a partir de la reforma de 1993 y en los programas vigentes, se coloca la resolución de problemas como el eje alrededor del cual debe desarrollarse la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Resolver problemas no sólo es el propósito de aprender matemáticas, también es el medio para construir contenidos matemáticos. Este enfoque implicó un nuevo papel del profesor, ya no como el poseedor y transmisor del conocimiento, sino como el motivador, coordinador y facilitador.

Ahora bien, tanto a nivel primaria como secundaria, se ha encontrado que una creencia muy arraigada en los estudiantes es que el buen profesor es aquel que explica y explica bien, paso a paso y con paciencia lo que se tiene que hacer.

> Imagine que plantea a todos los alumnos de su grupo la pregunta: “¿Qué es para ti un buen maestro de matemáticas?” Escriba dos posibles respuestas que considere darían sus alumnos.

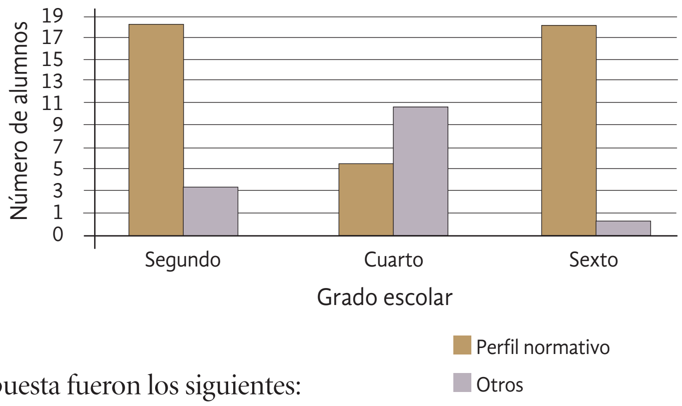
Cuando se preguntó a los niños de primaria lo que para ellos era un buen profesor, algunas respuestas fueron:

- "Que sepa bien cómo explica, que no se equivoque y que nos sepa enseñar bien. Paso a paso cómo se divide; las multiplicaciones, cómo se multiplica de dos, de tres, de cuatro, de uno."
- "Debe ser el que explique bien, en los trabajos que nos pone a nosotros, que nos explique bien [...]. Me las tienen que enseñar, explicándose bien, porque si no, no se pueden entender."

La gráfica 6 muestra la cantidad de alumnos que piensan que un buen profesor es aquel que tiene un perfil normativo, es decir, un maestro que comunica o explica un saber a los alumnos, muestra las nociones y da ejemplos.

Observamos que 42 de los 58 alumnos consideraron que el maestro debe comunicar el conocimiento por medio de explicaciones. Esta creencia de que un buen maestro es el que explica bien se extiende hasta el nivel secundaria, según las entrevistas que se hicieron a los alumnos. Algunos ejemplos de respuesta fueron los siguientes:

Gráfica 6 | La función del profesor
Alumnos de primaria



- "¡Que nos explique más a fondo! Que lo explique, pero que también nos deje entenderlo. Porque luego, por ejemplo, nada más lo explica, y ya luego, luego, se pasa al siguiente tema, lo explica, nos deja ejercicios y ya pasa al siguiente tema."
- "Al momento de querer hacer el trabajo le dices: 'maestra no entendí ¡explíqueme!' Y se harta, pero la maestra no sabe que a lo mejor ellos (refiriéndose a sus compañeros varones) no le pusieron atención y nosotras sí le pusimos atención, pero no entendimos bien y, pues, ya también la hartamos y por eso no nos explica, como que se enoja y no nos explica otra vez."

La idea de que la función del profesor consiste en explicar resulta contundente para los alumnos (y quizá para algunos maestros). Es muy probable que ellos no crean que se aprende a partir de enfrentarse a problemas cuyo método de solución no se ha explicado. La mayoría espera que su maestro tenga un perfil normativo, lo que, como ya comentamos, dificultaría un cambio de enfoque en la enseñanza. Es necesario que el profesor conozca las creencias de sus alumnos al respecto para modificarlas en caso necesario.

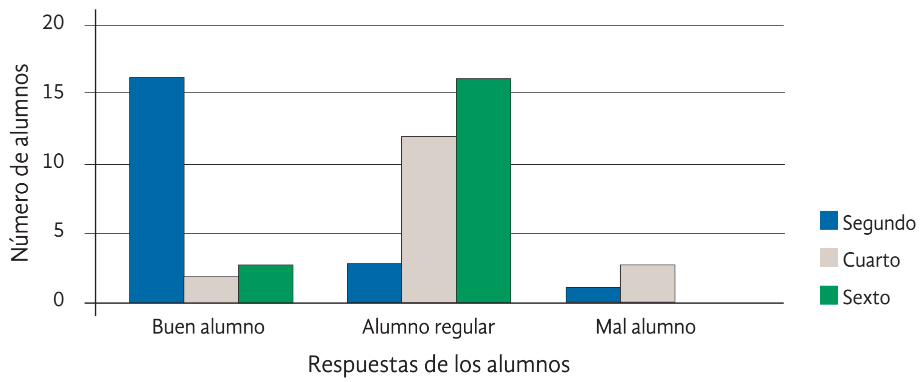
La autoconfianza de los alumnos para trabajar en matemáticas

Un aspecto muy relevante dentro de las actitudes es la autoconfianza. Conocer la autoconfianza que van desarrollando los alumnos para trabajar en matemáticas es un punto importante que hay que considerar con atención. La autoconfianza tiene una influencia crucial en las decisiones que tomamos. La manera como nos relacionamos con las matemáticas, con la mediación del profesor y los padres de familia, incide fuertemente en la autoconfianza que vamos generando.

Un alumno puede creer que no nació para las matemáticas y esto, indudablemente, constituye un obstáculo para su aprendizaje. Pero, ¿cómo construye el alumno este autoconcepto? Algunos autores consideran que muchos profesores contribuyen a la formación de este tipo de autoconcepto al presentar las matemáticas como una materia difícil, lo que no suelen hacer con otras materias como la historia, por ejemplo. También contribuyen a ello las ideas que dominan en la sociedad acerca de las matemáticas y la cultura en la que está inmerso el estudiante. Por ejemplo, si se conciben como una ciencia exacta, clara y precisa en la que ya todo está dicho, se puede considerar que sólo es cuestión de aprenderlas sin necesidad de comprenderlas.

En cuanto al autoconcepto que tienen los niños de primaria acerca de si son buenos o malos en matemáticas, se observa que cuando terminan la primaria, ya muy pocos se consideran buenos alumnos, como se ve en la gráfica 7:

Gráfica 7 | Autopercepciones
Alumnos de primaria



Es claro que conforme se avanza en escolaridad los estudiantes dejan de percibirse buenos alumnos para luego considerarse regulares, en algunos casos hasta se consideran malos alumnos. Algunos de sus argumentos hacen referencia a si son o no disciplinados. Dos alumnos de sexto grado argumentaron:

- "Yo me considero un buen alumno, pues lo principal son mis calificaciones; sí pongo atención en clases. Tengo buenas calificaciones."
- "Siempre pongo atención en matemáticas porque mi papá me dice que ponga atención; si no, no voy a entender y voy a salir mal en matemáticas."

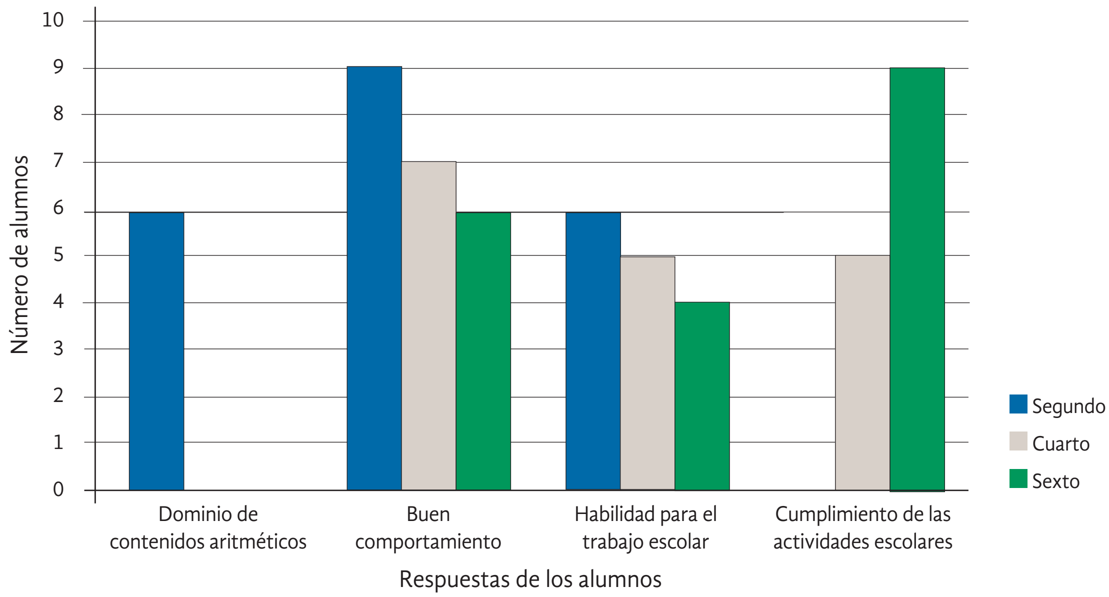
La única niña que en segundo grado dijo considerarse una mala alumna, argumentó que se pone a jugar con su compañera en lugar de trabajar.

> Imagine que plantea a los alumnos de su grupo la pregunta: "¿Qué es para ti ser un buen alumno en matemáticas?"
>
> Escriba dos posibles respuestas que considere sus alumnos darían.

Pero, ¿qué es para ellos ser un buen alumno? Los estudiantes han construido algunas creencias y concepciones acerca de lo que piensan que es ser "un buen alumno".

En el caso de los niños de primaria, se les preguntó: "¿Qué es para ustedes ser un buen alumno en matemáticas?" La gráfica 8 muestra los rasgos que identificaron:

Gráfica 8 | Rasgos de un buen alumno
Entrevista a 58 alumnos de primarias urbanas y rurales



Los alumnos de segundo grado mencionaron que un buen alumno en matemáticas es el que domina los contenidos y en todos los casos hicieron alusión sólo a contenidos aritméticos. Obsérvese que esta idea no surgió ni en cuarto ni en sexto. Un rasgo importante que apareció en todos los grados es la idea de *portarse bien* para considerarse un buen alumno en matemáticas. Pero esta idea decrece conforme se avanza en la escolaridad, al igual que la idea de que ser un buen alumno es ser hábil para el trabajo escolar. Finalmente, el cumplir con las actividades escolares aparece en cuarto grado y crece en sexto. Estas creencias las han construido a partir de sus experiencias escolares, probablemente es lo que ven que los docentes toman en cuenta para catalogar a un alumno como bueno.

En secundaria, tanto la escala AMMEC como las entrevistas, arrojaron datos al respecto de la percepción que tienen los alumnos de sí mismos y de la autoconfianza que tienen para trabajar en matemáticas. El 64% de los alumnos se consideran perseverantes y manifiestan que si un problema no les sale a la primera, vuelven a intentarlo hasta encontrar la respuesta. Casi la mitad (49%) refirió que sí resuelve los problemas que se plantean en clase, lo que indica tenacidad y autoconfianza para solucionar los problemas planteados. Un alto porcentaje indicó que no les gusta ser líderes en sus equipos y poco más de la mitad que no les gusta ser los primeros en dar la respuesta a un problema. Esto último muestra falta de seguridad y baja autoconfianza para defender sus ideas.

En las entrevistas por equipo, algunos estudiantes externaron la falta de confianza en sí mismos o el enojo que les provoca no poder resolver un problema:

- "Entonces, como no sé, me encierro en mi mundo y digo '¡no, qué tal si estoy mal!' Entonces, me falta confianza, creo".
- "Yo a veces también me enojo en la clase, y a veces hasta aviento mi cuaderno y digo '¡no, ya no!'"

Para que el profesor intervenga y evite que las matemáticas contribuyan en la formación de una baja autoconfianza, es necesario que conozca a sus alumnos y aprenda a escucharlos. Por ejemplo, es muy distinto si ante un fracaso matemático un alumno se justifica diciendo: "ese día me sentía mal", "en verdad, no había estudiado", "es que el año anterior no me lo habían explicado bien", a que use argumentos del tipo: "es que las matemáticas no son para mí", "las matemáticas son sólo para inteligentes", "para mí las matemáticas son muy difíciles". Mientras el primer tipo de argumentos atribuye su fracaso a factores externos, los del segundo tipo lo atribuyen a factores internos, lo que denota una baja autoconfianza e indica al maestro la necesidad de tomar medidas para apoyar a ese alumno.

Aunque aquí sólo se comentaron los resultados de dos investigaciones, otros estudios han obtenido resultados muy similares. El apéndice 1 (p. 47) contiene bibliografía que puede consultar para profundizar sobre este tema.

EXPLORAR LAS ACTITUDES

En este apartado se mostrará un instrumento que le permitirá explorar las actitudes de sus alumnos hacia las matemáticas. Es conveniente aclarar que esto no implica, de ninguna manera, que usted tenga que "evaluar" las actitudes. Se trata de que, al conocer a sus alumnos desde esta perspectiva, usted tenga más herramientas para realizar su labor docente al enseñar matemáticas.

Conocer la actitud que los estudiantes tienen hacia las matemáticas nos brinda elementos para reflexionar sobre nuestro quehacer como maestros y tratar de generar espacios de aprendizaje que ayuden, si es necesario, a modificar las actitudes.

En el apartado anterior se le pidió que hiciera algunas hipótesis sobre las actitudes que tienen sus alumnos hacia las matemáticas. Para tener una mayor certeza de lo que usted cree sobre las actitudes de sus alumnos, a continuación le proporcionamos la escala AMMEC, un instrumento diseñado por profesionales en el tema, de fácil aplicación, que le proporcionará información interesante. Es importante señalar que éste es sólo uno de los instrumentos que se han utilizado en este campo, pero recurrimos a dicha escala como punto de partida porque fue diseñada para usarse con estudiantes mexicanos.

Escala AMMEC

La escala AMMEC fue diseñada por investigadores mexicanos como parte del proyecto *Enseñanza de las matemáticas con tecnología* (EMAT) y ha sido ampliamente utilizada con niños en nuestro país. Es una escala tipo Likert[8] de cinco puntos, que proporciona in-

---

[8] En este tipo de escalas se suele presentar una graduación de acuerdo; a veces se utiliza el rango 1 a 5, pero también se ocupan otros rangos (Martínez y Moreno, 2005). La escala AMMEC usa el rango de 0 a 4.

formación sobre las actitudes hacia las matemáticas y consta de 29 ítems distribuidos en tres subescalas:

Enunciados	Subescala
1 al 11	1. Actitudes hacia las matemáticas (AM)
12 al 22	2. Actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora (AMC)
23 al 29	3. Autoconfianza para trabajar las matemáticas (ACM)

Gráfica 9 | ESCALA AMMEC

Escala de actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora

Subescala 1 | Actitudes hacia las matemáticas (AM)						
1	Me gusta la clase de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
2	La clase de matemáticas es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
3	Las matemáticas son difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
4	Matemáticas es la materia que más me gusta	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
5	Las matemáticas son divertidas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
6	Me gustan las matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
7	Es importante aprender matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
8	Me gustaría usar las matemáticas cuando ya vaya a trabajar	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
9	Me gusta aprender matemáticas con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
10	Tengo dificultad para entender lo que me piden en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
11	Puedo resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
Subescala 2 | Actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora (AMC)						
12	Prefiero las clases de matemáticas sin computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
13	Me gusta manejar la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
14	Prefiero que un compañero maneje la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
15	Me pongo nervioso al usar la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
16	Me gustaría ir más seguido al laboratorio EMAT	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
17	Aprendería más matemáticas si pudiera usar más tiempo la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
18	Me gustan más las matemáticas cuando el maestro explica y pone ejemplos	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
19	Es fácil usar la computadora en EMAT	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
20	Si fuera profesor de matemáticas enseñaría con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
21	Comento las actividades de matemáticas con mis compañeros	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
22	La clase en el laboratorio EMAT es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
Subescala 3 | Autoconfianza para trabajar las matemáticas (ACM)						
23	Me gusta resolver las actividades sin ayuda del maestro	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
24	Me gusta proponer la solución a problemas antes que los demás	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
25	Me gusta ser el líder de mi equipo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
26	Si un problema no sale a la primera, le busco hasta resolverlo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
27	Me gusta resolver problemas de matemáticas algo difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
28	Me gusta discutir en equipo cómo resolver un problema de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
29	En el equipo defiendo mis ideas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No

La escala lista para su aplicación se encuentra en el apéndice 2 de este capítulo (p. 48).

La primera subescala —*Actitudes hacia las matemáticas*— comprende once enunciados encaminados a conocer lo que los alumnos piensan y sienten sobre las matemáticas y la clase de matemáticas. Si sólo desea aplicar esta subescala, la encuentra en el apéndice 3 (p. 49).

La segunda subescala —*Actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora*— indaga sobre lo que los alumnos piensan y sienten acerca del aprendizaje de las matemáticas cuando se usa la computadora como apoyo. Como mencionamos anteriormente, AMMEC fue diseñada originalmente para el proyecto EMAT. Esta subescala se encuentra en el apéndice 4 (p. 50); en caso necesario puede modificar aquellas afirmaciones que se refieran al proyecto EMAT.

La tercera subescala —*Autoconfianza para trabajar las matemáticas*— se enfoca en lo que los alumnos piensan sobre sí mismos, como aprendices y como resolutores de tareas matemáticas. Esta subescala se encuentra en el apéndice 5 (p. 51).

Al aplicarla a su grupo de alumnos podrá obtener un primer panorama de las actitudes que tienen hacia las matemáticas.

Cómo aplicar la escala

La escala AMMEC puede aplicarse completa o cada subescala puede aplicarse por separado, dependiendo de cuál sea su interés. Por ejemplo, si en su escuela no hay computadoras y, por lo tanto, no da clases de matemáticas con ella, puede aplicar solamente las subescalas 1 (AM) y 3 (ACM).

Para aplicarla puede fotocopiarla, distribuirla entre sus alumnos y, junto con ellos, ir leyendo en voz alta los enunciados para asegurarse de que no tengan dudas sobre lo que se está afirmando en cada uno de ellos. Es importante que explique a sus alumnos que sólo deberán dar una sola respuesta por cada enunciado, en la misma línea, marcando ya sea con color o con una cruz ✗ la palabra que refleja el nivel de acuerdo con la afirmación en cuestión (mucho, sí, indeciso, poco, no). Los datos que recabe se verán, por ejemplo, así:

1	Me gusta la clase de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
2	La clase de matemáticas es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No

Esto indica que el alumno que tachó el “Sí”, en correspondencia con el ítem 1, está afirmando que sí le gusta la clase de matemáticas. Por el contrario, está indeciso en cuanto a que la clase de matemáticas es o no aburrida.

Para que los alumnos no se inhiban al contestar, conviene aclararles que las respuestas dadas a la escala no serán sujetas a evaluación. Enfatice que todos los enunciados deben ser respondidos. Considere una atmósfera relajada y el tiempo necesario para que los alumnos contesten sin presiones.

Una vez recabadas las hojas contestadas por sus alumnos será necesario organizar y analizar los datos como le sugerimos a continuación.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se puede hacer de dos formas: cuantitativa y cualitativa. El siguiente ejemplo muestra cómo se puede hacer cada uno de estos análisis:

Análisis cuantitativo

Para el análisis cuantitativo resulta conveniente asignar puntajes a las respuestas de los alumnos con el propósito de obtener promedios. A cada ítem se le asigna un valor numérico de 0 a 4:

- Para los enunciados que aluden a una actitud positiva (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29), el valor numérico asignado es el siguiente:

  0 – No **1** – Poco **2**– Indeciso **3** – Sí **4** – Mucho

  Por ejemplo, si un alumno tacha la opción "Sí" en el ítem 1:

1	Me gusta la clase de matemáticas	Mucho	~~Sí~~	Indeciso	Poco	No

  El valor numérico asignado a esta respuesta es 3.

- Los enunciados que hacen referencia a una actitud negativa (2, 3, 10, 12, 14 y 15) poseen los siguientes valores:

  4 – No **3** – Poco **2** – Indeciso **1** – Sí **0** – Mucho

  Por ejemplo, si un alumno tacha la opción "Poco" en el ítem 2:

2	La clase de matemáticas es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	~~Poco~~	No

  El valor numérico asignado a la respuesta dada es 3.

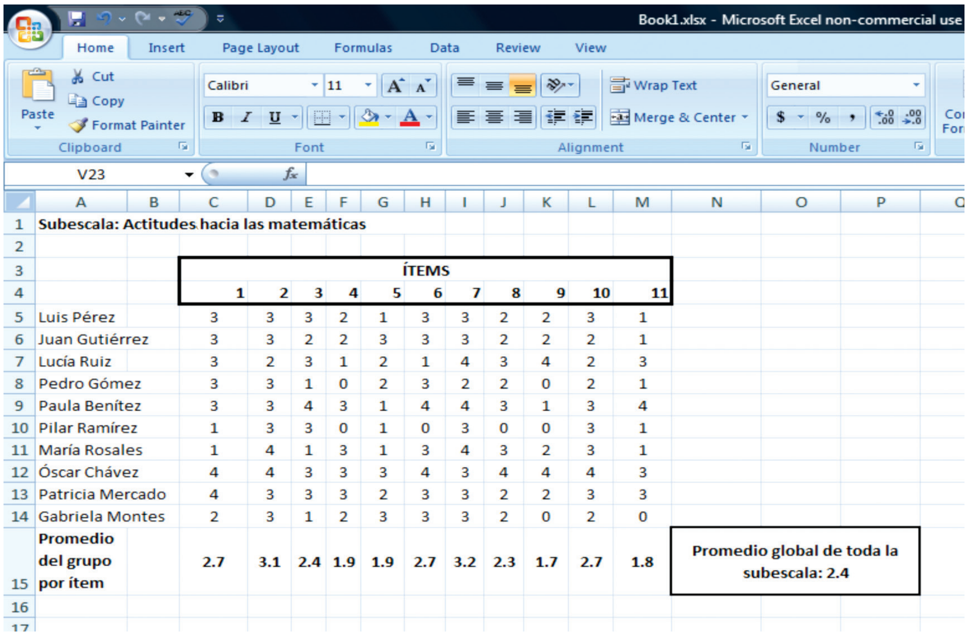
Observe que en ambos ejemplos, el valor asignado a la respuesta es 3, aunque la opción tachada es diferente. El ítem 1 hace referencia a una actitud positiva y el ítem 2 a una actitud negativa. Es muy importante que tome esto en cuenta cuando asigne los puntos a las respuestas dadas por los alumnos.

Para que se familiarice con esta manera de asignar un valor numérico a las respuestas dadas a los enunciados, le proponemos el siguiente ejercicio. Agregue el valor numérico a cada una de las respuestas del cuadro siguiente (p. 42) en la columna que se indica. Compruebe que asignó correctamente los valores, comparándolos con la tabla que le presentamos a la derecha en esta página.

Número de ítem	Respuesta	Valor asignado
1	Sí	3
2	Poco	3
3	Poco	3
4	Indeciso	2
5	Poco	1
6	Sí	3
7	Sí	3
8	Indeciso	2
9	Indeciso	2
10	Poco	3
11	Poco	1

N° de ítem							Valor numérico
Subescala 1 | AM							
1	Me gusta la clase de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
2	La clase de matemáticas es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
3	Las matemáticas son difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
4	Matemáticas es la materia que más me gusta	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
5	Las matemáticas son divertidas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
6	Me gustan las matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
7	Es importante aprender matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
8	Me gustaría usar las matemáticas cuando ya vaya a trabajar	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
9	Me gusta aprender matemáticas con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
10	Tengo dificultad para entender lo que me piden en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	
11	Puedo resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No	

Recomendamos usar una hoja de Excel (o un cuadro de doble entrada) para registrar los datos que se obtengan en todos los enunciados y con todos los alumnos. En el diagrama 5 presentamos un ejemplo de los datos obtenidos con un grupo de diez alumnos para la subescala 1. Observe que los ítems están numerados del 1 al 11 y debajo de cada ítem se registra el valor numérico que corresponde para cada alumno:



Subescala: Actitudes hacia las matemáticas

	ÍTEMS										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Luis Pérez	3	3	3	2	1	3	3	2	2	3	1
Juan Gutiérrez	3	3	2	2	3	3	3	2	2	2	1
Lucía Ruiz	3	2	3	1	2	1	4	3	4	2	3
Pedro Gómez	3	3	1	0	2	3	2	2	0	2	1
Paula Benítez	3	3	4	3	1	4	4	3	1	3	4
Pilar Ramírez	1	3	3	0	1	0	3	0	0	3	1
María Rosales	1	4	1	3	1	3	4	3	2	3	1
Óscar Chávez	4	4	3	3	3	4	3	4	4	4	3
Patricia Mercado	4	3	3	3	2	3	3	2	2	3	3
Gabriela Montes	2	3	1	2	3	3	3	2	0	2	0
Promedio del grupo por ítem	**2.7**	**3.1**	**2.4**	**1.9**	**1.9**	**2.7**	**3.2**	**2.3**	**1.7**	**2.7**	**1.8**

Promedio global de toda la subescala: 2.4

Diagrama 5 |

Una vez capturados los valores numéricos se puede calcular, por ejemplo, el promedio del grupo por ítem; para ello se realiza la suma de lo que todos los estudiantes respondieron en cada ítem y se divide entre el número de alumnos. En el ejemplo que presentamos, el ítem 1 tiene un promedio de 2.7, dado que la suma de los valores correspondientes a este ítem, de todos los alumnos, es 27, que dividido por el número de alumnos, que es 10, nos da 2.7:

$$\frac{3+3+3+3+3+1+1+4+4+2}{10} = \frac{27}{10} = 2.7$$

Una vez calculado el promedio para todos los ítems se puede calcular el promedio global, que en este caso es de 2.4; éste se obtiene sumando los promedios obtenidos en cada uno de los ítems y se divide entre el número de ítems. En el ejemplo que presentamos, la suma del promedio de todos los ítems es 26.4, que dividido entre 11 —el número de ítems— nos da 2.4.

$$\frac{2.7+3.1+2.4+1.9+1.9+2.7+3.2+2.3+1.7+2.7+1.8}{11} = \frac{26.4}{11} = 2.4$$

Para interpretar estos valores debemos considerar que una puntuación cercana a 4 indica una actitud que tiende a ser positiva; una puntuación cercana o igual a 2 indica una actitud neutra; y una puntuación menor de 2 sugiere una actitud que tiende a ser negativa.

En el caso del ejemplo, el promedio global de 2.4 nos indica que el grupo tiende a tener una actitud neutra hacia las matemáticas. Este resultado muestra que los alumnos no han consolidado todavía una actitud hacia las matemáticas, lo que nos permite pensar que existe una zona de oportunidad para incidir en ella.

Análisis cualitativo

Puede utilizar los datos para un análisis más particularizado, ya sea por ítem o por alumno; es decir, usted conocería mejor a sus estudiantes como grupo y a cada uno de ellos en particular, si así lo requiere.

Como se observa en los datos del grupo ejemplo, los puntajes promedio obtenidos en los 11 ítems de esta subescala fueron:

1	Me gusta la clase de matemáticas	2.7
2	La clase de matemáticas es aburrida	3.1
3	Las matemáticas son difíciles	2.4
4	Matemáticas es la materia que más me gusta	1.9
5	Las matemáticas son divertidas	1.9
6	Me gustan las matemáticas	2.7
7	Es importante aprender matemáticas	3.2
8	Me gustaría usar las matemáticas cuando ya vaya a trabajar	2.3
9	Me gusta aprender matemáticas con computadora	1.7
10	Tengo dificultad para entender lo que me piden en las hojas de trabajo	2.7
11	Puedo resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo	1.8

A partir de estos puntajes se hacen interpretaciones que servirían para tomar decisiones acerca de cómo trabajar matemáticas en la clase. Por ejemplo, estos alumnos no consideran que la clase de matemáticas sea aburrida (el puntaje 3.1 es muy cercano a la respuesta "Poco"), pero tampoco consideran que las matemáticas sean divertidas (el puntaje 1.9 es cercano a la respuesta "Indeciso"). Esto es alentador porque es muy probable que estos estudiantes no necesiten que se les pongan actividades de matemáticas recreativas para no aburrirse, posiblemente un problema que represente un reto intelectual les parece igual de interesante.

Asimismo, se buscaría la razón por la que algunos alumnos consideraron que la clase es aburrida o se muestran indecisos al respecto. En este caso el docente puede preguntar directamente a Lucía (quien respondió "Indeciso") si recuerda alguna clase de matemáticas en la que se haya aburrido, ¿por qué fue así? y, a partir de la respuesta de la alumna, saber si fue a causa del tipo de actividades que se trabajaron, si fue porque para ella fue algo difícil o porque no se trabajó en equipo, etc. Toda la información recabada servirá para tomar decisiones al momento de planear y llevar a cabo las clases de matemáticas.

En el caso del ítem 3 (*Las matemáticas son difíciles*), el puntaje promedio es 2.4 ubicado entre la respuesta "Indeciso" y "Poco". En este ítem hay tres alumnos que respondieron "Sí", lo cual denota que consideran que las matemáticas son difíciles. Si el maestro quisiera que estos alumnos cambiaran esta creencia con el propósito de que se acercaran a las matemáticas con más confianza, preguntaría a Pedro, María y Gaby por qué consideran que las matemáticas son difíciles. Sería útil e interesante indagar si se debe a la dificultad de algunos contenidos o a causas de orden didáctico: al tipo de actividades que llevaron a cabo en clase, a las lecciones del libro de texto, o a que no comprendieron alguna explicación de lo que tenían que hacer. O bien, a causas de tipo afectivo: a que se burlan de ellos sus compañeros, a que no tienen autoconfianza para realizar estas tareas, etc. Las causas pueden ser múltiples y de diferente naturaleza; será el profesor quien, a partir de la información que reciba, tendrá que tomar las decisiones que considere pertinentes.

Otro puntaje que resulta interesante es el correspondiente al ítem 9 (*Me gusta aprender matemáticas por computadora*). El promedio 1.7 obtenido está entre "Indeciso" y "No". Aunque muchos maestros pensaríamos que el uso de la computadora resulta atractivo para los alumnos, este resultado muestra que no siempre es así. De hecho, hay una investigación en la que los resultados mostraron que el uso de la computadora en las clases de matemáticas no mejoró las actitudes de los estudiantes hacia esta materia.

Los resultados de las respuestas que dio cada alumno también pueden analizarse a partir de las respuestas por alumno. En la hoja de Excel donde se muestran los resultados de los diez alumnos, un caso especial es el de Pilar, quien dio como respuesta "No" a los siguientes cuatro ítems:

- Matemáticas es la materia que me gusta más
- Me gustan las matemáticas
- Me gustaría usar las matemáticas cuando vaya a trabajar
- Me gusta aprender matemáticas por computadora

Asimismo, esta niña dio como respuesta "Poco" al ítem:

- Me gusta la clase de matemáticas

Estos cinco ítems son los que incluyen la expresión “Me gusta” o “Me gustaría”. Anteriormente mencionamos que no se espera que a todos los alumnos les gusten las matemáticas, no obstante, sería importante, útil e interesante, conversar con esta alumna sobre las razones por las que al parecer no le gusta nada que tenga que ver con las matemáticas. Si esta alumna tiene logros académicos aceptables en matemáticas constataríamos lo que algunas investigaciones reportan de que no hay una relación directa entre lo que se considera buenas actitudes y rendimiento académico. Por el contrario, si esta alumna tiene un bajo desempeño, conviene indagar si éste está relacionado con su actitud y buscar qué hacer para que esta alumna se relacione de mejor manera con las matemáticas que tiene que aprender.

La información que se obtiene al aplicar la escala tiene una gran riqueza si deseamos conocer las actitudes de los alumnos, sin embargo, hay que complementarla con pláticas con los alumnos para profundizar más en este conocimiento.

No es necesario que esto se haga de manera frecuente. La sugerencia es aplicar la escala en tres momentos: al inicio del curso escolar, al finalizar el primer semestre y al final del ciclo escolar; ello con el objetivo de tener parámetros de referencia que nos permitan dar seguimiento al desarrollo de las actitudes en los estudiantes.

En el caso de los primeros grados —primero a cuarto—, el maestro puede considerar, dependiendo de la comprensión lectora de sus alumnos y de la dificultad que represente para los niños contestar una escala de este tipo, la conveniencia de aplicarla tal y como está, o utilizar las afirmaciones que contiene para establecer un diálogo directo con los niños.

Algunas consideraciones para propiciar un cambio en la actitud hacia las matemáticas

Es en la primaria cuando el alumnado se acerca por primera vez a las matemáticas de manera formal y es en este nivel escolar cuando se crean las bases para la formación de las actitudes hacia esta disciplina. Si bien los factores que intervienen en la formación de una actitud son múltiples y muchos están fuera del control del docente, su actuación en esta etapa formativa del alumnado es fundamental. Sus conocimientos matemáticos, pedagógicos, psicológicos, así como su conocimiento acerca del papel histórico y social de las matemáticas, serán factores muy importantes dado que influirán fuertemente en la formación de la disposición que desarrollen los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas. Consideramos que el trabajo del profesor para promover el interés hacia las matemáticas y la motivación para su estudio son fundamentales para lograr que los alumnos se acerquen a las matemáticas sin miedo, con confianza, y puedan verlas como un conocimiento útil para comprender mejor este mundo globalizado.

En las últimas décadas se ha insistido en la idea de que el maestro tiene que presentar a las matemáticas como algo divertido y fácil, al mismo tiempo que útil e interesante. Para ello se proponen anécdotas simpáticas, hechos históricos curiosos, se inventan juegos y retos. Sin embargo, las evidencias muestran que a pesar de estos esfuerzos, no sólo el aprendizaje de los conceptos matemáticos no mejora, sino que tampoco la motivación para aprender matemáticas se ve incentivada de manera significativa. Los alumnos juegan y se divierten, sin embargo, al pasar de un año escolar a otro, su actitud hacia las matemáticas se va haciendo cada vez menos positiva y la consideran aburrida y difícil. Si bien vale la pena desarrollar actividades para que el aprendizaje de las matemáticas sea divertido y retador, por lo menos para algunos alumnos, no hay que olvidar que son un producto cultural que ha implicado un trabajo muy serio y arduo de muchas generaciones de individuos y de colectivos dedicadas a su desarrollo. En la enseñanza de esta disciplina, se trata de poner al alcance de nuestros niños un conocimiento muy complejo que requiere de mucha aplicación y esfuerzo tanto por parte del maestro como del alumnado. Es justamente este esfuerzo y compromiso intelectual el que lleva a la mayoría del alumnado a huir de las matemáticas y a considerarlas, con el pasar de los ciclos escolares, como una de las asignaturas más difíciles, lo que poco a poco los conduce a desarrollar una menor disposición para aprenderlas.

Por lo tanto, aunque es necesario motivarlos e incentivarlos hacia el estudio de las matemáticas, es todavía más importante enseñarles, desde los primeros acercamientos a esta disciplina, a cuestionar, preguntar, discutir y argumentar. Todos sabemos que los infantes siempre quieren conocer el porqué de las cosas: ¿por qué se estudian las matemáticas?, ¿por qué es importante saber hacer cálculos?, ¿por qué se resta y se divide de cierta manera?, ¿para qué se utilizan las matemáticas?, etc. Pero es muy común que en la escuela no sólo no se contesten este tipo de preguntas, sino que por razones de tiempo, de disciplina, del manejo del grupo y también de desconocimiento, se les haga creer que esas preguntas no hay que hacerlas, con lo cual se propicia que su interés vaya mermando cada vez más.

Por el contrario, para propiciar en el alumnado el interés es necesario proporcionarle los elementos que le permitan reflexionar sobre esta disciplina, sobre los hechos históricos relacionados con su desarrollo, sobre el empleo que se le ha dado a lo largo de la historia, que ha sido a veces positivo (para apoyar desarrollos científicos que mejoran la vida de los seres humanos), pero a menudo también negativo (para mantener el poder, para apoyar desarrollos de armas de todo tipo que destruyen la vida).

Sería conveniente que desde temprana edad se diera a los niños información que les permita darse cuenta de que las matemáticas son desarrolladas para satisfacer ciertos intereses y necesidades propias de una época y una cultura. Hay que explicarles que en distintos lugares se desarrollaron matemáticas distintas, en correspondencia a la cultura e intereses locales (por ejemplo, la matemática prehispánica) y que, por razones con frecuencia ajenas a las matemáticas mismas, desaparecen (conquistas, guerras, intereses económicos), sólo algunas sobreviven, y éstas son las que han prevalecido, se han extendido y han sido finalmente aceptadas por todos. Los rudimentos de esas matemáticas son las que aprendemos ahora en la escuela, pero son sólo unas de las matemáticas posibles.

Acercamientos de este tipo ayudarían a los alumnos a ver las matemáticas como uno de los productos culturales si bien fundamentales para nuestra sociedad, hacerles comprender su importancia y proporcionarles conocimientos elementales básicos que les permitan un acercamiento crítico hacia esta disciplina. Estos conocimientos les permitirían valorar a la ciencia matemática y constituirían elementos importantes para desarrollar cierta actitud (positiva o negativa, pero informada) hacia esta disciplina.

ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS | APÉNDICE 1

OTRAS INVESTIGACIONES REALIZADAS EN MÉXICO SOBRE ACTITUDES

Eudave	Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y alumnos de Bachillerato.	1994
González	Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria.	2005
Campos	Actitud hacia las matemáticas: diferencias de género entre estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria.	2006
Mercado	Actitud hacia las matemáticas y rendimiento.	2007
Juárez	Actitudes y rendimiento en matemáticas usando la hoja electrónica de cálculo: Un estudio longitudinal.	2008
Ursini, Sánchez y Orendain	Validación y confiabilidad de una Escala de Actitudes hacia las Matemáticas Enseñadas por Computadora.	2004
Sánchez y Ursini	Dos enfoques para medir la relación entre actitudes hacia las matemáticas y aprovechamiento matemático. La experiencia mexicana con EMAT.	2007
Ursini, Ramirez y Sánchez	Using Technlogy in Mathematics Class: How this Affets Student's Achievement and Attitudes.	2007
Ursini y Sánchez	Gender, technology and attitude towars mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students.	2008
Ursini	Aspectos educativos y género en el aprendizaje de las matemáticas en escuelas secundarias del Distrito Federal.	2009
González	Actitudes y creencias acerca de las matemáticas. Intervención con perspectiva de género en escuelas secundarias.	2010
González	Cambio de actitudes y creencias hacia las matemáticas. Intervención con perspectiva de género	2012

ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS | APÉNDICE 2

ESCALA AMMEC

Nombre ______________________________ Fecha ______________

Intrucciones: Lee cuidadosamente cada oración y cruza la opción de la derecha que meas se acerca a lo que tú sientes habitualmente. Únicamente puedes cruzar una opción por oración. Recuerda responder de acuerdo con tu propio sentir y no de acuerdo con lo que consideras que es lo adecuado o lo esperable.

Subescala 1 | Actitudes hacia las matemáticas (AM)						
1	Me gusta la clase de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
2	La clase de matemáticas es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
3	Las matemáticas son difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
4	Matemáticas es la materia que más me gusta	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
5	Las matemáticas son divertidas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
6	Me gustan las matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
7	Es importante aprender matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
8	Me gustaría usar las matemáticas cuando ya vaya a trabajar	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
9	Me gusta aprender matemáticas con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
10	Tengo dificultad para entender lo que me piden en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
11	Puedo resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
Subescala 2 | Actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora (AMC)						
12	Prefiero las clases de matemáticas sin computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
13	Me gusta manejar la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
14	Prefiero que un compañero maneje la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
15	Me pongo nervioso al usar la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
16	Me gustaría ir más seguido al laboratorio EMAT	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
17	Aprendería más matemáticas si pudiera usar más tiempo la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
18	Me gustan más las matemáticas cuando el maestro explica y pone ejemplos	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
19	Es fácil usar la computadora en EMAT	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
20	Si fuera profesor de matemáticas enseñaría con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
21	Comento las actividades de matemáticas con mis compañeros	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
22	La clase en el laboratorio EMAT es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
Subescala 3 | Autoconfianza para trabajar las matemáticas (ACM)						
23	Me gusta resolver las actividades sin ayuda del maestro	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
24	Me gusta proponer la solución a problemas antes que los demás	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
25	Me gusta ser el líder de mi equipo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
26	Si un problema no sale a la primera, le busco hasta resolverlo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
27	Me gusta resolver problemas de matemáticas algo difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
28	Me gusta discutir en equipo cómo resolver un problema de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
29	En el equipo defiendo mis ideas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No

ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS | APÉNDICE 3

ESCALA AMMEC (SUBESCALA 1 AM)

Escuela ______________________ Grupo ____________

Nombre ______________________ Fecha ____________

Intrucciones: Lee cuidadosamente cada oración y cruza la opción de la derecha que meas se acerca a lo que tú sientes habitualmente. Únicamente puedes cruzar una opción por oración. Recuerda responder de acuerdo con tu propio sentir y no de acuerdo con lo que consideras que es lo adecuado o lo esperable.

Subescala 1 | Actitudes hacia las matemáticas (AM)						
1	Me gusta la clase de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
2	La clase de matemáticas es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
3	Las matemáticas son difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
4	Matemáticas es la materia que más me gusta	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
5	Las matemáticas son divertidas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
6	Me gustan las matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
7	Es importante aprender matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
8	Me gustaría usar las matemáticas cuando ya vaya a trabajar	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
9	Me gusta aprender matemáticas con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
10	Tengo dificultad para entender lo que me piden en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
11	Puedo resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No

ESCALA AMMEC (SUBESCALA 2 AMC)

Escuela ______________________________ Grupo ____________

Nombre ______________________________ Fecha ____________

Intrucciones: Lee cuidadosamente cada oración y cruza la opción de la derecha que meas se acerca a lo que tú sientes habitualmente. Únicamente puedes cruzar una opción por oración. Recuerda responder de acuerdo con tu propio sentir y no de acuerdo con lo que consideras que es lo adecuado o lo esperable.

Subescala 2 | Actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora (AMC)						
12	Prefiero las clases de matemáticas sin computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
13	Me gusta manejar la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
14	Prefiero que un compañero maneje la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
15	Me pongo nervioso al usar la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
16	Me gustaría ir más seguido al laboratorio EMAT	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
17	Aprendería más matemáticas si pudiera usar más tiempo la computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
18	Me gustan más las matemáticas cuando el maestro explica y pone ejemplos	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
19	Es fácil usar la computadora en EMAT	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
20	Si fuera profesor de matemáticas enseñaría con computadora	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
21	Comento las actividades de matemáticas con mis compañeros	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
22	La clase en el laboratorio EMAT es aburrida	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No

ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS | APÉNDICE 5

ESCALA AMMEC (SUBESCALA 3 ACM)

Escuela ______________________________ Grupo ______________

Nombre ______________________________ Fecha ______________

Intrucciones: Lee cuidadosamente cada oración y cruza la opción de la derecha que meas se acerca a lo que tú sientes habitualmente. Únicamente puedes cruzar una opción por oración. Recuerda responder de acuerdo con tu propio sentir y no de acuerdo con lo que consideras que es lo adecuado o lo esperable.

Subescala 3 | Autoconfianza para trabajar las matemáticas (ACM)						
23	Me gusta resolver las actividades sin ayuda del maestro	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
24	Me gusta proponer la solución a problemas antes que los demás	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
25	Me gusta ser el líder de mi equipo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
26	Si un problema no sale a la primera, le busco hasta resolverlo	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
27	Me gusta resolver problemas de matemáticas algo difíciles	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
28	Me gusta discutir en equipo cómo resolver un problema de matemáticas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No
29	En el equipo defiendo mis ideas	Mucho	Sí	Indeciso	Poco	No

SENTIDO NUMÉRICO

SENTIDO NUMÉRICO

El contenido "sentido numérico" es considerablemente amplio. Este capítulo estudiará algunos temas relevantes por su complejidad, por su uso y por sus vínculos con otras nociones; a saber, sistemas de numeración, fracciones y proporcionalidad.

Los tres apartados están organizados a partir de una perspectiva histórica. Si bien no es necesario que un profesor —o los alumnos— conozca en detalle todo el proceso histórico que dio origen a determinada noción matemática —para el maestro, al vivir en otra época y otro contexto, dicha noción tendrá probablemente otra funcionalidad— o que tenga un proceso de aprendizaje que reproduzca dicho desarrollo histórico, sí hay en ese desarrollo ciertos momentos, dificultades nodales, que sirven para explicar algunas propiedades de ciertos contenidos; o bien, aspectos del proceso de adquisición de los alumnos de determinadas nociones. Ésta es la orientación que decidimos darle al presente texto: abordar aspectos de la génesis de determinado contenido que sean útiles para el maestro.

De esta manera, en cada apartado encontrará una serie de actividades, preguntas y definiciones vigentes en la enseñanza, contextualizadas en una descripción histórica del contenido. En los márgenes hay notas que tratan aspectos de corte didáctico que generalmente detallan algunas dificultades de los alumnos cuando están en proceso de aprender los contenidos que aquí abordamos. Para finalizar, se ha incorporado un apéndice en el que se hace una breve reflexión en torno al origen del concepto actual de número.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

> Yo sostengo la aplicación general de la proposición hecha por Brainerd (1973b: 247) en la que afirma que "la estructura de las matemáticas es en algún sentido, isomorfa a la estructura de la realidad" para todas las prácticas numéricas, tanto tradicionales como modernas (Crump, 1990).[1]

¿Qué lleva a ciertos grupos humanos a desarrollar un sistema de numeración? ¿Por qué a lo largo de la historia los sistemas de numeración desarrollados han sido tan distintos entre sí? ¿Por qué el sistema de numeración decimal que utilizamos actualmente se impuso sobre los otros sistemas que han existido? ¿Por qué el treinta no se llama veinte y diez? ¿Por qué el ciento veintitrés no se escribe como se oye, es decir, 100203? ¿Por qué

[1] Traducción de Ana Laura Barriendos Rodríguez y Tatiana Mendoza Von der Borch.

sólo con diez cifras (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) basta para escribir todos los números? Estas propiedades no son comunes a todos los sistemas de numeración, ni han sido siempre características del sistema de numeración decimal.

Guedj (1996)[2] clasifica los sistemas de numeración en tres tipos:

- Los sistemas de numeración figurada: marcas físicas realizadas sobre objetos como cuerdas con nudos, muescas en madera o huesos, etcétera.
- Los sistemas de numeración hablada: en los que se da un nombre a cada número y al escribirlos se hace con todas sus letras, "uno", "sesenta y tres", etcétera.
- Los sistemas de numeración escrita: usan símbolos para representar números.

En los sistemas de numeración escrita hay también diferencias, por ejemplo, respecto a la base empleada, el número de símbolos distintos y si la posición en la que se escribían éstos determinaba su valor o no:

- Sistema de numeración aditivo: los símbolos se suman para representar cierto número (por ejemplo, el sistema egipcio y el romano).
- Sistema de numeración híbrido: usan tanto la adición como la multiplicación para representar números (el sistema maya y el chino).
- Sistema de numeración posicional: emplean un número limitado de símbolos (tantos como la base) y tienen un valor dependiendo del lugar que ocupan. Tal es el caso de nuestro sistema de numeración decimal.

En este apartado veremos algunas características de los sistemas de numeración egipcio, romano, chino, maya y el indo-arábigo para analizar, en cada caso, de qué tipo de sistema se trata y qué posibilidades ofrecen en cuanto a la representación de números y a las operaciones básicas.

Los sistemas de numeración egipcios

400 000 toros, 1 422 000 cabras, 120 000 prisioneros, es lo que indica la maza o cetro del faraón Narmer que data del 3000 a.C. (figura 1, p. 54).

En el antiguo Egipto la organización social generó necesidades de cuantificar con cierto rigor cabezas de ganado, hombres disponibles para la guerra, prisioneros, granos, terrenos, provisiones, etc. La contabilidad precisa y oportuna, registrada mediante la numeración escrita, era necesaria para una buena administración y culto al faraón.

A lo largo de la historia, la escritura de los números en Egipto evolucionó marcando tres periodos distintos. El primero es el de la *escritura jeroglífica*, que usaron desde el 3200 a.C. hasta aproximadamente el 2500 a.C.

[2] Citado en Fedriani (2004).

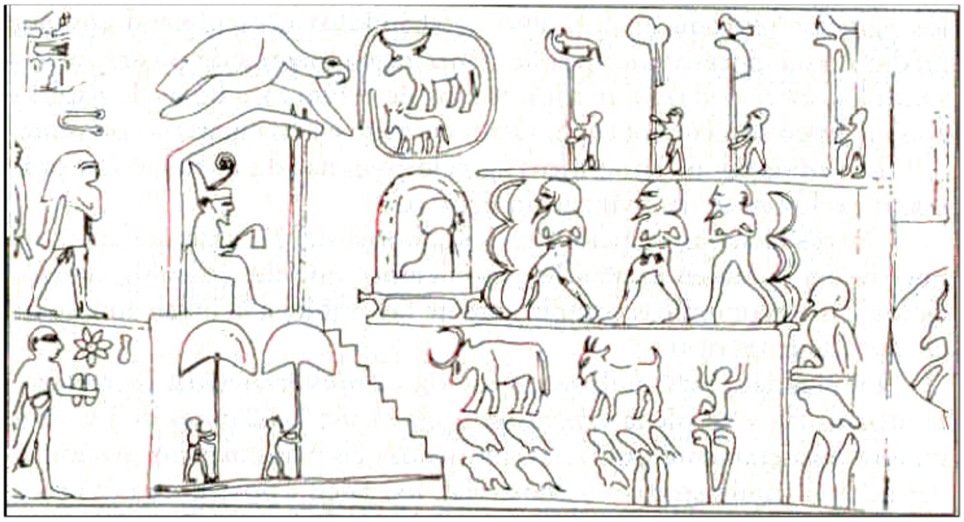
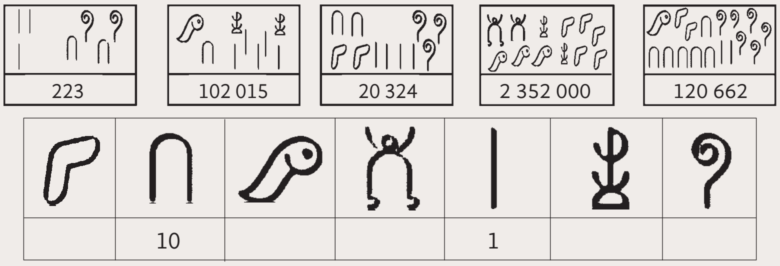
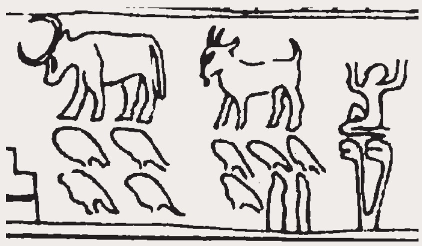


Figura 1 | Maza o cetro del faraón Narmer.

Encuentre el valor de cada símbolo numérico egipcio.[3]



Observe este fragmento de la maza de Narmer en el que está escrito: "400 000 toros, 1 422 000 cabras, 120 000 prisioneros".



Escriba con jeroglíficos egipcios los siguientes números:

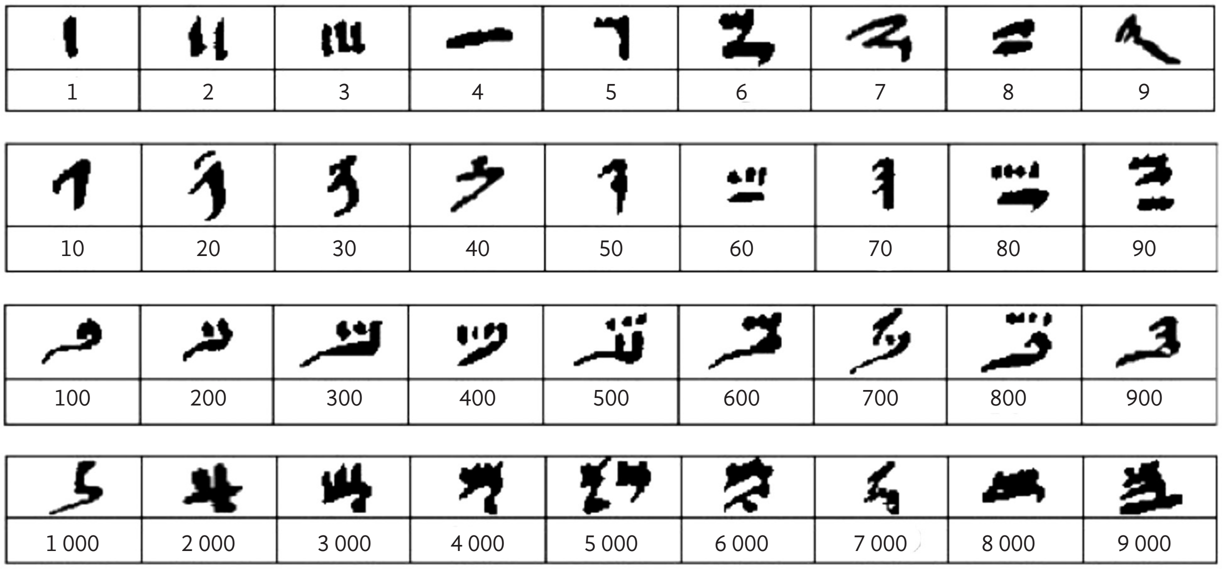
523 4 252 25 345 403 2 034 4 530 232

Como puede ver, este sistema de numeración posee siete símbolos básicos (unidades, decenas, centenas, etc.) y para representar un número se escribían estos símbolos, tantos de cada uno como fuera necesario. Para representar el número 63 se escribía tres veces el uno y seis veces el 10.

Es un sistema *de base diez* o *decimal* porque los símbolos disponibles son agrupaciones de diez (10 unidades son una decena, 10 decenas son una centena, etc.); *no es posicional* porque el valor de un símbolo no depende de la posición que ocupe en la representación; y es *aditivo* porque para saber qué número está representado deben sumarse todos los símbolos.

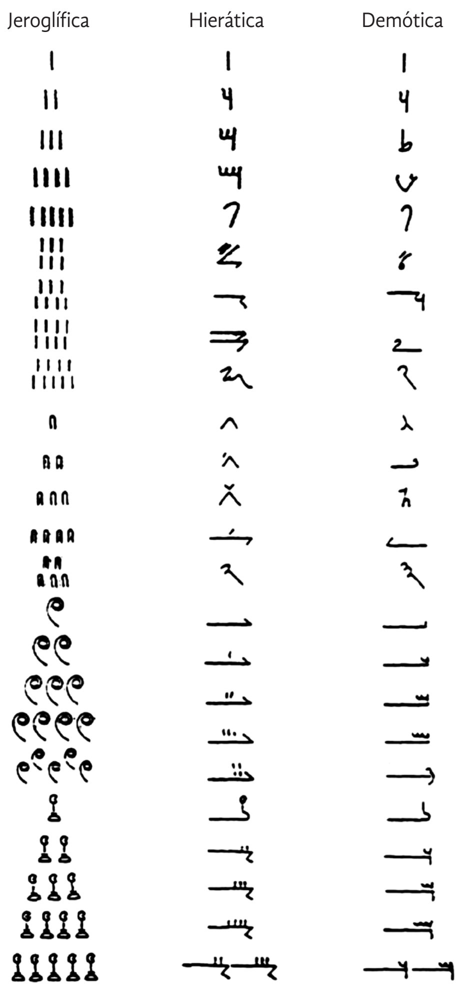
[3] Tomado de Fuenlabrada, *et al.* (2006).

El segundo periodo es el de la *escritura hierática*, usada desde el 2500 a.C. hasta aproximadamente el 600 a.C.

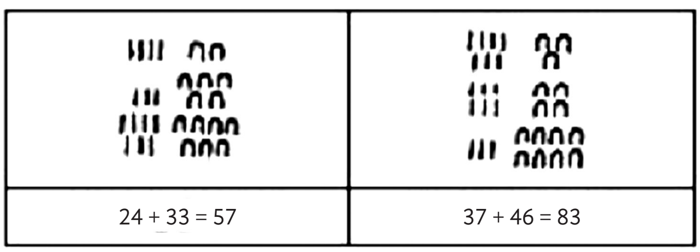


Esta escritura representó un cambio importante respecto a la jeroglífica. Había símbolos distintos para las primeras nueve unidades, nueve decenas, nueve centenas, etc., y eso redujo considerablemente la cantidad de símbolos que debían emplearse en la representación; mientras que con la escritura jeroglífica eran necesarios 20 símbolos para escribir 2 765, con la hierática sólo se necesitan cuatro.

La *escritura demótica* supone el último periodo y fue usada desde el 600 a.C. en adelante; consistió en una variación respecto a la hierática, pero la estructura es similar.



Los escribas egipcios eran capaces de sumar, restar, multiplicar y dividir. Las sumas se realizaban juntando todos los símbolos y, si había 10 iguales, se cambiaban por uno de la siguiente potencia de 10.



Las restas se realizaban de modo análogo a las sumas, pero desagrupando cuando fuera necesario.

Las multiplicaciones y divisiones eran muy distintivas en Egipto porque se realizaban a partir de tablas de duplicación. En el papiro de Rhind aparece la siguiente multiplicación: 41×59.

La solución se obtiene sumando 59 a sí mismo, $59 + 59 = 118$. Ese resultado también se suma a sí mismo, $118 + 118 = 236$; y así se continúa, siempre duplicando.

Número de veces que el 59 se suma a sí mismo	Resultados obtenidos en esas sumas	Resultados necesarios para el cálculo
1	59	√
2	118	
4	236	
8	472	√
16	944	
32	1 888	√

El proceso sigue hasta antes de que el número de “veces” que se ha sumado el 59 a sí mismo sea mayor que 41 (el número que seguiría al duplicar es 64, y como $64 > 41$, la tabla se detiene en 32 veces).

Las √ representan los valores necesarios para el cálculo del resultado; observe que si suma esos valores en la columna “Número de veces”, obtendrá 41.

$$41 = 32 + 8 + 1$$
$$41 \times 59 = (32 + 8 + 1) \times 59$$
$$41 \times 59 = 1\,888 + 472 + 59 = 2\,419$$

☛ Multiplique 63 × 86 empleando este método.

El sistema de numeración romano

Durante los años de apogeo, el Imperio Romano abarcó territorios desde lo que hoy es Gran Bretaña hasta Egipto y desde Portugal hasta Siria. Se fundó alrededor del siglo VIII a.C. hasta convertirse, varios siglos después, en un poderoso imperio. El sistema de numeración que desarrollaron se sigue usando en ciertos contextos hasta nuestros días.

Sus símbolos para la numeración son letras de su alfabeto, pero al parecer eran, en sus orígenes, marcas o muescas como las que hicieron muchos otros pueblos para contar.

Conforme se fue desarrollando esta escritura, cada quinta muesca era un símbolo como V y cada décima una X; así, el conteo al seis sería IIIIII y se abreviaría escribiendo sólo VI porque en esta representación quedaban implícitas las primeras cuatro muescas. Por ello se afirma que este sistema de numeración en sus orígenes es ordinal.

Relacione cada símbolo numérico romano con su valor representado en el sistema numérico decimal.[4]

I	V	X	L	C	D	M
1000	50	500	1	10	100	5

Los siguientes números en el sistema romano están bien escritos.

XV III DLX CCXC MMMXXIX

¿Cuáles símbolos del sistema romano se repetirían juntos al escribir una cantidad? ¿Hasta cuántas veces se pueden repetir?

Para obtener el valor total que representa un número romano se suma el valor de todos los símbolos, por ejemplo:

MDXXXVII = 1000 + 500 + 10 +10 +10 +5 + 1 +1 = 1 537

Los números romanos que se muestran a continuación están mal escritos. En cada caso, encuentre el error.

LLV IIV LDX CCLXL VL

Como observó, en el sistema romano se usan siete símbolos pero, a diferencia del egipcio, hay varias reglas:

a) Los símbolos que representan al 1, 10, 100 y 1 000 (I, X, C, M) pueden repetirse juntos hasta tres veces.[5]
b) Los que representan al 5, 50 y 500 (V, L, D) sólo pueden aparecer una vez; es decir, no se repiten juntos.
c) El sistema romano se basa tanto en la suma como en la resta. Para saber si el valor de un símbolo debe sumarse o restarse al valor de otro hay que fijarse en la posición de los dos símbolos: si a la izquierda de un símbolo aparece otro de menor valor que él, se resta.

La suma con números romanos se efectuaría de la siguiente manera:

CD	+	XIX	+	LXXX	=	
CD	+	L	+	XXXX	+	IX =
CD	+	L	+	XL	+	IX =
CD	+	XC	+	IX = CDXCIX		

Se juntan todos los símbolos iguales y se hacen los cambios para conservar las reglas del sistema, como no escribir XXXX sino XL.

[4] Tomado de Fuenlabrada, *et al.* (2006).
[5] A veces se aceptaban escrituras como IIII en vez de IV; sin embargo, para estudiar aquí este sistema de numeración consideraremos que siempre se aplicaban las reglas de escritura.

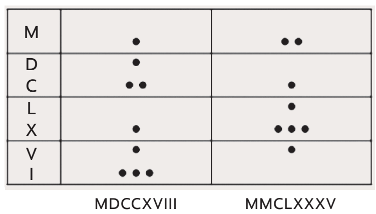
> Usando sólo los números romanos y sus reglas, sume IL + V + XXVII.

Para restar se haría algo similar, pero desagrupando cuando fuera necesario.

CD	–	LXXXI	=	
CCCC	–	LXXXI	=	
CCCLXXXXX	–	LXXXI	=	
CCC~~LXXXX~~X	–	~~LXXX~~I	=	
CCCXX	–	I	=	
CCCXVIIIII	–	I	=	
CCCXVIIII~~I~~	–	~~I~~		= CCCXVIIII = CCCXIX

> Usando sólo los números romanos y sus reglas, reste DX – LXXII.

La multiplicación y la división se efectuarían con tablas de duplicación como hacían los egipcios, pero lo que usaban los romanos era el ábaco, que se construyó durante siglos con materiales y formas distintos. Observe la representación de números romanos en el ábaco.[6]



El número MDCCXVIII requirió de nueve puntos, mientras que el número MMCLXXXV de ocho solamente.

Ahora veamos cómo usaban el ábaco para hacer multiplicaciones.

En el tablero de la página 54 se representa la multiplicación de CLXIII × XXI. Observe que en las dos primeras columnas aparecen representados tanto el multiplicando como el multiplicador. Lo siguiente se basa en la propiedad distributiva de la multiplicación, es decir, en que:

$$\text{CLXIII} \times \text{XXI} =$$
$$\text{CLXIII} \times (\text{X} + \text{X} + \text{I}) =$$
$$(\text{CLXIII} \times \text{X}) + (\text{CLXIII} \times \text{X}) + (\text{CLXIII} \times \text{I}) =$$

En la tercera columna, CLXIII se multiplicó por X mediante el sencillo método de desplazar la configuración completa de puntos hacia arriba para que las unidades queden en el renglón de las decenas, las decenas en el de las centenas, etc. En la cuarta columna

[6] Tomado de Núñez (2003).

también se multiplica por x, y en la quinta columna por I. En la sexta columna aparece la suma de los resultados obtenidos en las columnas 3, 4 y 5.

		*x	*x	*I	
		•	•		•••
•		••	••	•	••••
••	••	•••	•••	••	••
•••	•			•••	•••

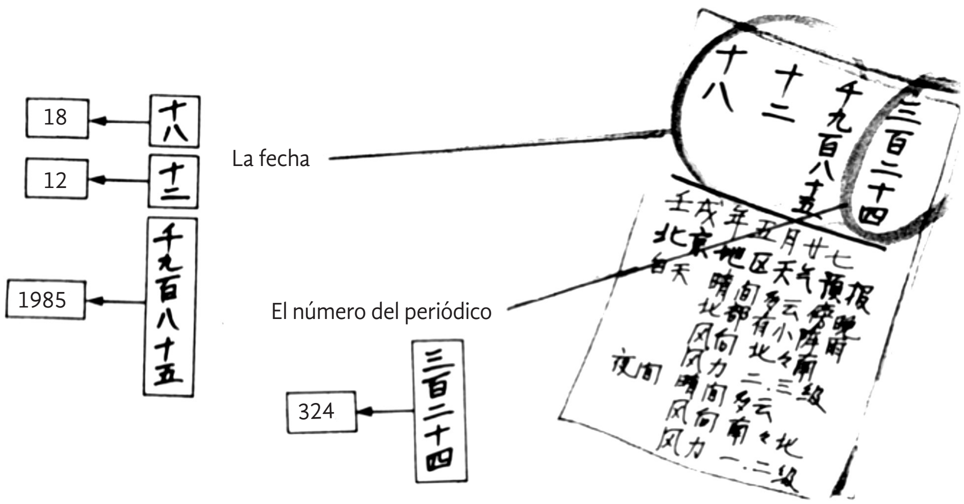
CLXIII × XXI = MMMCCCCXXIII = MMMCDXXIII

El sistema de numeración chino

El desarrollo de este sistema se remonta al siglo v a.C. y ha pasado por varias etapas antes de llegar al que presentamos aquí. Los símbolos para escribir los números son los siguientes:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

En el extracto de un periódico chino se leen algunos datos.[7] Analícelos para determinar cómo funciona el sistema de numeración:



[7] Tomado de Sierra (2006), p. 189.

八
万
二
百
五
十
二

> ¿Qué número es el que se representa a la izquierda? ___________
>
> Represente el número 50 768.

Este sistema de numeración es *híbrido*, es decir, funciona con una técnica aditivo-multiplicativa. Las operaciones implicadas para escribir 50 768 son las siguientes:

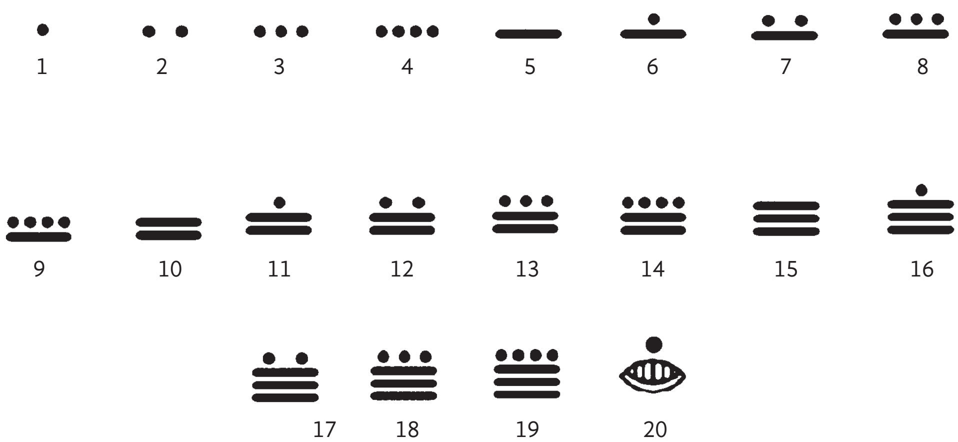
$$5 \text{ veces } 10\,000 + 7 \text{ veces } 100 + 6 \text{ veces } 10 + 8.$$

Los chinos utilizaban un tablero de cálculo con el que planteaban y trataban una gama de problemas aritméticos de ámbitos tan diversos como la agrimensura, la astronomía y el cálculo de impuestos. Además, establecieron métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y reglas para hacer operaciones con negativos, aun cuando éstos no eran concebidos todavía como números, tal y como los reconocemos ahora.

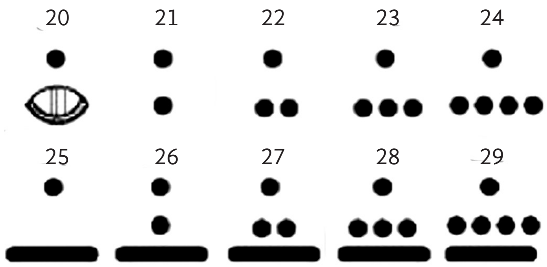
El sistema de numeración maya

La civilización maya habitó en lo que hoy es Guatemala, México, Belice y Honduras. Las fuentes más importantes de información sobre las matemáticas que desarrolló esta civilización corresponden al periodo clásico, que va del 250 al 900 d.C. Una de estas fuentes son las estelas, columnas que se construían cada veinte años y en las que se inscribían jeroglíficos. La construcción de las estelas se realizó durante cinco siglos para registrar acontecimientos importantes, así como los nombres de sacerdotes y nobles. También se ha obtenido información a partir de jeroglíficos en pinturas y en manuscritos. El Códice de Dresde es uno de los más importantes documentos de la civilización maya: se compone de 39 hojas escritas por ambos lados en las que se encuentran cálculos astronómicos, almanaques, tablas astrológicas y calendarios rituales.

Los mayas desarrollaron un sistema de numeración *posicional*, es decir, en el que la posición de los símbolos determina el valor que adquieren. La base de su sistema es vigesimal, aunque no es puro porque presenta una anomalía que analizaremos más adelante. Su sistema sólo requería de tres símbolos, por lo que es bastante económico: el punto para el 1, la raya para el 5 y el óvalo para el 0.



Los números siguientes se obtenían mediante un sistema posicional vertical.



Observe que para escribir el 20 anotaban un óvalo abajo (para indicar que en ese nivel no había ninguna unidad) y un punto en el nivel de arriba para indicar que en ese nivel sí había una unidad; es decir, en el nivel inferior están las unidades y en el que está inmediatamente arriba de éste se escriben los grupos de 20. El número 27, por ejemplo, se representa con un punto en los grupos de 20 y siete unidades en el nivel inferior.

Segundo nivel	× 20			
Primer nivel	× 1			
		32	360	254

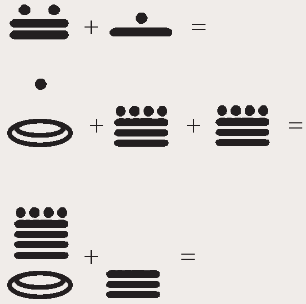
Algunos estudiosos afirman que el uso que hicieron los babilonios y los mayas del cero fue para indicar la ausencia de un número en cierta posición y con ello separar las cantidades sin ambigüedad y no para representar un número como tal.

Complete la siguiente tabla:

Segundo nivel	× 20					
Primer nivel	× 1					
		40		165		

Como se comentó, el sistema maya no es vigesimal puro y esto es debido a que en el tercer nivel se esperaría que un punto representara $20 \times 20 = 400$; sin embargo, para los mayas, ese nivel representaba $18 \times 20 = 360$. En los siguientes niveles vuelven a la multiplicación por 20: el cuarto nivel es $18 \times 20 \times 20$; el quinto nivel, $18 \times 20 \times 20 \times 20$. ¿Cuál es la razón de esta inconsistencia? Al parecer tenía que ver con los cálculos astronómicos, porque para realizarlos era necesario que en el tercer nivel se obtuviera el número 360, muy cercano a la duración del año maya.

Resuelva las siguientes sumas:



Hay quienes afirman que con este sistema de numeración la multiplicación y la división no son posibles debido a la anomalía en la base, otros piensan lo contrario (Fedriani y Tenorio, 2004). Lo cierto es que, si bien desconocemos sus procedimientos para efectuar operaciones, los mayas fueron capaces de hacer cálculos bastante precisos con su sistema de numeración.

El sistema de numeración hindú

El sistema de numeración decimal, tal y como lo conocemos ahora, con sus posibilidades para representar los números de forma escrita y los procedimientos para operar con esos números, tuvo sus orígenes en la India. Este sistema fue una creación que se dio mediante un largo proceso.

Un primer sistema escrito poco eficaz

Desde el siglo III a.C. se utilizaba una numeración escrita cuyas nueve primeras cifras dieron lugar, siglos después, a las del sistema actual, excepto el cero:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Esta manera de escribir —utilizada por los sabios hindúes durante varios siglos, y que también se empleaba en otros sistemas de numeración— es similar a un recurso que emplean los alumnos cuando están aprendiendo la escritura de los números: es común que, para designar el 7 629 escriban "7000600209".

Una característica de estos signos es que están desvinculados de la cantidad de objetos que representan: ya no se usan siete marcas, barras o puntos para designar siete objetos, sino una grafía convencional.[8] Para representar números más grandes se tenía una cifra para cada decena, cada centena, cada millar y cada decena de millar. Así, si se quería escribir 7 629, se debían unir los símbolos del "7 000", "600", "20" y "9":

7 000 600 20 9

[8] Ifrah, 1988, p. 63.

☞ Considere que los símbolos más grandes con los que se contaba eran los que designaban a las decenas de millar. ¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con este sistema?

____

Este sistema presentaba tres limitaciones importantes: a) las operaciones, incluso las sumas, resultaban demasiado largas y complicadas; b) la numeración escrita era muy diversificada porque cada cultura adaptaba las grafías a su propia escritura y entonces éstas variaban de región en región y de época en época, e incluso de escriba en escriba, lo que dificultaba su uso y evolución por las dificultades de interpretación y de fiabilidad; y finalmente, c) no se podían representar números grandes. Esta cuestión era importante porque en esa época los estudios astronómicos requerían dar cuenta de números muy elevados.[9]

El origen de los principios de base y posición

Las últimas dos dificultades se libraron a partir de una numeración oral que fue el germen de los principios de base y posición del sistema actual.

Se asignó un nombre a los primeros nueve números:

eka	*dvi*	*tri*	*catur*	*pañca*	*sat*	*sapta*	*asta*	*nava*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Y también a cada potencia de diez, es decir, a la decena, centena, etcétera.

10	*dasa*
100	*sata*
1 000	*sahasra*
10 000	*ayuta*
100 000	*laksa*
1 000 000	*prayuta*
10 000 000	*kaoti*
100 000 000	*vyarbuda*
1 000 000 000	*padma*
....	....

El resto de los números tenía nombres compuestos. Cabe aclarar que, a diferencia de nuestro sistema actual, se comenzaba nombrando las unidades, luego las decenas y así sucesivamente (pp. 64-65)*. De esta manera, se expresaban números tan grandes como:

124 406 456 768 230 826

[9] Ifrah, *ibid*.
* Las páginas entre paréntesis a lo largo de este capítulo corresponden a Ifrah (1988).

"sat, dvi dasa, asta sata, tri ayuta, dvi laksa, asta prayuta, sat koti, sapta vyarbuda, sat padma, pañca kharva, catur nikharva, sat mahapadma, catur samdra, catur madhya, dvi antya, eka pararddha".[10]

> En la siguiente escritura complete los nombres que faltan de dos maneras distintas, de forma que —aun siguiendo el orden ascendente de las unidades— se formen números diferentes:
>
> *catur, pañca* ____________, *eka* ______________, *nava* ____________, *pañca* ______________.
>
> *catur, pañca* ____________, *eka* ______________, *nava* ____________, *pañca* ______________.
>
> ¿Qué números formó? _________________ y _________________.

El cero se suele enseñar en libros de texto y de divulgación como un concepto que da cuenta del vacío, de la ausencia. Se dice, por ejemplo, "aquí no hay pingüinos, entonces hay 0". Esta acepción es un tanto ajena a la funcionalidad que le dio origen, a saber, la posibilidad de tener un nombre distinto para cada número.

Hasta este momento la posición no era fundamental: el tamaño de cada orden de unidades se mencionaba explícitamente. Pero hacia el siglo v, para abreviar, se eliminaron los nombres de las potencias de diez (dasa, sata, sahasra, etc.). Este cambio es drástico en dos sentidos: en primer lugar, los nombres de los primeros nueve dígitos tomaron un valor variable, dependiendo del lugar en que se encontraban.[11] En segundo lugar, piense en los dos números que formó en el párrafo anterior. Si se eliminan los nombres que completó, ¿cómo pueden distinguirse los dos números? Para evitar ambigüedades, es decir, para explicitar los casos en los que una potencia de diez no formaba parte del número fue necesaria la invención oral del cero: *śūnya* (pp. 65-68).

> El siguiente número todavía porta los nombres de las potencias de diez. Expréselo suprimiendo dichos nombres:
>
> "nava dasa, eka sata, catur laksa, dvi prayuta"

Cabe hacer ahora una pequeña digresión: para evitar repetir una palabra varias veces, los sabios hindúes —que eran también poetas— utilizaban sinónimos para cada uno de los nombres de los primeros nueve números y el cero. Veamos dos ejemplos:

Uno		**Cero**	
Eka		*sunya*	el vacío
Adi	el principio	*bindu*	el punto
Tanu	el cuerpo	*Kha gagana*	cielo
pitamaha	el primer padre	*ambara*	atmósfera

[10] Este sistema es más sintético que el anterior; mientras que en aquél se tenía un símbolo para el 10, otro para el 20, otro para el 30, etc., en el nuevo se tiene un solo nombre: *dasa*, que se compone con los de los dígitos para formar las demás decenas.

[11] En *tri dasa*, *dvi ayuta*, el "tri" no designa "tres decenas", sino "tres", lo que multiplicado por 10 es "dasa". En cambio, en *tri dvi*, el nombre "tri" sí representa "tres decenas".

Los sinónimos eran elegidos en función del efecto poético deseado y con ello se lograba fijar los números en la memoria y reducir las posibilidades de error —una equivocación en un verso rompe la rima y entonces es más fácilmente identificable— (pp. 68-72).

Un nuevo sistema escrito que incorpora los descubrimientos del sistema oral

El sistema oral permitía enunciar y conservar los números de manera muy eficiente, pero seguía teniendo una de las tres limitaciones del sistema antiguo: no se podían hacer cálculos aritméticos.

> A nadie se le podía ocurrir sumar flechas, vocales y planetas, ni multiplicar o sustraer océanos por orificios ni dividir los rostros de Brahman por los brazos de Vishnu (p. 73).

Como en muchas otras civilizaciones, los sabios hindúes sortearon las debilidades de los sistemas oral y escrito recurriendo al ábaco.[12] Pero los hindúes dieron un paso más: cambiaron las piedras del ábaco por las nueve cifras de la antigua escritura. Sobre arena fina marcaban columnas en las que representaban los dígitos necesarios para configurar un número, dejando vacíos los espacios que corresponden a las unidades de órdenes que no figuran en el número. Por ejemplo, 10 267 000 se representaba así:[13]

1 0 2 6 7 0 0 0

Este sistema derivado del ábaco dio pie a la puesta en juego de métodos de cálculo. Veamos, por ejemplo, cómo se hacía la multiplicación de 623 por 45:[14]

Sobre la arena se marcan cuatro columnas y se acomodan los dos números de modo que la cifra más alta del multiplicando (6) quede en la misma columna que la más baja del multiplicador (5).

	6	2	3
4	5		

▼	▼			
2	4	6	2	3
	4	5		

El segundo paso es multiplicar el 6 de arriba por las dos cifras del multiplicador. Primero por 4 y el resultado se coloca a la derecha del 6.[15]

---

[12] El ábaco tuvo un uso muy extendido en culturas y épocas diferentes: al tener sistemas de numeración que no permitían operar eficazmente, lograban hacer cálculos sorprendentes con el ábaco. Por ejemplo, los griegos calcularon "la cantidad de granos de arena que podría contener la 'esfera del mundo' (es decir, la esfera cuyo diámetro es la distancia de la Tierra a las estrellas fijas) [y encontraron] un número aproximadamente igual al que expresaríamos, en nuestro sistema actual, con un '1' seguido de sesenta y cuatro ceros" (Ifrah, p. 62). Véase también Pastor y Babini I, 1997.

[13] Tomado de Ifrah, p. 74.

[14] Tomado de Ifrah, pp. 75-77.

[15] Este paso puede explicarse porque al multiplicar centenas por decenas se obtienen unidades de millar.

	▼+3	▼		
2	4		2	3
	4	5		

Luego 6 por 5. Al obtener 30 queda vacío el lugar de las centenas y el 3 se suma al 4.[16]

2	7		2	3
		4	5	

En el tercer paso, se recorren las cifras del multiplicador un lugar a la derecha.[17]

En el cuarto paso se multiplica el 2 de arriba por las dos cifras del 45, de manera análoga a como se hizo en el segundo paso.

		▼		
2	7	8	2	3
		4	5	

		▼+1		
2	7	8		3
		4	5	

En el quinto paso se recorren nuevamente las cifras del 45 un lugar a la derecha.

2	7	9		3
			4	5

Y finalmente, se multiplica el 3 de arriba por las dos cifras del 45. Al multiplicar 3 por 4 se obtienen 12, por ello se marca un 2 en el lugar de las decenas y se agrega un 1 a las 9 centenas. Son entonces 10 centenas, es decir, 1 unidad de millar:

		▼+1	▼	
2	7	9	2	3
			4	5

	▼+1	▼		
2	7		2	3
			4	5

		▼	▼	
2	8		3	5
			4	5

El resultado es 28 035, que todavía no era claramente concebido como número, tal y como ahora lo pensamos. Sería más acorde con la época decir que el resultado es "cinco, tres decenas, ocho unidades de millar, dos decenas de millar". Cabe recordar que todos los pasos se hacen sobre el mismo registro de columnas. Es decir, que cada vez que un dígito se cambia por otro, se borra y en su lugar se escribe el nuevo.

Este procedimiento, bastante largo y cansado, no era accesible para todos: si alguien necesitaba calcular, por ejemplo, el salario que le debían después de cierta cantidad de días de trabajo tenía que acudir con un calculista profesional.

Fue en este punto donde se dio un paso fundamental: la invención gráfica del cero. Recordemos que en la escritura derivada del ábaco que vimos en el procedimiento anterior, el cero no existía todavía. Los nueve dígitos tenían un valor fijo y lo que determinaba el tamaño de las unidades era la columna en la que se ubicaba cada dígito. Por otro

[16] Seis centenas por cinco unidades son 30 centenas, es decir, cero centenas y tres unidades de millar que se agregan a las que se obtuvieron en el cálculo anterior.

[17] Esto es porque ahora el 45 se va a multiplicar por la cifra dos del 623.

lado, en la numeración oral el cero sí se designaba: al no mencionar los nombres de las unidades, se utilizaban palabras como "vacío" para establecer que determinado orden de unidades no configuraba cierta cantidad. La conjunción de estos dos registros, el gráfico y el oral, provocó el abandono de las columnas: los dígitos adquirieron un valor variable según su posición y se le atribuyó un signo gráfico —un punto, representación del vacío, y luego un redondel— a la ausencia de unidades de determinado orden. La concretización del sistema posicional respetó el orden del ábaco, no el oral: las unidades aparecían en orden decreciente, de izquierda a derecha.

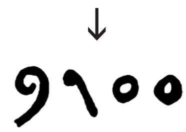
En suma, la síntesis de la numeración oral y la escrita[18] dio lugar al sistema posicional como lo conocemos hoy. Para el número 9 100 (pp. 78-79):

Tradición oral

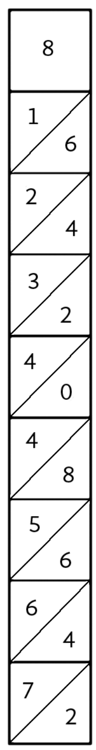
"Atmósfera, vacío, luna, orificios."
(cero cero uno nueve)

Registro escrito en arena

9	1		



Un sistema potente para hacer operaciones

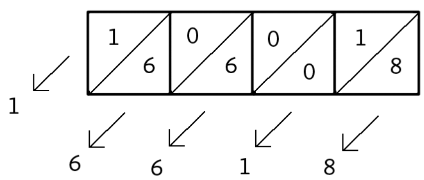


La creación del cero y el abandono del ábaco favorecieron progresos notorios: poco a poco se sintetizaron y simplificaron los procedimientos de cálculo. Veamos el algoritmo llamado "por cuadrículas" que se utilizaba para multiplicar a partir del siglo v.[19]

Hay distintas variantes de dicho algoritmo; mostraremos la que fue utilizada en Escocia en los siglos XVI y XVII.[20] Para cada uno de los nueve dígitos se utilizaba una varilla que registraba la tabla de multiplicar como la que aparece a la derecha. Para hacer, por ejemplo, la multiplicación de 8 309 por 342 se necesitan las varillas con las tablas del 8, 3, 0 y 9 y una quinta varilla con los dígitos del 1 al 9, como muestra la figura de la página siguiente.

La multiplicación se realiza de la siguiente manera:

Para obtener 8 309 por 2, se suman los términos de la segunda fila, en diagonal, y los resultados se acomodan uno por uno, empezando por la izquierda:



El resultado es 16 618.

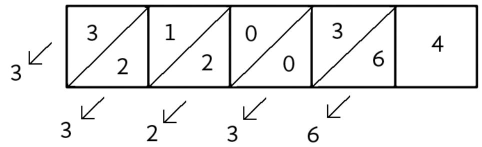
[18] Es decir, el uso de los nueve dígitos del sistema gráfico y de los principios de posición y el cero del sistema oral.

[19] Algunos historiadores atribuyen este algoritmo a Napier, un escocés del siglo XVI que publicó tratados sobre teología y matemáticas (Colette, 1985, pp. 301-304). Ifrah (1988), en cambio, argumenta que el algoritmo fue creado por los sabios hindúes alrededor del siglo v, de ahí fue transmitido a los árabes y después a los europeos, quienes lo llamaron el "algoritmo de las celosías".

[20] Tomada de Colette, 1985, pp. 302-303.

8	3	0	9	1
1/6	0/6	0/0	1/8	2
2/4	0/9	0/0	2/7	3
3/2	1/2	0/0	3/6	4
4/0	1/5	0/0	4/5	5
4/8	1/8	0/0	5/4	6
5/6	2/1	0/0	6/3	7
6/4	2/4	0/0	7/2	8
7/2	2/7	0/0	8/1	9

De manera similar, se obtiene 8 309 por 4:



El resultado es 33 236.

Y 8 309 por 3 es 24 927.

Ahora, es necesario sumar los tres resultados parciales, tomando en cuenta la posición:

		1	6	6	1	8
	3	3	2	3	6	
2	4	9	2	7		
2	8	4	1	6	7	8

Realice las siguientes multiplicaciones con el algoritmo anterior:

547 × 1 825 7 033 × 4 032

Al terminar, haga las mismas multiplicaciones con el algoritmo actual y también con el procedimiento derivado del ábaco que describimos anteriormente (utilizando papel y lápiz en lugar de arena y borrador para sustituir cifras por otras en varios pasos). ¿En qué se parecen y en qué se distinguen las tres maneras de resolver?

El algoritmo de las cuadrículas parece más largo que el que empleamos hoy, no obstante, tiene un par de ventajas: no se impone ningún orden en la realización de cálculos parciales, no es necesario saberse las tablas de multiplicar y, además, las llevadas se hacen en el último paso, mientras que en el algoritmo actual se hacen desde el inicio.[21] Por otro lado, respecto a los métodos de cálculo anteriores, representa un avance considerable: permite rastrear los errores e implica una reducción importante de los cálculos. Constituye uno de los antecedentes de nuestros algoritmos actuales.

En definitiva, conferirle al cero el estatuto de número permitió el desarrollo de procedimientos de cálculo de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, y más aún, dio origen a la construcción de ideas y herramientas que se erigieron en germinales de lo que hoy conocemos como los números negativos y el álgebra (Ifrah, 1988).

[21] Estas ventajas, y otras con respecto a métodos de cálculo anteriores e incluso a otros sistemas de numeración un poco menos complejos, como el chino, han sido señaladas por Sierra, 2006.

Brousseau (1973, 1985 en Sierra, 2006, p. 106) argumenta que, en un proceso de aprendizaje, puede ser pertinente que los alumnos conozcan el algoritmo de “cuadrículas” o “celosías” antes del convencional, dado que el primero puede ser más accesible para ellos. Hay otro algoritmo que también es valorado en la enseñanza, denominado “de doble entrada”.
Con este procedimiento, la multiplicación de 345 por 27 se hace así:

	300	40	5
20	6 000	800	100
7	2 100	280	35

Y simplemente se suman los resultados parciales.

Actualmente se considera que, para los alumnos, el sentido de los algoritmos es similar al que han tenido en la historia: el de ahorrar procedimientos de cálculo más sencillos pero también más largos y cansados. Si bien no se trata de enseñarles siguiendo el proceso histórico tal cual, sí es importante que tengan a disposición una variedad de procedimientos de resolución, desde los que ellos pongan en juego por sí mismos, pero que probablemente tienen un uso restringido, hasta los algoritmos convencionales que tienen mayor amplitud de uso pero son más complejos.

Comparación de los distintos sistemas

Una vez revisadas las características de estos sistemas de numeración, podemos aventurar algunas hipótesis acerca de por qué el sistema decimal que utilizamos se impuso sobre otros sistemas.

Pensemos, en primer lugar, en lo respectivo a la representación escrita. De acuerdo con Ermel (1977, cit. en Sierra, 2006), un sistema de numeración se preferirá sobre otro cuando la escritura de un número:

a) Requiera menos símbolos, de modo que sea fácil memorizarlos y la longitud de las escrituras no haga difícil su lectura.
b) Se haga de manera unívoca, es decir, que no haya dos escrituras diferentes para un mismo número ni una misma escritura para dos números distintos.
c) Permita el ordenamiento del modo más simple posible.

En cuanto a las operaciones básicas se preferirá un sistema sobre otro si:

d) La realización de sumas y restas, así como multiplicaciones y divisiones, es más económica y confiable.

Haga un ejercicio de comparación de los sistemas considerando estos criterios de la siguiente manera:

a) ¿Cuál requiere de menos símbolos?
Escriba el número 3 903 en sistema:

Egipcio______________ Romano______________ Chino______________ Maya______________

En el sistema decimal, los números 111 y 999 tienen tres dígitos. Escriba estos dos números en los otros tres sistemas en los que la base es diez: ¿se requiere en ambos la misma cantidad de dígitos?

	Egipcio	Romano	Chino
111			
999			

El sistema chino tiene las mismas características que el sistema oral que se desarrolló en la India antes del uso del ábaco con las grafías de los dígitos. Invente una manera de escribir el siguiente número de manera que tenga las mismas abreviaciones que se lograron con la escritura oral del sistema hindú:[22]

七千八百三

b) ¿La escritura es unívoca?
Escriba cada número en el sistema que se pide. Si en algún caso considera que no se puede, explique por qué:

15 003 916 en egipcio: ____

600 000 en romano: ____

100 000 en chino: ____

128 000 103 en maya: ____

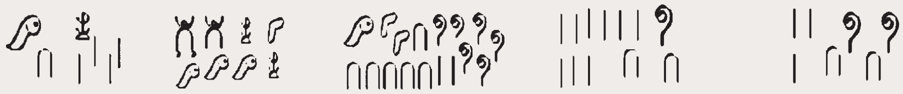
Observe que en algunos sistemas cada vez que se llega a un cierto número es necesario inventar un símbolo nuevo. ¿En cuál no sucede esto? ______________________________

En una etapa del desarrollo del sistema decimal de numeración —el hindú—, la escritura no era unívoca, es decir, había varias escrituras posibles para un mismo número. ¿Cuál fue esa etapa?
____

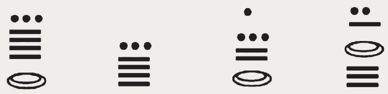
c) ¿Cómo se comparan distintos números?
Para cada sistema, ordene la serie de números correspondiente, de menor a mayor, sin traducirlos al sistema decimal, excepto en el último caso:

[22] En lugar de escribir el número de arriba hacia abajo, lo hacemos de izquierda a derecha.

Sistema egipcio:



Sistema maya:



Sistema romano: CCCXXXIII CDLV M DXLIV

Sistema hindú: 1 430 027 9 999 46 031 45 873 71 924

Sistema chino: 九万 一千四百八十九

二千九百 三千九百

¿En qué sistemas los números más grandes son los que requieren más símbolos y los más pequeños, menos?

Observe que en el sistema decimal el tamaño de la escritura de un número depende del tamaño del propio número. Así, para comparar dos números basta con ver la cantidad de dígitos de cada número. Si uno tiene más, ése es el número mayor. Si son iguales, se compara el primer dígito y el que es mayor corresponde al número mayor. Si son iguales, se compara el segundo dígito, y así sucesivamente. En el sistema maya, la comparación es análoga.

d) ¿Qué tan eficientes son los algoritmos de cálculo?
En cada uno de los sistemas, escriba el número 99. Después, sin usar las reglas de nuestro sistema, multiplique el número por 10. ¿Qué sucede en cada caso?

Haga la multiplicación de 643 por 22 usando cada uno de los siguientes métodos:
- El algoritmo de duplicación-mediación egipcio.
- La técnica romana que utiliza el ábaco.
- La técnica del sistema hindú que parte del ábaco pero con el uso de signos numéricos.
- El algoritmo de cuadrículas hindú.
- El algoritmo convencional actual.

¿Alguno es demasiado largo? ¿En alguno hay más riesgo de cometer errores?

A manera de reflexión final, responda las siguientes preguntas:
- En los sistemas revisados en este apartado, ¿encontró algunos que se parecen?, ¿cuáles?, ¿en qué?
- ¿Cuál sistema considera que es el menos económico en cuanto a la representación escrita? ¿Y en cuanto a los cálculos?

Nos parece pertinente hacer una última aclaración: si bien los criterios que hemos descrito parecen "lógicos" para entender por qué el sistema decimal es el que se utiliza en la ciencia y la tecnología, y el que buena parte de la población mundial aprende y emplea, es cierto que no es el único sistema en uso en la actualidad. Desde sus orígenes, un sistema de numeración está estrechamente ligado a la vida de las personas, se desarrolla en función de las necesidades que surgen respecto a su organización social como la medición, el ordenamiento y la contabilidad. De esta manera, un sistema más "precario" que el decimal puede ser útil para determinada población, en la medida en que se adecue a sus necesidades específicas o sea accesible para quienes no son calculistas expertos.[23] El abandono de determinado sistema de numeración por otro no sólo depende de su mayor funcionalidad, también de la forma de interacción entre diferentes poblaciones.

FRACCIONES

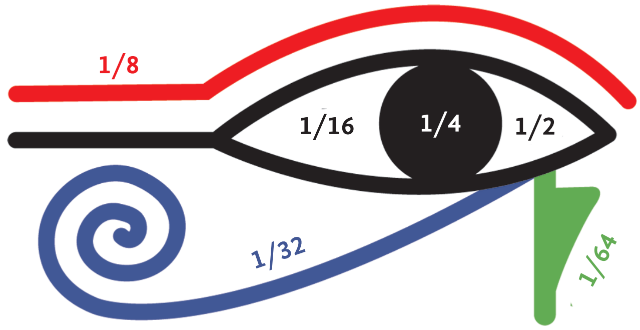
Las actividades humanas dieron lugar a la necesidad de tener números para contar y también números para medir. Para contar tenemos los números naturales (como 1, 2, 67, 1 232, etc.) y para medir tenemos las fracciones, que son números que nos permiten representar cantidades no enteras.

En este apartado se visitan algunos momentos en la historia del desarrollo de los números racionales en el antiguo Egipto, en la Grecia clásica y en Europa durante los siglos XVI al XVIII. A partir de algunos hechos específicos o desarrollos matemáticos de la época, se estudian cuestiones relativas a las fracciones como la equivalencia, las operaciones, los repartos y la medición.

Fracciones en Egipto

"Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios." Éste es el encabezado de un papiro sobre matemáticas del antiguo Egipto al que se le conoce como el Papiro de Rhind —apellido del coleccionista que lo adquirió— o Papiro de Ahmes —escriba y autor del mismo—. Data del año 1650 a.C. y está compuesto de problemas matemáticos dirigidos principalmente a enseñar a los escribas tareas de contabilidad propias de su oficio, entre las que se encontraban repartos de pan y cerveza, mezclas de comida para ganado y almacenamiento de granos, razón por la que incluían sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números enteros y fracciones, potencias, raíces cuadradas, algunas ecuaciones, cálculo de áreas y volúmenes.

[23] Por ejemplo, el sistema de numeración griego era bastante rudimentario y si no se desarrolló no fue por falta de genialidad de los sabios griegos, sino porque no lo necesitaban: no les interesaban demasiado las cuestiones de orden práctico (Ifrah, 1988).

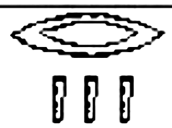
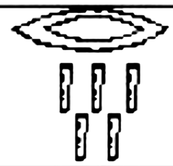


Cuenta la historia que el malvado dios Seth mató a su hermano Osiris. Años más tarde, Horus, el hijo de Osiris, se enfrentó a su tío Seth para vengar a su padre. En dicha batalla, el ojo izquierdo de Horus fue seccionado en partes de distinto tamaño que fueron asociadas a fracciones unitarias conocidas como *Fracciones del ojo de Horus*. La parte izquierda de la pupila equivale a 1/2, la pupila a 1/4, las cejas a 1/8, la parte derecha del ojo a 1/16, la parte inferior vertical bajo el ojo a 1/32 y la parte inferior diagonal del ojo a 1/64. Estas fracciones se usaban principalmente para medir el trigo y la cebada empleando como unidad de medida el *heqat*, que es una unidad de capacidad y equivale a unos 4.8 litros.

Los egipcios desarrollaron un sistema para escribir éstas y otras fracciones mediante un símbolo especial: una especie de círculo encima del número. Por ejemplo, éstos son los números 3, 5 y 249.

		
3	5	249

Y añadiendo a esos números el símbolo circular representaban las fracciones 1/3, 1/5 y 1/249.

		
1/3	1/5	1/249

El uso de fracciones es uno de los rasgos más distintivos de la matemática egipcia, especialmente porque, salvo pocas excepciones, las fracciones egipcias tenían siempre como numerador uno, es decir, eran fracciones unitarias (por ejemplo, 1/2, 1/13, 1/25, etc.). Una fracción como 3/4 no podía escribirse con numerador tres ni mediante una suma de fracciones iguales, o sea, 1/4 + 1/4 + 1/4. ¿Cómo las representaban entonces? Observe estos dos casos: 3/4 y 19/20.

$$3/4 = 1/2 + 1/4$$
$$19/20 = 1/2 + 1/4 + 1/5$$

Las fracciones con numerador distinto de uno se expresaban mediante sumas de fracciones con numerador uno, pero los sumandos siempre tenían que ser diferentes.

Represente las siguientes fracciones como una suma de fracciones unitarias. Recuerde que no puede haber sumandos iguales.

6/8 ______________________________

4/5 ______________________________

5/6 ______________________________

8/15 ______________________________

11/12 ______________________________

Como imaginará, usando ese sistema las representaciones no son únicas; por ejemplo, 19/20 también se escribiría como 1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/180; sin embargo, no sería la que hubieran empleado los egipcios.

¿Cuál era la más adecuada para ellos? A partir de estudios sobre las matemáticas egipcias, se han establecido criterios que han orientado a los matemáticos y escribas para decidir cuáles representaciones eran adecuadas.

- De todas las representaciones posibles, se aceptan aquellas que poseen el menor número de fracciones. Ninguna representación debe tener más de cuatro fracciones ni un denominador mayor de 1 000.
- Las fracciones se colocan por orden decreciente sin que se repitan nunca.
- La primera fracción será aquella con el menor denominador posible, pero se aceptará una fracción que tenga un denominador ligeramente superior si ésta permite reducir considerablemente el denominador de la última fracción.
- Las fracciones con denominadores pares se prefieren a las impares.

Evidentemente, el problema para los escribas era encontrar estas representaciones. El Papiro de Ahmes incluye una tabla en la que se representan todas las fracciones con numerador dos y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias.

La tabla en la p. 70 es una reproducción de la escrita por Ahmes en la que se muestran fracciones con numerador 2 y denominador n, y las fracciones unitarias cuya suma da $2/n$.

Lógicamente, en la tabla antes mencionada se eliminan las descomposiciones en las que el denominador es par. Explique por qué y ponga un ejemplo.

____

____

____

____

Fracción	Representación
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$
$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$
$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$
$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{231}$
$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$
$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$
$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$
$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$
$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$
$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$
$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$

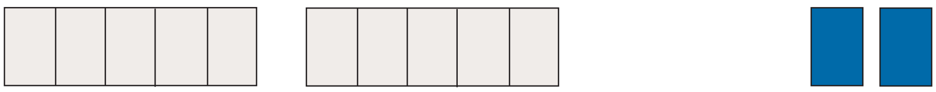
Fracción	Representación
$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$
$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$
$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$
$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$
$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$
$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$
$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$
$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$
$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$
$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$
$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$
$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$
$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$
$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$
$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$

Muchos estudiosos de las matemáticas egipcias se han preguntado por qué sólo utilizaban fracciones unitarias, elección que sin duda hace más complicada la representación y las operaciones con fracciones. Una explicación es que las fracciones surgen como una necesidad práctica al hacer repartos igualitarios en situaciones de la vida diaria, de esta manera, las fracciones egipcias son una suma de resultados parciales al efectuar un reparto en fases sucesivas. Por ejemplo:[24]

> *Repartir dos pasteles entre cinco personas de manera que no sobre nada y a todos les toque la misma cantidad. ¿Cuánto le tocaría a cada quien?*

Una primera idea para hacer el reparto sería dividir cada pastel en cinco partes iguales y darle dos a cada persona, con lo que tendríamos 2 ÷ 5 = 1/5 + 1/5.

Técnica de reparto　　　　Resultado del reparto



Pero los egipcios no hacían así los repartos, ellos trataban de hacer la primera división en una parte lo más grande posible y el resto seguían dividiéndolo en varias fases por aproximaciones sucesivas. Habrían hecho algo como: *a cada persona le tocará menos de un pastel completo; entonces podemos dividir cada pastel en dos partes iguales, pero tendríamos sólo cuatro partes y no alcanzan para las cinco personas. Entonces dividimos cada pastel en tres partes iguales, con lo que tenemos seis partes, le damos una a cada una de las cinco personas y sobra una de esas partes. La parte sobrante se divide en cinco partes iguales, se le entrega una de esas partes a cada persona y el reparto estará terminado.*

Técnica de reparto　　　　Resultado del reparto

El reparto quedaría $2 \div 5 = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

Observe que la primera división del entero(s) es en la mayor parte posible, luego el sobrante también se divide en la mayor parte posible, etc., razón por la cual las fracciones egipcias siempre quedaban escritas en orden decreciente.

[24] Tomado de Gairín, José (2001).

Realice los siguientes repartos como lo harían los egipcios.

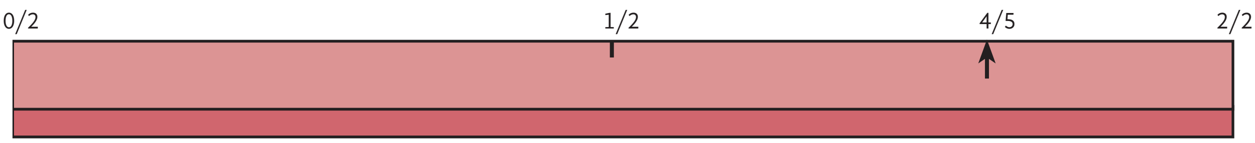
3 pasteles entre 5 personas. A cada quien le toca ____________________

2 pasteles entre 7 personas. A cada quien le toca ____________________

4 pasteles entre 9 personas. A cada quien le toca _____________________

La representación de fracciones mediante el sistema egipcio también se entiende mediante la recta numérica.[25] Observe:

Ya sabemos que al repartir 4 pasteles entre 5 personas, el resultado será 4/5, así que ubicamos esa fracción en la recta.



Regla 1/2

Ahora emplearemos una regla: dividir la recta en 2, 3, 4… *n* partes en ese orden, de manera que para la fracción a/b (que es la que se obtiene como resultado del reparto) se cumpla que $1/n < a/b < 2/n$.

Se trata de empezar repartiendo la mayor parte posible siempre y cuando se cumpla la condición. En este caso, se hace la primera división en medios. ¿Se cumple que $1/2 < 4/5 < 2/2$? Sí, por lo que la fracción 1/2 será parte de los términos de la suma.

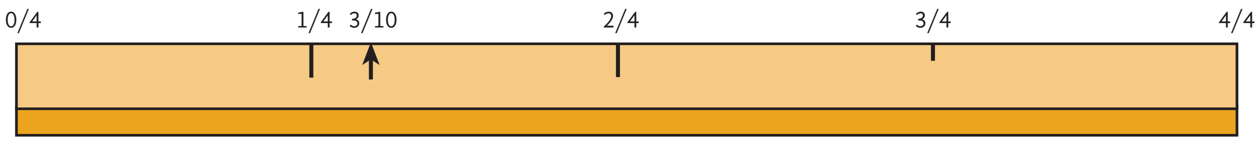
Continuamos con la fracción $4/5 - 1/2 = 3/10$. Localizamos 3/10 en la recta y procedemos a la siguiente división, ahora en tercios. ¿Se cumple que $1/3 < 3/10 < 2/3$? No se cumple, por lo tanto 1/3 no será un término de la suma.

[25] Tomado de López (2008).

Seguimos dividiendo, ahora en cuartos.

Regla 1/3

¿Se cumple que 1/4 < 3/10 < 2/4? Sí se cumple, por lo tanto, 1/4 será un término de la suma. Ahora seguimos con la fracción 3/10 – 1/4 = 1/20. Como 1/20 es una fracción unitaria, el reparto está completo. Tenemos entonces que 4/5 expresada mediante fracciones egipcias es 1/2 + 1/4 + 1/20.



Regla 1/4

Utilizando este procedimiento, exprese 5/12 mediante fracciones egipcias.

Fracciones en la vida de Diofanto

La *Antología palatina* es una colección de más de 3 700 composiciones poéticas de muy diversa índole, compilada en el siglo X en Constantinopla por Constantino Céfala. Se le llama palatina porque la única copia manuscrita que se conoció por mucho tiempo pertenecía a la biblioteca del Palatinado en Heidelberg, Alemania.

Los quince libros que la componen fueron objeto de intrigas, robos y restauraciones durante siglos; no obstante, se conservan 22 acertijos de temas matemáticos que se atribuyen a Metrodoro de Bizancio (siglo IV d.C.). En uno de ellos se menciona al matemático Diofanto de Alejandría, quien vivió en el siglo III d.C.:

> En esta tumba reposa Diofanto. La maravilla es que la tumba cuenta ingeniosamente la duración de su vida. Dios le concedió ser un niño durante una sexta parte de su vida. Añadió una doceava parte antes de vestir sus mejillas con vello. Le encendió la llama del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le concedió un hijo. ¡Ay, desdichado niño tardío! Tras alcanzar la medida de la mitad de la vida de su padre, la Parca helada se lo llevó. Y, tras consolar su herida con la ciencia de los números durante cuatro años, acabó su vida (problema 126).

En la *Antología palatina* no hay más que este enunciado; pero, con las herramientas matemáticas actuales, podemos plantearlo mediante una ecuación.

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+5+4=x$$

En la época y lugar en la que se escribió este problema no habrían hecho tal planteamiento ni lo resolverían algebraicamente operando con la incógnita. ¿De qué manera se solucionaría? Observe lo siguiente: todas las fracciones de la ecuación tienen un numerador desconocido (la incógnita), pero se conocen todos los denominadores.

> Encuentre un denominador común a esas fracciones y escriba la ecuación utilizándolo. Sume las fracciones obtenidas.

Observe que la diferencia entre la suma de las fracciones y el denominador común es precisamente el 9 (obtenido de 5 + 4).

$$\frac{75}{84}x + 9 = x$$

> ¿Cuál es la solución al acertijo?

Fracciones y los sistemas de medida

Babilonios, egipcios, chinos y griegos inventaron formas de representar y operar cantidades menores que la unidad. Sus características dependían de los sistemas de numeración que habían desarrollado para los naturales (específicamente la base,[26] posición y el uso del cero); mientras los chinos y egipcios tuvieron una base decimal, los babilonios y griegos utilizaron una sexagesimal.

El cálculo con fracciones sexagesimales[27] alcanzó un desarrollo muy importante; su empleo se generalizó y se mantuvo durante siglos en la astronomía y en algunas áreas de las matemáticas, como la trigonometría. Aunque algunos matemáticos ya habían utilizado una base decimal para expresar cantidades no enteras, se considera que Simon Stevin fue quien las difundió de forma importante.

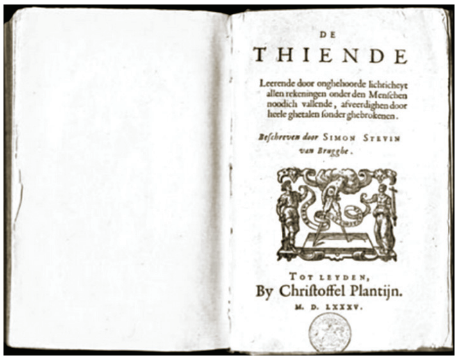
Stevin nació en Brujas, Bélgica en 1548. Como otros personajes renacentistas, incursionó en diversos ámbitos trabajando como contador, ingeniero y en las fuerzas militares. Publicó textos sobre geometría, aritmética, álgebra, física, ingeniería, navegación, defensa militar, filología,

Simon Stevin | © Latin Stock México.

[26] La base se refiere a la potencia que se utiliza para la numeración. El sistema que utilizamos es decimal o de base 10 porque en él se hacen agrupaciones de 10 (10 unidades es una decena, 10 decenas una centena, etcétera).

[27] En las fracciones decimales, la primera división de la unidad es en 10 partes (10^{-1}), la segunda es en 100 (10^{-2}), la tercera en 1 000 (10^{-3}), etc.; así que el número 0.125 o 125/1000 es la suma de 1/10 + 20/100 + 5/1000. En las fracciones sexagesimales, la primera división de la unidad es en 60 partes (60^{-1}), la segunda en 3 600 partes (60^{-2}), la tercera en 216 000 partes (60^{-3}) y así sucesivamente; el número 0.125 en base decimal sería 7/60 + 30/3600.

astronomía y política. Además de distinguirse por esta diversidad, Stevin fue un entusiasta divulgador de la ciencia. Mientras las instituciones comerciales guardaban celosamente tablas de interés simple y compuesto en una época en la que operaciones como la multiplicación y la división estaban fuera del alcance de la mayoría de las personas, Stevin las publicó incluyendo ejercicios prácticos. Su trabajo con los números decimales también fue inspirado por la idea de difundir un método práctico para el cálculo.



The Thiende (1585) es un manual dirigido a astrónomos, agrimensores, tapiceros, vinateros, geómetras, banqueros y todo tipo de mercaderes, para que simplificaran las operaciones aritméticas usando decimales en vez de fracciones. En la primera parte del libro, Stevin define los números decimales y propone cuatro maneras de representarlos, en las cuales aún conserva una fuerte influencia de la notación sexagesimal:

8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③ [= 8,937]

⓪ ① ② ③
5 7 8 9 [= 5,789]

732 ② [= 7,32]

5 ② 4 ⑤ [= 0,05004]

Los números en los círculos indican la posición: el cero se pone a la parte entera e indica el comienzo de las divisiones decimales, el 1 "primera" —o sea, la razón 1/10—, el 2 "segunda" —o sea la razón 1/100—, y así sucesivamente.

En la segunda parte del libro se estudian las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y raíces). El resultado en esta suma se leería hoy como 30 enteros, dos décimas, siete centésimas y seis milésimas.

	⓪	①	②	③
2	3	4	7	1
	6	8	0	5
3	0	2	7	6

Por último, Stevin presenta en un apéndice problemas prácticos de aplicación para los decimales.

La representación de los números decimales que utilizamos actualmente, en la que un punto o una coma[28] separan la parte entera de la no entera, fue propuesta por John Napier en 1617.

[28] Si bien en México hemos usado el punto decimal, de manera oficial el Sistema General de Unidades de Medida (NOM-008-SCFI-2002) indica el uso de la coma decimal.

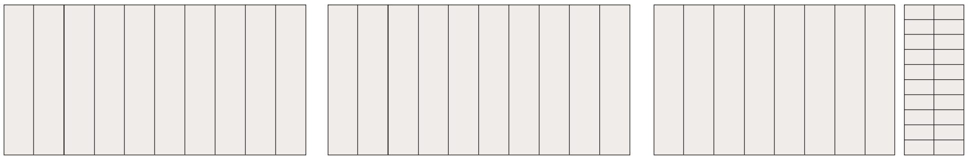
$$\frac{25}{10} = 2\underline{5} = 2.5$$

$$\frac{324}{100} = 3\underline{24} = 3.24$$

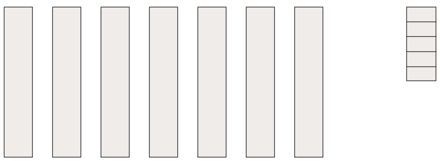
$$\frac{3}{100} = \underline{03} = 0.03$$

Como vimos, las fracciones egipcias se expresaban mediante la suma de fracciones unitarias, todas distintas y en orden decreciente. En un intento de comparación, para hacer el siguiente reparto considere que cada división puede hacerse solamente en un número de partes igual a 10, 100, 1 000 o cualquier potencia de 10. Si se repartieran 3 pasteles entre 4 personas:

Técnica del reparto



Resultado del reparto



El reparto quedaría $3 \div 4 = \ 3 \div 4 = \frac{7}{10} + \frac{\frac{20}{100}}{4} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$.

Si este reparto se hubiera hecho con fracciones egipcias, se obtendría: $3 \div 4 = 1/2 + 1/4$.

Si los dos repartos son correctos, entonces $1/2 + 1/4 = 7/10 + 5/100$.

¿Es correcta esta igualdad? ________________.

Si esto es verdadero, entonces $3/4 = 75/100$.

Realice los siguientes repartos utilizando este procedimiento.

3 pasteles entre 5 personas.

A cada quien le toca ____________________________

$3/5 =$ ___________

5 pasteles entre 20 personas.

A cada quien le toca ___________________________

5/10 = ___________

7 pasteles entre 20 personas.

A cada quien le toca ____________________________

7/20 = ____________

32 pasteles entre 50 personas.

A cada quien le toca ___________________________

32/50 = _____________

Aunque la utilización de los números decimales facilitaba el cálculo, Stevin también planteó la necesidad de unificar los sistemas de medidas.

Según Josefo (cit. en Kula, 1980), además de dar muerte a Abel, Caín cometió otro acto abominable: inventar pesas y medidas. Esa invención transformó hechos cotidianos que hasta entonces se vivían con naturalidad en terreno para múltiples estafas.

Sea o no cierto que a Caín se deba el uso de ciertas unidades de medida, las medidas antiguas tenían significado en la vida de las personas, es decir, las magnitudes consideradas y las unidades empleadas respondían a realidades sociales. Por ejemplo, durante mucho tiempo se midió la tierra por el *tiempo de trabajo* necesario para que rindiera frutos y en ese parámetro se consideraban muchas otras características del terreno (plano, inclinado, rocoso, fértil, etc.) y no sólo su extensión. Otras magnitudes, como la longitud, se medían con unidades distintas dependiendo del objeto a medir: "el *pie* para distanciar las plantas de patatas, el *paso* para la longitud, el *codo* para las telas, jamás para maderas, que se medían en *varas*" (Moszynski, cit. en Kula, 1980, p. 5). Las magnitudes y las unidades para medirlas fueron cambiando conforme se iban produciendo transformaciones sociales.

En muchas de las magnitudes, las unidades de medida tenían múltiplos duodecimales o vigesimales, mientras que casi todas las subunidades eran divididas en mitades y algunas veces en tercios. Es decir, que las subunidades cabían un número exacto de veces en las unidades mayores. Un pie es la tercera parte de una yarda. Una pulgada, la doceava parte de un pie.

Algunas magnitudes tuvieron muchas subunidades, por ejemplo, en una encuesta que realizó la Academia de Ciencias en 1791, la localidad de Lunéville (Francia) manifestó que para medir áridos (frutos secos, legumbres, arena, etc.) utilizaban el *resal*, que consta de ocho unidades llamadas *boichot*, que se dividen en seis *pots*, que se dividen en

Complete: 1 pie = __________ pulgadas

1 pulgada = __________ yardas

1 yarda = __________ pulgadas

1 yarda = __________ pies

dos *pintes*, éstos en dos *chopines*, la *chopine* en dos *setiers*, y éste en tres *verres* (Kula, 1980). El manejo de tantas subunidades con divisores distintos debió entrañar mucha dificultad, confusiones y estafas en el comercio.

El uso generalizado de los números decimales se fue dando paulatinamente de la mano de grandes cambios sociales. Con la Revolución francesa (1789), se propuso una unidad que tendría que usarse en todo el país para medir la longitud y así dejar atrás los problemas comerciales que ocurrían al usar dos o más unidades distintas. Se pensó en crear una nueva unidad que ya no estuviera ligada al cuerpo humano (como el codo o el pie) sino a la Tierra, así que enviaron a varios equipos a medir cuidadosamente la distancia entre dos puntos (Barcelona y Dunkerque) y determinar un arco de meridiano. Con tal medida se infirió la del meridiano y esa longitud, dividida entre 40 millones, fue llamada metro.[29]

En un discurso dado en la Escuela Normal Superior de París en 1794, Laplace, astrónomo, matemático y profesor de dicha institución, dijo:

> Interrumpo hoy el orden de las lecciones de matemáticas para hablar del sistema de pesas y medidas que acaba de ser definitivamente decretado por la Convención Nacional. Uno de los objetos más útiles de los que se ocuparán cuando vuelvan a sus provincias será el hacer conocer a sus conciudadanos, y especialmente a los maestros de las escuelas primarias, este beneficio de las ciencias y de la revolución. Lo voy a exponer aquí en detalle debido a su importancia. Es inimaginable el número prodigioso de medidas en uso, no solamente en los distintos pueblos, sino en una misma nación: sus divisiones curiosas e incómodas para los cálculos; la dificultad de conocerlas y compararlas; en fin, los apuros y los fraudes que de ello se deducen en el comercio. Uno de los mayores servicios que las ciencias y los gobiernos podrían hacer a la humanidad es, por tanto, la adopción de un sistema métrico cuyas divisiones uniformes se presten lo más fácilmente posible al cálculo, y que se obtenga de la manera menos arbitraria posible de una medida fundamental, indicada por la misma naturaleza. El pueblo en que se diera un sistema semejante de medidas uniría a la ventaja de recoger él los primeros frutos, la de ver su ejemplo seguido por los otros pueblos, de los que se convertiría así en bienhechor puesto que el imperio lento, pero irresistible de la razón, vence a la larga las envidias nacionales y todos los obstáculos que se oponen al bien de una utilidad, generalmente sentida por todos. […]
>
> Tal es el nuevo sistema de pesas y medidas que los sabios han ofrecido a la Convención Nacional, que se ha apresurado a aprobarlo. Este sistema, fundado en la medida de

[29] La definición ha ido cambiando. Hoy día la longitud del metro se define como el trayecto que la luz recorre en el vacío en 1/299792458 segundos.

> los meridianos terrestres, conviene igualmente a todos los pueblos: no se relaciona con Francia mas que por el arco de meridiano que la atraviesa, pero la posición de este arco —cuyas extremidades llegan a los dos mares y se corta por el paralelo medio— es tan ventajosa que los sabios de todas las naciones, reunidos para fijar la medida universal, no hubieran podido hacer otra elección. Por tanto nos está permitido esperar que un día este nuevo sistema será generalmente adoptado. Es, sin comparación, más sencillo que el antiguo, tanto en sus divisiones como en su nomenclatura y presentará muchas menos dificultades a la infancia.
>
> Ustedes tendrán dificultades cuando lo expliquen a los maestros, a los que una larga costumbre ha familiarizado con las antiguas medidas. Les parecerá muy complicado, pues el hombre se inclina naturalmente a atribuir a la complicación de las cosas el esfuerzo que sus prejuicios y sus costumbres le ocasionan para concebirlas; pero su celo iluminado superará estos obstáculos (CEDIC, 1980, cit. en Centeno, 1997).

Sin embargo, fue hasta 1840 cuando el uso del sistema decimal de medidas se hizo obligatorio en todo el país y tomó mucho más tiempo que su uso se extendiera y generalizara porque, más allá de los criterios científicos que lo fundamentan, su empleo significó la imposición de unas naciones sobre otras y el dejar atrás siglos de usos y costumbres respecto a la medición en las actividades humanas.

Unos años más tarde, en 1889, la Convención del Metro comenzó a celebrar conferencias en las que se fueron definiendo otras unidades, como el litro (volumen equivalente a un decímetro cúbico) y el kilogramo (la masa de agua en un decímetro cúbico [litro] a cierta presión y temperatura), todas con múltiplos y submúltiplos decimales.[30]

En la siguiente tabla aparecen las unidades base[31] de las magnitudes longitud, capacidad y peso en la columna del número 1. A la izquierda están sus múltiplos (1 metro = 0.1 decámetros, etc.) y a la derecha sus submúltiplos (1 metro = 10 decímetros, etcétera).

0.001	0.01	0.1	**1**	10	100	1000
kilómetro	hectómetro	decámetro	**metro**	decímetro	centímetro	milímetro
kilolitro	hectolitro	decalitro	**litro**	decilitro	centilitro	mililitro
tonelada			**kilogramo**	hectogramo	decagramo	gramo

Dado que los múltiplos y submúltiplos de casi todas las magnitudes son decimales,[32] una misma medida puede expresarse de diferentes maneras corriendo el punto a cualquier unidad de cierta magnitud: 3 centímetros = 0.3 decímetros = 0.03 metros, etcétera.

Para el caso de las magnitudes cuadráticas, pensemos en un cuadrado que mida 10 metros por lado, su área será de 10 m × 10 m = 100 metros^2 o un decámetro^2. Observe que al expresar esa medida en decámetros cuadrados se quitaron dos ceros.

---

[30] La Conferencia de Pesos y Medidas sigue reuniéndose cada cuatro años. En dichas reuniones se revisan las definiciones de las distintas unidades de medida y se incorporan otras cuando es necesario; por ejemplo, en la de 1999 se adoptó la unidad *katal* (que equivale a un *mol* por segundo) y en la del 2007 se revisó la definición de *kelvin*.

[31] La unidad básica de la masa es el kilogramo y es la única que lleva el prefijo *kilo*–.

[32] A excepción de las magnitudes *tiempo* y *ángulos*, que son sexagesimales.

0.000001	0.0001	0.01	**1**	100	10 000	100 000
kilómetro^2	hectárea	decámetro^2	**metro^2**	decímetro^2	centímetro^2	milímetro^2

El volumen de un cubo cuya arista mida 10 metros, será de 10 m × 10 m × 10 m = 1 000 metros^3 o un decámetro^3. Al expresar esa medida en decámetros cúbicos se quitaron tres ceros.

0.000000001	0.000001	0.001	**1**	1 000	1 000 000	1 000 000 000
kilómetro^3	hectómetro^3	decámetro^3	**metro^3**	decímetro^3 (litro)	centímetro^3	milímetro^3 (mililitro)

PROPORCIONALIDAD

La proporcionalidad se ha enseñado en la primaria por lo menos desde el siglo XIX y en todo este tiempo ha sufrido grandes transformaciones en los programas y libros de texto.

A finales del siglo XIX y principios del XX, la primaria tenía un carácter terminal: los alumnos que egresaban se insertaban en el mundo laboral. Por ello, en la escuela se estudiaba la proporcionalidad fundamentalmente por sus aplicaciones prácticas en ámbitos como el comercio: se estudiaban problemas de interés, descuento, aligaciones, que se resolvían principalmente con la regla de tres (Comin, 2002).

Poco a poco, al alargarse el tiempo de escolaridad, la primaria se fue tornando en propedéutica: más que preparar a los estudiantes para el trabajo, se les prepara para la secundaria. En particular, la proporcionalidad entre magnitudes se estudia implícitamente como una función, quizá la más sencilla, con el supuesto de que esto facilita a los alumnos el estudio de las funciones y el álgebra al ingresar a la secundaria (Comin, 2002).

La manera en que se caracterizan los objetos de enseñanza en las distintas épocas no sólo depende de la función amplia de la escuela, sino de una diversidad de factores entre los que se encuentran los avances de la didáctica de las matemáticas. Así, ahora se considera valioso el estudio de la proporcionalidad también por sus vínculos con otras nociones matemáticas: multiplicación, división, número racional, escala, porcentaje y probabilidad, entre otras. En particular, se piensa que la proporcionalidad constituye el medio matemático que permitirá a los alumnos acceder a nociones más complejas, como las fracciones (Ramírez, 2004).

En este apartado se analizarán algunos aspectos de la proporcionalidad que consideramos relevantes para el profesor; a saber, las características de una relación de proporcionalidad, el porcentaje y un breve esbozo del desarrollo histórico de la proporcionalidad.

***

La proporcionalidad ha sido objeto de enseñanza desde hace dos siglos. Como teoría matemática se desarrolló en la época de Euclides, en la antigua Grecia. En aquel tiempo se estudiaban problemas que tenían que ver con la comparación de magnitudes.

Tomando la longitud *a* como unidad, anote la medida de la longitud *b*:

Puesto que *a* cabe exactamente tres veces en *b*, se dice que esta última mide "3". Los números naturales —1, 2, 3, 4, 5, etc.—, que eran los únicos con los que se contaba en ese tiempo porque no existían las fracciones, permitían resolver la cuestión en algunos casos. Pero en otros se presentaba una dificultad importante.

Tome la longitud *c* como unidad. ¿Cómo se expresaría la medida de la longitud *d*, sin hacer uso de fracciones ni decimales?

En el aprendizaje, el paso del estudio de las cantidades (3 pasteles, 5 pesos, 40 metros) a las relaciones entre cantidades (3 listones miden 5 metros) no es sencillo. Los niños, por ejemplo, cuando se les pregunta qué conviene más: un trato en el que, por cada 5 naranjas que recojan les regalan 2, o uno en el que por cada 10 naranjas les regalan 3, frecuentemente eligen el segundo porque ahí dan más naranjas. Es decir, consideran sólo una cantidad —las naranjas que les dan— y no la relación entre las que recogen y las que les dan (Block, 2001).

Actualmente se considera pertinente empezar el estudio de las relaciones entre cantidades a partir de las razones, antes de enseñarles las fracciones, como lo fue hasta cierto punto en la historia, aunque no con la misma terminología ni con los mismos problemas o técnicas de la teoría clásica.

En suma, el conjunto de números naturales presentaba una limitación fundamental: ¿cómo expresar y comparar magnitudes continuas con un conjunto de números discreto? Las razones, es decir, las relaciones entre números naturales permitieron abordar estos problemas. Con ellas se dice que la longitud *c* es a la longitud *d* como 3 es a 2, y "3 es a 2" no es un número, sino una relación entre dos números (*Encyclopaedia Universalis*, 1995). Así, lo que interesaba no era la razón en sí misma sino la equivalencia y el orden de las razones.[33] Éste fue el comienzo de lo que hoy se conoce como la teoría clásica de las razones y proporciones, que fue central en matemáticas hasta finales del siglo XVIII (Comin, 2002).

A pesar de no ser reconocidas como números,[34] mediante las razones se logró plantear y tratar problemas que en la organización matemática actual pertenecen al campo de las fracciones, las funciones y el álgebra. La teoría de las proporciones era el único recurso para formular y estudiar problemas que luego fueron caracterizados como algebraicos, cuando se integró el álgebra a las matemáticas occidentales (Block, Mendoza y Ramírez, 2010). La posibilidad de estudiar relaciones esenciales para la física elemental fue uno de los factores que hizo de la teoría clásica de razones y proporciones una herramienta exitosa y duradera (Bosch, 1994).

A continuación se estudiarán dos definiciones de las relaciones de proporcionalidad y un caso específico de este tipo de relaciones; a saber, el porcentaje.

[33] La extensión del conjunto de números naturales a uno más amplio, es decir, la creación y reconocimiento de las fracciones como números sólo se dio hasta el siglo XIX (*Encyclopaedia Universalis*, 1995).

[34] Por ejemplo, no se sumaban ni multiplicaban razones, como se hacía con los naturales.

Una primera pregunta: ¿cuándo una relación es de proporcionalidad?

Al resolver un problema, es común que se utilice la regla de tres o cualquier otro procedimiento pertinente para resolver problemas de proporcionalidad sin preguntarse si se trata de una relación de este tipo. Por ejemplo, en el siguiente problema:[35]

Excursión mínima	100 km	$ 1 200
Bahía de Kino	107 km	$ 1 214
Guaymas	138 km	$ 1 276
Ímuris	200 km	$ 1 400
Sonoyta	400 km	$ 1 800
Puerto Peñasco	518 km	$ 2 036
Culiacán	710 km	$ 2 420

"Los alumnos de 3° de secundaria de una escuela de Hermosillo, Sonora, están preparando una excursión. Todavía no eligen el lugar, pero deciden averiguar los precios ofrecidos por empresas de turismo de la zona. A la salida de la escuela, se dirigen a la empresa de renta de autobuses Tresten Transportes para averiguar los precios, que aparecen en la tabla de la derecha.

En el precio se incluye un cargo fijo por viaje, además de una cantidad por cada kilómetro recorrido, que es la misma para cualquier destino. El viaje se cobra por autobús, no por persona. Los alumnos quieren conocer el Pinacate, Puerto Peñasco y algunas playas cercanas. Han calculado que recorrerían 600 kilómetros, ¿cuánto deberán pagar por la renta del autobús?"

Veamos los siguientes procedimientos erróneos de estudiantes de secundaria (Block, Mendoza y Ramírez, 2010):

Procedimiento 1: Zaira, Alicia, Mayra

100 km – $1 200 – 12
107 km – $1 214 –11.3
138 km – $1 276 – 9.24
200 km – $1 400 – 7
400 km – $1 800 – 4.5
518 km – $2 036 -3.93
710 km – $2 420 – 3.40

"El problema es que no sabemos qué hacer después, intentamos una regla de tres pero no nos salió."

Procedimiento 2: Ilan, Alonso, Alan, Mauricio

<table>
<tr><td>Sonoyta
imuris = 3200</td><td colspan="2">6000
6 = Excusión inuris = 7200</td></tr>
<tr><td>Sonoyta = 4200
2 Excusión mínima</td><td>2 imuris = 5200
2 Excursion</td><td>2800
2400
5200</td></tr>
</table>

[35] Adaptación de un problema diseñado por Sadovski (s/f).

1 imuris 4 Esxcursion = 5200 4800 1400	3 imuris = 4200	1900 1900 1000 4200

"Vamos a hacer las seis posibilidades que encontré [...]. La primera posibilidad es que hagas un viaje de Sonoyta y uno de Ímuris, la segunda es Sonoyta y dos viajes a Excursión mínima [...]. La más barata es Sonoyta e Ímuris y la más cara son seis excursiones mínimas [...] simplemente sumé los precios [...] en las seis excursiones mínimas, multipliqué el precio por seis [...] en dos Ímuris y dos excursiones simplemente sumé el precio, o sea dos veces Ímuris y dos veces excursión y los sumo, y así [...] lo que hemos descubierto es que siempre todos los resultados te van a dar, es algún mil pero todos terminan con 200, cerrado, no sabemos por qué será."

Durante la discusión en equipo, dudaron por un momento:

Ao1: "Pero por qué, cómo irían al mismo lugar tres veces sin ir a otro lugar, a poco..."
Ao2: "Se pueden todas las combinaciones, esto es matemáticas, no geografía..."

En los dos casos, al olvidarse del cargo fijo, los alumnos utilizaron procedimientos que sólo son pertinentes para las relaciones de proporcionalidad. Al ser uno de los tipos de relación más comunes que se suelen enseñar en la primaria, sucede con frecuencia que se ponen en juego estos procedimientos sin preguntarse si se trata o no de un problema de proporcionalidad.

En la actualidad se considera pertinente en la enseñanza que los alumnos estudien la proporcionalidad en el seno de una diversidad de formas de relación entre magnitudes, como las que subyacen a los problemas que resolverán más adelante.

Este fenómeno, por simple que parezca, se remonta a la teoría clásica de las razones y proporciones. Dicha teoría abarcaba una variedad de problemas de proporcionalidad directa, inversa, simple y compuesta (Block, 2001). Pero una debilidad de la teoría es precisamente la naturalización de las relaciones de proporcionalidad: al ser prácticamente el único tipo de relación que se estudiaba, no se tenían herramientas para justificar el carácter proporcional de las relaciones entre magnitudes o para ponerlo en cuestionamiento. Más aún, la proporcionalidad inversa se estudiaba en el mismo campo de problemas que la proporcionalidad directa, mediante un simple cambio aparentemente inocuo: sólo implica la permutación de un par de cantidades de la ecuación proporcional directa.[36] Justificar este cambio implicaría sustentar la existencia de magnitudes inversas,[37] imposible en el universo teórico en el que se inscribe la teoría. En síntesis, al resolver el problema, la dificultad estaba en la aplicación de la regla de tres, no en cuestionarse si se trataba de una relación de proporcionalidad y, por lo tanto, si la regla era adecuada o no (García, 2005).

[36] Dos magnitudes M y M' son proporcionales si cualquier razón a:b de cantidades de M es igual a la correspondiente c:d de M'. En la proporcionalidad inversa, la proporción a:b::c:d se cambia por a:b::d:c.

[37] Es decir, a la manera en que se caracterizaba la proporcionalidad inversa subyace el siguiente principio: si M y M' son inversamente proporcionales, entonces M y la inversa de M' son directamente proporcionales. La teoría no contaba con herramientas para justificar esto, que simplemente se daba por sentado.

Primera definición de una relación de proporcionalidad: ¿al doble de kilómetros le corresponde el doble de precio?

Veamos ahora el siguiente problema, muy parecido al del apartado anterior:

Los alumnos han consultado los precios de una segunda empresa de renta de autobuses, Yori. Ahí les explicaron que el precio sólo incluye un precio por cada kilómetro recorrido, que es el mismo para cualquier destino. Como ejemplo, les dieron el costo de la renta para los mismos lugares.

Excursión mínima	100 km	$ 500
Bahía de Kino	107 km	$ 535
Guaymas	138 km	$ 690
Ímuris	200 km	$ 1 000
Sonoyta	400 km	$ 2 000
Puerto Peñasco	518 km	$ 2 590
Culiacán	710 km	$ 3 550

¿Cuánto les costaría con esta empresa la renta del autobús para hacer el mismo viaje de 600 kilómetros?

En este caso, los dos procedimientos que se analizaron en la actividad anterior sí resuelven el problema. El hecho de que en el primer problema hay cargo fijo y en el segundo no, hace que los dos problemas difieran en las siguientes características:

Tresten Transportes	Yori
• El precio por kilómetro, es decir, el cociente del precio total entre la cantidad de kilómetros varía (12, 11.3, 9.24, 7, 4.5, 3.93, 3.40). • Es más caro hacer tres viajes de 200 km que hacer uno de 600 km. • Es más caro hacer un viaje de 200 km y uno de 400 km, que hacer uno de 600 km.	• El precio por kilómetro es constante: 5 pesos. • El precio es el mismo si se hacen tres viajes de 200 km que si se hace uno de 600 km. • El precio es el mismo si se hace un viaje de 200 km y uno de 400 km que si se hace uno de 600 km.

Basta con que una de las tres condiciones de la empresa Yori se cumpla en un problema cualquiera para que sea de proporcionalidad, es decir:

- El valor unitario es constante.
- Si una cantidad de una de las magnitudes aumenta al doble, triple, etc., entonces la que le corresponde en la otra magnitud también aumenta al doble, triple, etcétera.
- A la suma de dos cantidades de una de las magnitudes, le corresponde la suma de las dos cantidades de la otra magnitud.

En ambos problemas, si el número de kilómetros aumenta, el precio también aumenta. Es común que los alumnos piensen que ésta es una condición suficiente para que un problema sea de proporcionalidad y, como acabamos de ver, no es así.

Cuando en una relación entre magnitudes sucede que en una magnitud hay cantidades que aumentan y las correspondientes en la otra no, está claro que el problema *NO* es de proporcionalidad. Pero si ambas aumentan, no podemos decir que el problema sí es de proporcionalidad.

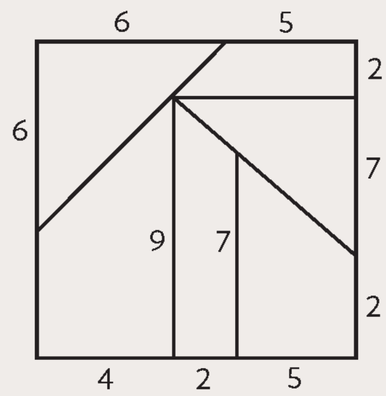
Segunda definición de una relación de proporcionalidad: ¿todas las medidas originales se multiplican por un mismo número?

Veamos ahora otra característica de las relaciones de proporcionalidad.

Si es posible, resuelva el siguiente problema con un equipo de tres o cuatro maestros. Supongan que se tiene un rompecabezas de la misma forma que el siguiente, con las medidas que se indican:[38]

Construyan una ampliación del rompecabezas, de manera que el lado que mide 4 cm en el original, mida 7 cm en la reproducción.

Si las piezas del nuevo rompecabezas no embonan como se ve en el dibujo, lo más probable es que las medidas no hayan sido determinadas correctamente. En ese caso, discutan el error y encuentren las medidas para hacer otra vez el rompecabezas.



Al resolver esta actividad, incluso los alumnos de secundaria frecuentemente suman tres a todas las medidas. Éste es un error típico muy difícil de identificar y de superar: en problemas de proporcionalidad utilizan una constante aditiva en vez de una multiplicativa.

Una manera de determinar las medidas de la reproducción es multiplicar todas las medidas del rompecabezas original por 1.75. Ésta es otra propiedad que determina una relación de proporcionalidad: hay un *factor constante de proporcionalidad* que, al multiplicarlo por todas las cantidades de uno de los dos conjuntos, hace posible que se obtengan las cantidades del otro conjunto.

[38] Problema tomado de Brousseau (1981).

Comparación de las dos definiciones: siglos de historia entre una y otra

Las dos definiciones de una relación de proporcionalidad que presentamos anteriormente son matemáticamente equivalentes. No obstante, el tránsito entre una y otra tomó varios siglos.

En la teoría clásica de razones y proporciones, estrechamente vinculada a la medición, las magnitudes eran fundamentales, así que sólo había razones homogéneas, es decir, sólo se comparaban cantidades de la misma especie, por ejemplo, dos longitudes o dos cantidades de tiempo. El marco teórico no admitía razones heterogéneas: no podía compararse un tiempo con una distancia (García, 2005).

Volvamos al ejemplo del inicio de este apartado; a saber, la comparación de las dos longitudes siguientes:

× 50 km/hr		
2 hrs	→	100 km
3 hrs	→	150 km
4 hrs	→	200 km
7 hrs	→	280 km

El factor "3", que resulta de comparar *a* con *b*, expresa un *número de veces*: la longitud *b* es tres veces mayor que la longitud *a*. Se trata de una razón homogénea.

En cambio, en una relación entre los tiempos y las distancias que recorre un automóvil que viaja a velocidad constante —como la que se muestra en la tabla de la izquierda—, el factor "50" no es un número de veces porque no tiene sentido claro afirmar que 100 km es 50 veces 2 horas.

Una cantidad de tiempo no se convierte en una distancia cuando se multiplica por un factor; más bien, de la comparación entre tiempos y distancias surge una tercera magnitud: la velocidad. Se trata de razones heterogéneas.

La consideración del factor constante de proporcionalidad implica dos rupturas drásticas con la teoría clásica de las razones y proporciones, a saber:

a) Conceptualizar factores multiplicativos que designan una tercera magnitud, derivada de las dos magnitudes entre las cuales se da la relación de proporcionalidad.
b) Reconocer a las fracciones como números, en particular, números con los que se puede multiplicar.

Tiempo	Distancia
6 hrs	200 km
9 hrs	

Para entender esta segunda ruptura, veamos el ejemplo a la izquierda, que también relaciona tiempos y distancias recorridas por un automóvil que viaja a velocidad constante. Para determinar la distancia que se recorre en 9 horas, usando el factor constante de proporcionalidad, se debe multiplicar $9 \times \frac{100}{3}$. Recordemos que en la época de la teoría clásica las fracciones no eran reconocidas como números y no se multiplicaban las razones, es decir, tampoco se conceptualizaba la idea de multiplicar 9:1 por 100:3.

Si se quiere resolver el problema mediante la primera definición[39] también aparece un factor no entero: $6 \times \frac{3}{2} = 9$, entonces la respuesta es $200 \times \frac{3}{2} = 300$. No obstante, dichas multiplicaciones pueden sortearse de la siguiente manera:

[39] Si una magnitud crece al doble, triple, etc., entonces la otra también lo hace.

Tiempo	Distancia
6 hrs.	200 km
3 hrs.	100 km
9 hrs.	300 km

Así, el resultado se obtiene componiendo dos factores enteros: ÷ 2 y × 3, y no es necesario multiplicar por fracciones.

Las limitaciones por el reconocimiento exclusivo de razones homogéneas, entre otros factores, propiciaron la paulatina separación del estudio de los números del de las magnitudes: las otras ciencias se encargaron de las magnitudes y en las matemáticas se construyeron nuevas teorías que trivializaron a la teoría de las razones y proporciones. La proporcionalidad, de ser el tipo de relación privilegiado del cual se estudiaba una multiplicidad de problemas, llegó a caracterizarse como un tipo específico de relación entre conjuntos de números, quizá el más sencillo dentro del vasto universo de relaciones posibles (Ramírez, 2004). Por otro lado, la teoría de las razones convivió con la de fracciones durante varios siglos hasta que la segunda acabó absorbiendo a la primera, convirtiéndose en un medio más potente para operar con razones (Chevallard y Jullien, 1989). La sustitución de la teoría clásica de las razones y proporciones por conceptos más acabados y potentes como las fracciones y las funciones implicó un cambio drástico en la organización matemática: se construyó un nuevo lenguaje, nuevas herramientas y maneras de argumentar (García, 2005).

Al igual que sucedió en la historia, la primera definición de las relaciones de proporcionalidad es más accesible para los alumnos que la segunda y por los mismos motivos: es más fácil considerar un factor que expresa un número de veces, que un factor que cuantifica una tercera magnitud; y es más fácil tratar con operadores enteros que con fraccionarios (Block, 2001).

¿Son de proporcionalidad o no?

Para cada uno de los siguientes problemas, calcule los datos que faltan (cuando sea el caso) y determine si el problema es de proporcionalidad o no. Cuando un problema sí sea de proporcionalidad debe mostrar que una de las siguientes propiedades de los recuadros anteriores se cumple para todas las cantidades posibles:

- El *valor unitario es constante*.
- Si una cantidad de una de las magnitudes aumenta al doble, triple, etc., entonces la que le corresponde en la otra magnitud también aumenta al doble, triple, etcétera.
- Hay un *factor constante de proporcionalidad*.

Cuando no lo sea, basta con mostrar un caso en el que una de las propiedades no se cumpla, o bien, con mostrar que en uno de los conjuntos las cantidades crecen y en el otro no.

1. En un parque de diversiones hay un paquete que cuesta $250 e incluye un número ilimitado de juegos. ¿El costo es proporcional a la cantidad de juegos que se visitan?

Cantidad de juegos	Costo total
3	$250
7	$250
15	$250

2. En un supermercado venden latas de refresco. Supongamos que el producto no está en oferta ni tiene ninguna promoción. ¿La cantidad de latas que compran los clientes es proporcional a su costo?

3. Dos automóviles, A y B, viajan por la misma carretera a la misma velocidad constante. Ambos han salido de la ciudad X. Cuando el automóvil A llega al kilómetro 50, el automóvil B pasa por el kilómetro 40.

   Si consideramos las distancias que recorren ambos desde X, ¿la distancia que recorre A es proporcional a la que recorre B?

A	B
50 km	40 km
100 km	
150 km	
200 km	190 km

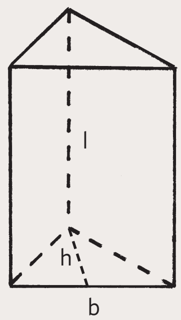
4. Un tren viaja con movimiento uniforme. ¿El tiempo transcurrido en el viaje es proporcional a la distancia recorrida?[40]

Tiempo	Distancia
2 hrs	160 km
5 hrs	
	640 km

5. Cuando un rectángulo tiene base fija, la medida del largo es proporcional al área del rectángulo. Considere ahora que el volumen de un prisma triangular está dado por la fórmula $(b \times h \times l)/2$.

   Es decir, el volumen se obtiene multiplicando la base del triángulo por su altura, por el largo del prisma y dividiendo el resultado entre dos.

   Formule un ejemplo parecido al del rectángulo: indique condiciones bajo las cuales una pareja de magnitudes implicadas en la fórmula anterior podrían ser proporcionales.



- En el problema 1, no hay proporcionalidad porque el precio no aumenta cuando el número de juegos aumenta. De hecho, el precio ni siquiera depende de la cantidad de juegos.
- En el problema 2, el precio por lata es fijo, es decir, hay un valor unitario constante. El problema es de proporcionalidad.
- En el problema 3, no hay proporcionalidad. Por ejemplo, cuando la distancia de A aumenta al doble —de 50 km a 100 km—, la distancia de B aumenta a más del doble —de 40 km a 90 km—. De hecho, el automóvil B siempre va 10 km atrás del automóvil A. Así, entre las distancias de A y B hay una constante aditiva, no multiplicativa.
- En el problema 4, la velocidad es constante: 80km/h; es decir, hay un factor externo constante. El problema es de proporcionalidad.
- En el problema 5, si el triángulo se mantiene fijo, entonces el volumen es proporcional al largo del prisma. Si se mantienen la base del triángulo y el largo, el volumen es proporcional a la altura del triángulo. Si se mantienen la altura y el largo, el volumen es proporcional a la base del triángulo.

A veces, los alumnos confunden la noción de *proporción* con la de *múltiplo*; por ejemplo, afirman que 12 y 4 son proporcionales. Esta respuesta es errónea porque la proporcionalidad se da entre dos magnitudes, como el caso de las latas de refresco y el precio, o bien, entre dos conjuntos de cantidades —12 es a 4 como 6 es a 2 y como 15 es a 5—, pero no entre dos cantidades aisladas.

[40] Este problema y el anterior se tomaron de Block, Mendoza y Ramírez (2010).

El porcentaje: un caso específico de relación de proporcionalidad

Una de las maneras de definir un porcentaje, probablemente la más accesible, es como una razón, "tantos de cada 100". Así, la problemática de esta noción se circunscribe a la de la proporcionalidad.[41]

Por otro lado, el porcentaje es una de las nociones matemáticas que destacan por su frecuente uso social. Aparece en numerosos contextos no escolares, tan cotidianos y diversos como la compra y venta de mercancías, los intereses bancarios, la descripción de mezclas y compuestos, la información estadística de noticieros y periódicos.

Nos detendremos aquí muy brevemente para explicar los dos tipos de situación en los que aparece el porcentaje.

Porcentaje para fijar una relación proporcional entre cantidades que varían

En una tienda se ofrecen descuentos en los precios de varios productos. Algunos son los siguientes:

Pantalón
Descuento: $60.00

Tenis
Descuento: $120.00

Chamarra
Descuento: $60.00

¿Cuál descuento conviene más? ______________ ¿Cuál conviene menos? _____________

Considere ahora los precios originales y revise las respuestas a las preguntas anteriores:

	Precio original	Descuento
Pantalón	\$ 300	\$ 60
Tenis	\$ 1 200	\$ 120
Chamarra	\$ 600	\$ 60

[41] El porcentaje, al ser una razón, se vincula estrechamente con las nociones de fracción y operador multiplicativo. Por eso es conceptualmente compleja.

Considere los precios originales de los siguientes artículos y proponga descuentos de tal manera que todos convengan igual que el del pantalón:

	Precio original	Descuento
Pantalón	$ 300	$ 60
Chamarra	$ 600	
Tenis	$ 1 200	
Bolsa	$ 400	
Suéter	$ 500	

Proponga una manera de promover un descuento que convenga igual que el del pantalón para todos los artículos de la tienda sin importar su precio:

Una posibilidad es que, por cada 100 pesos del precio original, se descuenten 20 pesos. Ésta es una manera, quizá la más sencilla, de formular el porcentaje porque su función es mantener una relación constante entre dos conjuntos de cantidades que varían: los precios y los descuentos cambian, pero la razón entre ambos se conserva.

Porcentaje para volver accesible una relación por medio de una escala

Consideremos la siguiente información:[41]

> En 2005 la población era aproximadamente de 6 500 millones de personas. De ellas, cerca de 3 900 millones eran asiáticos, 910 millones africanos, 325 millones estadounidenses, 650 millones latinoamericanos y 650 millones europeos.
>
> El Producto Interno Bruto (PIB) mundial era de 44 168 157 millones de dólares. Alrededor de 1 300 millones de habitantes eran dueños de 37 101 251 millones de dólares, mientras que 3 250 millones vivían con menos de dos dólares diarios. Finalmente, 1 000 millones de personas eran analfabetas.

Ahora calcule los datos que faltan para reescribir el párrafo anterior de la siguiente manera:

[41] Datos tomados de "6,477 millones, la nueva población mundial", diario *Clarín*, Argentina, 24 de junio de 2005, versión electrónica y consulta de la encuesta en <http://edant.clarin.com/diario/2005/06/24/elmundo/i-03401.htm>.

Si se redujera la Tierra a una pequeña población de 100 habitantes, manteniendo las proporciones de 2005, sucedería lo siguiente:

_______ serían asiáticos.

_______ serían africanos.

_______ serían estadounidenses.

_______ serían latinoamericanos.

_______ serían europeos.

Además, el _________% de la riqueza mundial estaría en manos de _________ personas, mientras que ___________ vivirían con menos de dos dólares diarios.

Finalmente, ___________ serían analfabetas.

En este ejemplo, el porcentaje tiene una utilidad distinta de la que se describe en el apartado anterior: ahora se trata de construir una escala para poder apreciar el tamaño de una relación entre datos que son demasiado grandes o demasiado pequeños. El porcentaje como escala también es útil para comparar distintas relaciones, por ejemplo, la frase "56 millones de personas utilizan los 12 millones de vehículos de transporte público que existen en el país. En total hay 80 millones de habitantes y 40 millones de vehículos", es más comprensible si se traduce a "en el 30% de los transportes viaja el 70% de la población".

Esperamos que el análisis de la proporcionalidad que hemos mostrado hasta ahora, si bien breve, contribuya a mostrar la complejidad conceptual de dicha noción y la importancia de estudiarla en la escuela, como señala Brousseau (cit. en Ramírez, 2004), quien critica las tendencias a demeritar en la enseñanza el estudio de la proporcionalidad en aras de favorecer el de las fracciones, noción más acabada y potente:

> Las nociones de razón y de proporción [...] desaparecieron totalmente del vocabulario "oficial" de los matemáticos. Los conceptos, en cambio, siguen siendo muy importantes: la construcción moderna [de las matemáticas] no los necesita en lo absoluto. Los ha sustituido por la noción de número. Pero la transposición didáctica de esta presentación "moderna" no tuvo éxito. En la génesis escolar de los conocimientos, los profesores necesitan distinciones de conceptos y de términos que estén al alcance de los alumnos. No es fácil saltar y borrar una actividad matemática y didáctica trimilenaria, para sustituirla de un golpe por términos y usos de expertos (Brousseau, citado por Ramírez, 2004, p. 30).

Hasta aquí hemos revisado la historia de los números y las operaciones, pero, ¿cómo es que se llega a la idea de número? En el apéndice a continuación encontrará un texto sugerente en el que se reflexiona sobre esta idea.

SENTIDO NUMÉRICO | APÉNDICE

SOBRE EL SENTIDO NUMÉRICO

Aunque existe una gran polémica al respecto, muchos estudiosos creen que algunos animales tienen un sentido numérico. Por ejemplo, en el libro de Tobías Dantzig *Número: el lenguaje de la ciencia* (1971), se menciona la muy conocida anécdota de un granjero que quería deshacerse de un cuervo que vivía en lo alto de su granero. Cada vez que el granjero entraba al granero, el cuervo volaba y sólo regresaba cuando se había percatado de que el granjero ya había salido. El granjero le pidió ayuda a un vecino; ambos entraron al granero y, como siempre, el cuervo desapareció volando. Entonces, uno de ellos salió y el otro permaneció adentro. Sin embargo, no pudieron engañar al cuervo, ya que éste regresó hasta que estaba vacío el granero. La siguiente vez entraron tres y uno de ellos se quedó, pero con el mismo resultado, y lo mismo ocurrió cuando ingresaron cuatro y salieron tres. Aparentemente, el cuervo perdió la cuenta cuando ingresaron cinco; salieron cuatro y el quinto lo atrapó. No se sabe si esta historia es verdadera, pero parece plausible que el sentido numérico tenga profundas raíces evolutivas: distinguir entre uno o dos depredadores puede hacer la diferencia para sobrevivir. De cualquier modo, lo que parece cierto es que los animales no saben contar. Aparentemente esta habilidad es producto del cerebro humano. Conviene hacer una breve descripción de su desarrollo.

Un método muy simple para saber si una colección de objetos es más “numerosa” que otra es aparear los objetos de una con los de la otra. En este proceso, la colección más numerosa será aquella en la que quedaron elementos sin encontrar parejas. Esto es lo que se hace cuando entramos al cine y vemos asientos vacíos: decimos que hay más asientos que asistentes porque simplemente vemos qué colección tiene una “numerosidad” (cardinalidad) mayor. Sin embargo, esto no es contar y sólo sirve para comparar dos colecciones. Se requiere tener una colección modelo con la que podamos comparar cualquier otra. Los dedos de las manos del cuerpo humano proveen dicha colección modelo. Para saber si en el huerto de un vecino lejano hay más manzanos que en el mío, basta marcar cuáles dedos quedaron apareados con mi colección de árboles y después aparear esos dedos marcados con los del vecino; si me sobraron dedos marcados, tengo más que el vecino y menos si requerí otros. Esto funciona bien para comparar entre sí colecciones que son menos numerosas o tan numerosas como los dedos de las manos. El siguiente paso es, en lugar de marcar mis dedos, ponerle nombre a las cardinalidades de todas las colecciones que puedo formar con ellos. Si la colección es tan numerosa como la que consiste sólo del dedo meñique, se dice que tiene un elemento; para la que tiene tantos como la formada por el meñique y el anular, se dice que tiene dos elementos; y así sucesivamente hasta llegar a diez.

El paso siguiente fue crear un símbolo para cada una de estas palabras: si usamos la simbología de los romanos, uno → I, dos → II, tres → III, cuatro → IV, cinco → V, seis → VI, siete → VII, ocho → VIII, nueve → IX, diez → X, o correspondientemente, si se usa la arábiga, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Con el uso, el proceso de aparear fue sustituido por uno equivalente pero más simple: se toma un elemento de la colección y se le llama "elemento 1", al siguiente "elemento 2"; se prosigue así y el nombre del último elemento es el "número" de elementos de la colección. La ventaja es que ahora sabemos, por el número asignado, cuándo una colección es más numerosa que otra. El humano tiene una nueva habilidad: sabe contar, aunque por el momento sólo colecciones no muy numerosas. A grandes rasgos, lo anterior parece ser la forma en que se desarrolló la habilidad de contar (véase Dantzig, 1971).

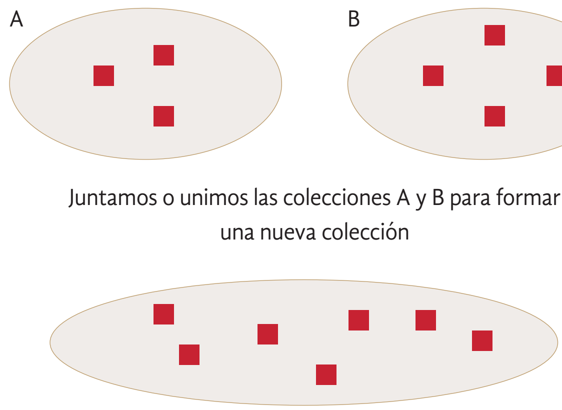
Para contar colecciones con más de diez elementos se puede contar el número de grupos de diez que contienen y su sobrante; por ejemplo, el número de meses del año es 10 más 2. Fue necesario entonces inventar nuevos nombres. Si una colección tiene 10 más 2 elementos se dirá que tiene 12 elementos, o si tiene 10 más 4, entonces se dice que tiene 14. Cuando tenemos una colección que tiene diez grupos de 10, decimos que tiene 100 elementos o un centenar. Se requirieron noventa nuevos nombres para nombrar la "numerosidad" o cardinalidad de cada colección que tuviera a lo más un centenar de elementos. Esta idea se generaliza y diez colecciones con cien elementos tiene mil, y diez de mil se llamó diez mil, etc. Notemos la gran cantidad de nuevos nombres que cada nuevo paso necesitó. Sin embargo, esto se facilitó al utilizar los nombres ya establecidos en la creación de los nuevos: cien, ciento uno, ciento dos, mil, mil uno, mil tres, mil cien, mil ciento uno, etcétera.

Una vez que a cada cardinalidad (número de elementos) de una colección se le podía asignar un nombre, era necesario crear un símbolo para representar cada uno de estos nombres. Actualmente, se utiliza la llamada "notación decimal" basada en los símbolos (dígitos) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el valor posicional de éstos. Como ya se explicó en las líneas anteriores, los dígitos 1,… 9, identificaban a las cardinalidades uno,… nueve, respectivamente; y el 0 a la de una colección que no tiene elementos, por ejemplo, el número de marcianos nacidos en la ciudad de México es 0. Es posible entender la representación decimal con base en ejemplos: 43 indica el número de elementos de una colección con 4 grupos de 10 elementos más 3 elementos; 102 una colección con 1 grupo de 100 elementos, ninguno de 10 elementos más 2 elementos; 132 tiene 1 grupo de 100 más 3 grupos de 10 más 2 elementos. Culminar la habilidad de contar con esta notación decimal requirió alrededor de 200 000 años de evolución del *Homo sapiens* y su uso se difundió en Europa a partir del siglo XI.[1] Esta notación facilitó las operaciones y el desarrollo de la aritmética.

La suma y el producto no son más que algoritmos (reglas) que facilitan el conteo. Para contar el número de objetos que hay en las dos colecciones mostradas en la figura 2 (p. 99) vemos que en A hay 3 y en B hay 4; si las juntamos, se tienen 7. Esto lo podemos describir de la siguiente forma: "3 elementos más 4 elementos nos da 7 elementos". Como no importa el tipo de elementos, podemos simplificar la expresión y decir: "3 más 4 es igual a 7". Finalmente, se inventaron dos nuevos signos "+" para identificar "más" y "=", para "es igual", por lo que se tiene "3 + 4 = 7".

[1] Los árabes, con base en la notación decimal hindú con un dígito de valor nulo, fueron los grandes innovadores de la notación posicional. Fibonacci la intordujo en Europa en el siglo XI.

Figura 2 |



La evidencia histórica sugiere que el trayecto descrito a grandes rasgos en las líneas anteriores es el camino que siguió la humanidad para llegar al concepto actual de número y de sus operaciones (Dantzig, 1971; Premack y Premack, 2005). Observemos que es un concepto abstracto sin referencia a un contexto específico y es esta característica la que facilitó su aplicación en campos muy diversos, no sólo para contar como fue en su origen.

FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

GEOMETRÍA

Introducción

Desde la infancia de todo ser humano se despierta la curiosidad por las formas y por la exploración del espacio que constituye su entorno. Esto hace que desde pequeños tengamos nociones geométricas, que desarrollemos las primeras ideas intuitivas de las características y propiedades de los objetos y el espacio que nos rodea. Es decir, comenzamos a hacernos geómetras sin pensarlo.

A lo largo de este apartado, mediante la realización de diversas actividades, se explorará por un lado, la identificación y caracterización de algunas figuras planas a partir de la manipulación, el trazo, la observación de características y el análisis de sus propiedades; y, por el otro, la medición de magnitudes tales como longitud, superficie, volumen, capacidad y ángulos en sus respectivas unidades de medida principales y algunas equivalencias de éstas.

La palabra geometría proviene de los vocablos griegos *geo* y *metrón*, que significan Tierra y medida respectivamente. Así, su significado se entiende como "medida de la Tierra". Sin embargo, actualmente el estudio de la geometría se dedica mucho más que a la medida; se centra también en la exploración y caracterización de las formas, el estudio del espacio desde una punto de vista geométrico, las relaciones y características de sus elementos.

Gran parte del desarrollo de los conceptos geométricos tienen su origen en el Medio Oriente y particularmente en el antiguo Egipto. Surgen dada la necesidad de medir predios agrarios, construir pirámides y grandes monumentos. Sin duda estas manifestaciones conocidas como geometría empírica, contribuyeron al desarrollo de esta disciplina.

En cambio, en sus orígenes no había una necesidad que centrara a la geometría en el estudio de las propiedades de las figuras geométricas o en las características y la belleza de las formas creadas que se ponían de manifiesto principalmente en sus construcciones.

Actualmente la geometría está ligada a diferentes áreas del conocimiento, desde el estudio de las formas y patrones en la naturaleza, hasta su aplicación en la ciencia, la tecnología y el arte. El estudio de las figuras planas y los cuerpos, la medición de magnitudes de longitud, tiempo, superficie, capacidad, peso y ángulos, así como la necesidad de representar ubicaciones en el plano y el espacio, han hecho que esta disciplina cobre mayor relevancia. Sus aplicaciones son muy variadas, van desde el cálculo de medidas de distancias diminutas y astronómicas, el diseño, la arquitectura, la ingeniería, la óptica, la robótica y el comercio, hasta cuestiones que implican la dimensión y el uso del espacio, la imagen y la perspectiva para aplicarla en obras de arte como la pintura, la escultura, el cine y la geometría, también incluyen el uso de patrones, el empacado y envasado de productos comerciales, entre muchas otras cosas.

La geometría se define como la ciencia que tiene por objeto analizar y sistematizar los conocimientos espaciales a partir del reconocimiento de formas, las propiedades de las figuras geométricas (lineales, planas o cuerpos tridimensionales), los patrones, transformaciones y relaciones espaciales, de tal manera que los estudiantes desarrollen una percepción espacial (Alsina y otros, 1995).

Esta rama de las matemáticas ha cobrado especial relevancia en la enseñanza por ser el comienzo del aprendizaje y el razonamiento deductivo, en donde se ponen de manifiesto la experimentación, la representación, el pensamiento inductivo y los procesos deductivos así como los demostrativos. Es decir, la geometría en la enseñanza básica es el cimiento sobre el cual se forma en los estudiantes un pensamiento y razonamiento matemático que parte de la visualización y la representación hacia la demostración, generalización y formalización de conceptos.

Se han hecho esfuerzos por estructurar y sistematizar las etapas por las cuales se transita para construir el aprendizaje o conocimiento de la geometría. Uno de los más aceptados es el modelo elaborado por Van Hiele, en el que se estratifica el conocimiento en cinco niveles y una serie de fases para transitar de un nivel a otro. Dicha estratificación no depende de la edad, sino de las competencias o experiencias geométricas por las cuales haya pasado el estudiante.

Modelo de aprendizaje de Van Hiele[1]

Nivel 0: Visualización o reconocimiento

1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
2) Se describen por su apariencia física mediante representaciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc.). No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
3) No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo.

Nivel 1: Análisis

1) Se perciben los componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y las figuras. Esto lo obtienen por medio de la observación y de la experimentación.
2) De una manera informal se describen las figuras por sus propiedades, pero no se relacionan unas propiedades con otras o unas figuras con otras. No se elaboran definiciones porque muchas de éstas se construyen a partir del análisis de las propiedades.
3) Se establecen nuevas propiedades al experimentar con figuras u objetos.
4) No realizan, sin embargo, clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

[1] Tomado de Fouz y De Donosti, "Modelo Van Hiele para la didáctica de la geometría", artículo disponible en versión electrónica por el CIAEM, <www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/>.

Nivel 2: Ordenación o clasificación

1) En este nivel es posible describir las figuras de manera formal, es decir, señalar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante porque conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la geometría y los requisitos que siempre requieren.
2) Realizar clasificaciones lógicas de manera formal porque el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, es decir, establecen relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
3) Seguir las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, sin entenderlas en cuanto a su estructura. Esto se debe a que en su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento, pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la geometría.

Nivel 3: Deducción formal

1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, al igual que se reconoce su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que se entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas.
3) Se comprende cómo se llega a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que permite entender que se realizan distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico se tiene una visión globalizadora de las matemáticas.

Nivel 4: Rigor

1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos; asimismo se analizan y comparan diferentes geometrías.
2) Se trabaja la geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos.

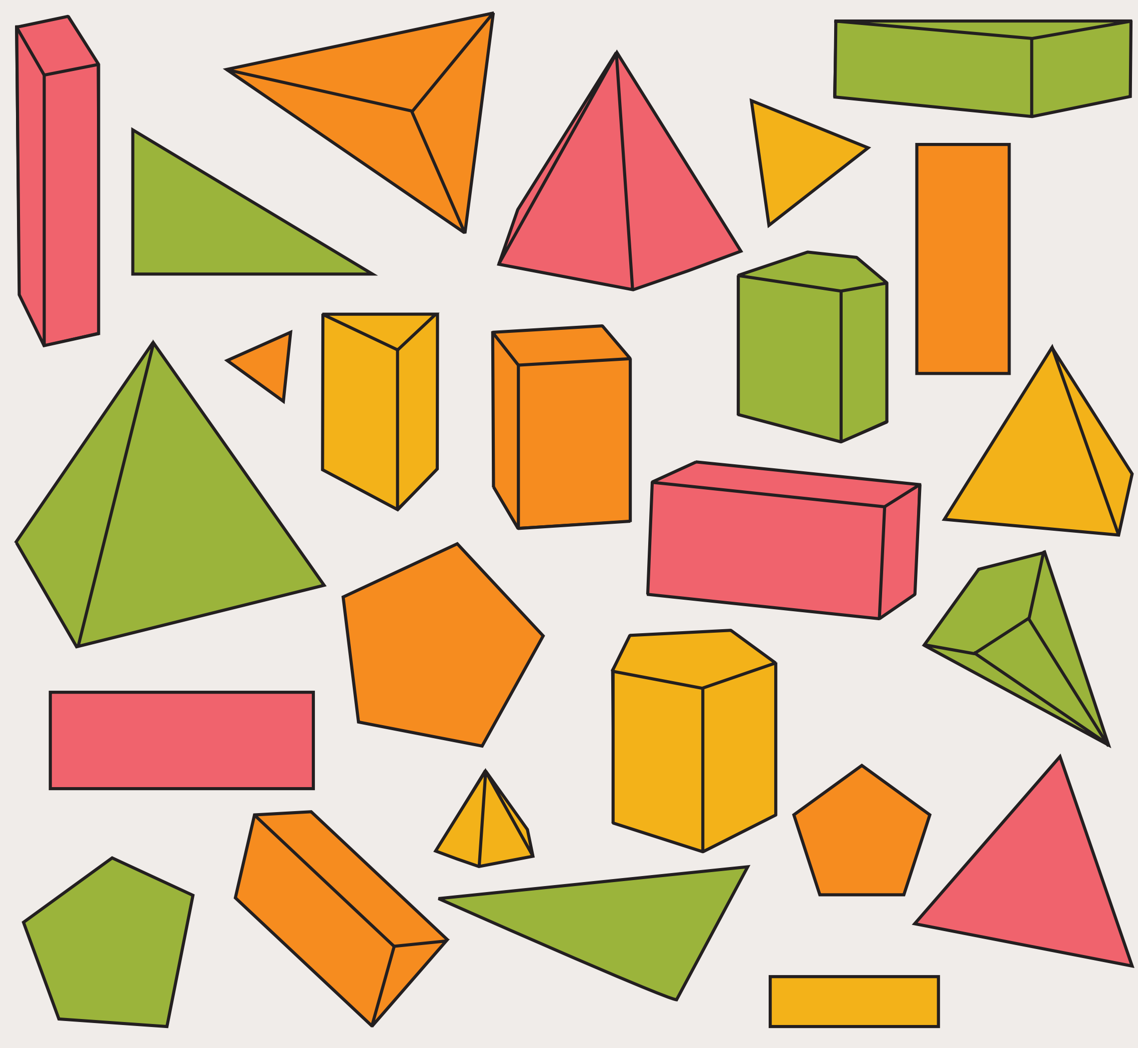
Figuras planas

Un aspecto importante para estructurar el conocimiento geométrico y comprender el espacio y las relaciones que hay entre sus elementos se basa en el análisis de relaciones y las propiedades de las formas y figuras que hay en él. Desde edades muy tempranas, se observan y distinguen características a partir de la manipulación y exploración de los objetos. Conforme se construye el conocimiento geométrico y una mejor percepción del espacio, se hacen relaciones y clasificaciones que derivan en primeras caracterizaciones, las cuales sirven para encontrar nuevas relaciones y demostrar propiedades comunes entre las figuras y sus elementos. Estas habilidades ayudan a hacer conjeturas y lograr una mejor caracterización que contribuya a un conocimiento geométrico de mayor nivel en donde se formulen proposiciones y se demuestren.

Cuadriláteros

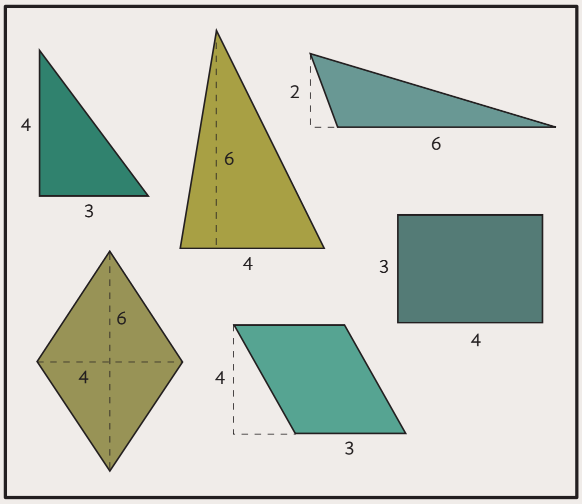
En el aula se pueden hacer diferentes actividades enfocadas en este sentido, en las cuales los estudiantes logren clasificar diferentes objetos o figuras bajo sus propios criterios, luego analizar no sólo las figuras, sino los criterios mismos y así trabajar con ellos (cuáles son útiles para hacer una clasificación y cuáles no, cuáles generan ambigüedades y cuáles no), así como distinguir la importancia de elaborar una clasificación y qué elementos se toman en cuenta para hacerla.

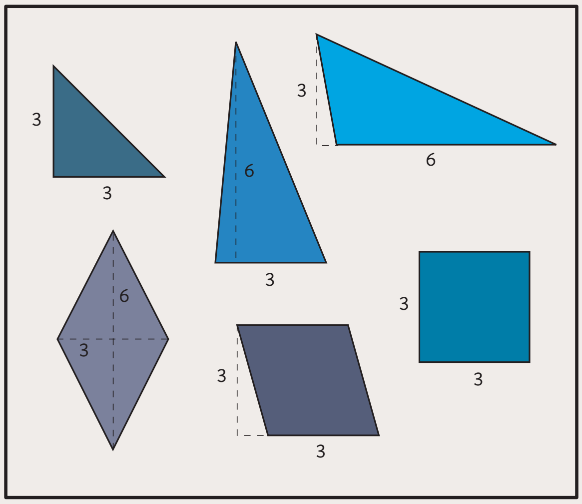
Haga tres clasificaciones de los objetos que aparecen en la siguiente imagen y describa cuáles son los criterios que tomó en cuenta para hacer cada una de ellas.

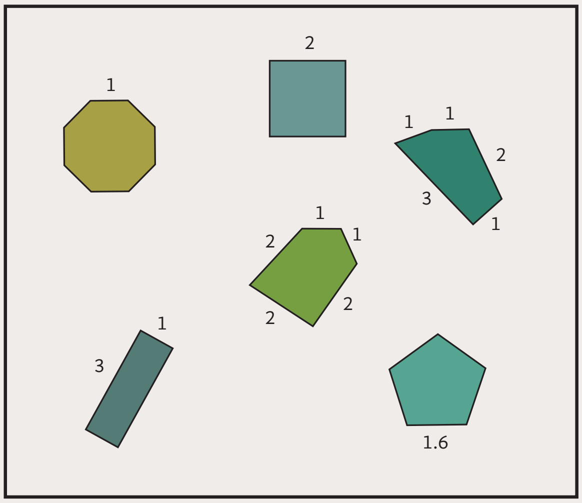


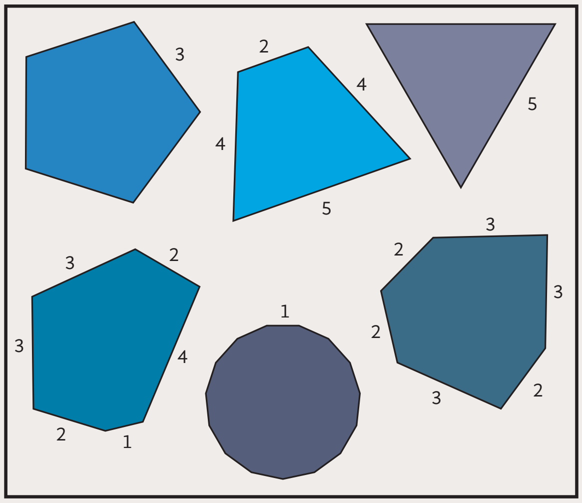
También puede realizar procesos inversos para explorar las características y propiedades de las figuras. Presente diversas clasificaciones hechas previamente en donde la actividad consista en determinar cuál o cuáles criterios fueron empleados para hacer la distribución presentada.

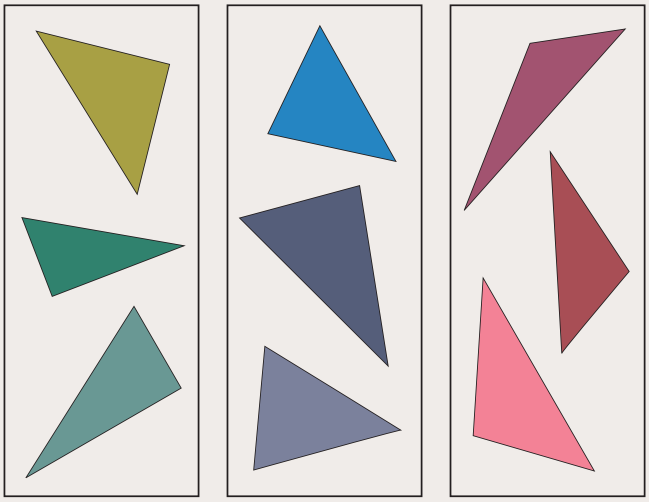
En las siguientes imágenes de figuras planas ya está hecha la clasificación. Escriba cuál o cuáles son los criterios que determinan el agrupamiento que se presenta en cada caso.











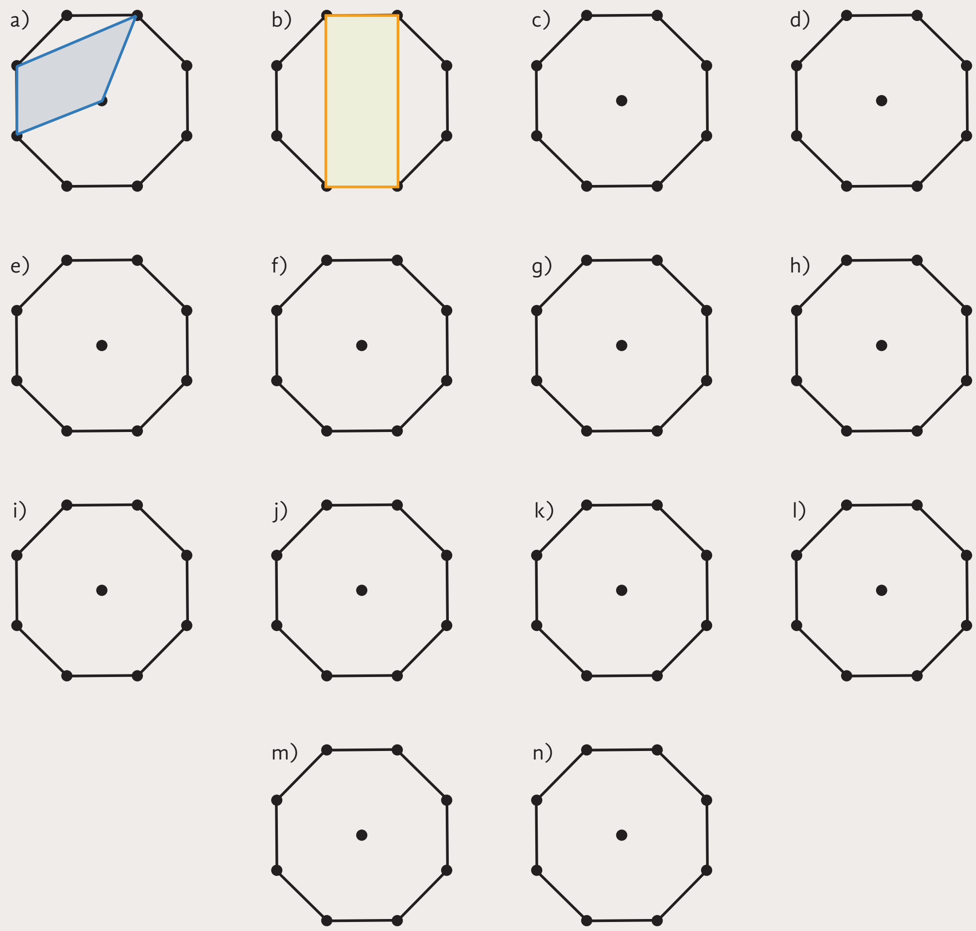
Por otro lado, es conveniente partir de conocimientos previos que se tengan.

Responda las siguientes preguntas básicas que se relacionan con los cuadriláteros:

- ¿Qué entiende por cuadrilátero?______________________________
- ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros?__________________________
- ¿En qué se basa dicha clasificación?___________________________

A partir de estas preguntas se pueden plantear actividades diversas que permitan explorar cuadriláteros de diferentes tipos para descubrir sus características y propiedades y hacer una clasificación con base en éstas.

En los siguientes octágonos regulares trace todos los cuadriláteros posibles que sean diferentes entre sí, es decir, que dos o más no tengan la misma forma y tamaño, de tal manera que los cuatro vértices del cuadrilátero estén sobre los vértices del octágono o sobre el centro del mismo, como en los ejemplos.



Anote el nombre de cada uno de los cuadriláteros que encontró y describa sus características.

Es posible que usted o sus alumnos no conozcan los nombres de todos los cuadriláteros que encontraron, así que, después de hacer la descripción de cada uno procure investigar sus nombres. Para ayudar a describir las figuras que se trazaron se plantearían preguntas tales como: ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?, ¿cómo son sus ángulos?, ¿cuántas parejas de lados paralelos tienen?, ¿cómo son sus diagonales?, ¿cuántos lados iguales tienen?, entre otras características que usted piense para describirlos. Apóyese en elementos de organización como la tabla siguiente para que le sea más fácil sistematizar la información que obtenga de todos los cuadriláteros que trazó.

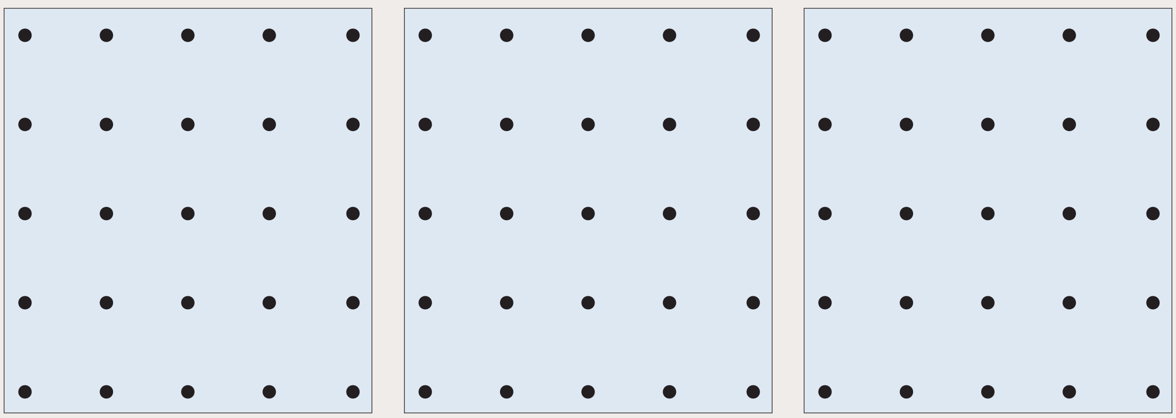
Nombre del cuadrilátero	Características
a)	
b)	
c)	

Para comenzar con la clasificación agrupe los cuadriláteros según algunas características que haya encontrado.

Entre las figuras que trazó, encierre dos con las características que se piden en cada caso:

- Dos cuadriláteros diferentes que tengan dos parejas de lados paralelos.
- Dos cuadriláteros diferentes que tengan sus cuatro lados iguales, uno de ellos tiene sus diagonales iguales, el otro tiene sus diagonales diferentes.
- Dos cuadriláteros que tengan sólo un par de lados paralelos. Uno de ellos tiene una pareja de lados opuestos iguales. El otro no tiene lados opuestos iguales.

Si no las hubiera, trace en el geoplano o en una hoja punteada las que hagan falta:



Para complementar el ejercicio y continuar con la depuración de la clasificación, apoye a sus alumnos con actividades en donde se planteen afirmaciones que ayuden a distinguir las diferencias y los aspectos comunes de los elementos que se presentan.

Siguiendo con el ejercicio de los cuadriláteros, indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera. En caso de que las considere falsas, muestre un ejemplo de un cuadrilátero que no cumpla lo que se indica (un contraejemplo).

- Todo cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales es un cuadrado.
- Todo cuadrilátero que tiene todos sus ángulos iguales es un cuadrado.
- Todo cuadrilátero que tiene dos parejas de lados paralelos es un rectángulo.
- Todo cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales es un rombo.
- Un rectángulo es un cuadrilátero equiángulo.
- Todo cuadrilátero que tenga dos parejas de lados paralelos y al menos un ángulo de 90° es un rectángulo.
- Los cuatro lados de todo cuadrilátero que es trapecio son diferentes entre sí.
- Las diagonales de todo cuadrilátero que es paralelogramo son iguales entre sí.

La relación que hay entre los lados y los ángulos de los cuadriláteros determina la perpendicularidad o paralelismo que existe entre sus lados. Ésta es la base sobre la cual partir para clasificarlos. Una manera de clasificar los cuadriláteros es según la perpendicularidad de sus lados en:

- Paralelogramos, si tienen sus dos parejas de lados paralelos.
- Trapecios, si tienen sólo una pareja de lados paralelos.
- Trapezoide, si no tienen lados paralelos.

Euclides y la geometría plana

Fue hasta el siglo III a. C. que un matemático griego de nombre Euclides[2] publicó una de las obras más grandiosas que se han escrito en la historia de las matemáticas: *Los elementos*. En este trabajo se recopilan, ordenan y sistematizan la mayoría de conocimientos en geometría conocidos hasta esa época.

Cabe mencionar que este trabajo de Euclides es hasta la fecha uno de los más representativos del pensamiento matemático. A más de dos mil años de su creación, los enunciados, definiciones y conceptos que en él se abordan están dotados de elegancia y sencillez, además de que, en la actualidad, con algunas adaptaciones que se han dado a partir de la evolución de la disciplina, los conceptos ahí planteados son materia de estudio desde la educación básica hasta la universitaria. En este tratado, Euclides aborda el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc. En otras palabras, el estudio de las formas regulares.

[2] Euclides fue un matemático griego (325-265 a.C.) a quien se le conoce como el padre de la geometría. De su vida se conoce poco; se sabe que vivió en Alejandría y se manejan tres hipótesis referentes a su obra *Los elementos*: a) el matemático que vivió en Alejandría, de quien se tiene noticia, la escribió; b) un equipo de matemáticos que trabajaba en Alejandría contribuyó a escribir las obras completas e incluso las firmó a nombre de su líder, Euclides, después de su muerte; c) las obras fueron escritas por un grupo de matemáticos de Alejandría, quienes tomaron el nombre del personaje histórico Euclides de Megara, el cual vivió cien años antes de su época.

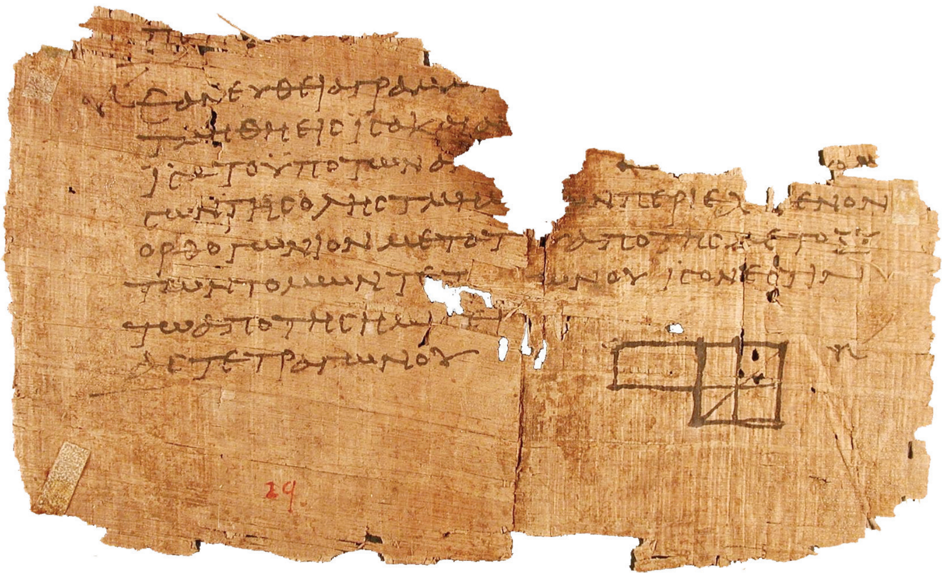


Figura 1 | Fragmento de *Los elementos* de Euclides, escrito en un papiro encontrado en Egipto.

La geometría de Euclides parte de definiciones de elementos básicos de la geometría, cinco nociones comunes y cinco postulados, para construir y demostrar teoremas y resultados. Los teoremas más sobresalientes referentes a la geometría plana son:

- La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180 grados.
- En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (teorema de Pitágoras); si el cuadrado de uno de los lados de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo recto.

Los primeros cuatro postulados de Euclides son demasiado evidentes:

- Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.
- Un segmento rectilíneo siempre es alargado.
- Hay una única circunferencia con un centro y un radio dados.
- Todos los ángulos rectos son iguales.

Sin embargo, el quinto ha sido muy controvertido dado que no tiene la simplicidad ni la evidencia de los anteriores: "por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una y solamente una recta paralela a ella". Se creía que a partir de los otros cuatro se haría una demostración de éste, pero Euclides no la escribió. Por tal razón, muchos matemáticos intentaron prescindir de él; sin embargo, ninguno tuvo éxito. De hecho, este axioma ha sido tan importante que ha dado paso a la creación de nuevas geometrías llamadas geometrías no euclidianas, basadas en invalidar este axioma o sustituirlo por su negación. En el siglo XIX, el matemático ruso Nikolai Lobachevski creó una de ellas:

> Las geometrías no euclidianas tienen la característica particular de que al cambiar el axioma de las paralelas, los ángulos internos de un triángulo ya no suman 180 grados, pero, como ya se dijo, éstas son otras geometrías.

Si bien Euclides hace un esfuerzo por definir los elementos básicos, en la actualidad el estudio de la geometría parte de conceptos básicos y primarios de punto, plano y espacio que no se definen, sino que se captan por medio de los sentidos. Sin embargo, para cada uno de ellos se dan modelos fijos que los ejemplifican o representan, por ejemplo:

- Un punto está representado por la huella que deja un alfiler al presionarlo sobre un papel o por una estrella en el firmamento.
- Una recta queda representada por un hilo sujetado a un plomo.
- Un plano refiere a la superficie de un lago en calma o a la superficie de un espejo.
- El espacio euclidiano estaría constituido por todos los puntos existentes en el espacio donde nos movemos.

A pesar de ser una de las aportaciones más importantes para las matemáticas en su conjunto, *Los elementos* de Euclides tuvieron su primera aparición impresa en 1842, en Venecia, en una traducción del árabe al latín. Ha sido un texto esencial para el estudio de las matemáticas y de la geometría en particular, por recopilar y depurar mucho del conocimiento que se tenía hasta entonces, por poner sobre la mesa nuevos elementos que ayudaron a construir otro tipo de geometría que parte no sólo del empirismo, sino del razonamiento inductivo y deductivo, así como por la manera en que demuestra las proposiciones que presenta.

Triángulos

Acercarse a la geometría por medio de la manipulación y representación de los objetos geométricos haría que su estudio trascendiera más allá de la medida como único fin de la enseñanza en la educación básica, es decir, el cálculo de los perímetros o áreas de las figuras planas o de los volúmenes de cuerpos geométricos no es el único objeto de estudio de la disciplina, sino que el descubrimiento, construcción y empleo de la geometría desde varias perspectivas es el principio para modelar, visualizar y representar conceptos y procesos matemáticos.

Hay que fomentar en los estudiantes de nivel básico el empleo del razonamiento inductivo para hacer generalizaciones. Un camino para lograrlo —mas no el único, como ya se dijo— sería la exploración de las figuras y los objetos que manipulan y se encuentran en su entorno. Describir los objetos sería el principio, pero no es suficiente.

Es muy común que lo primero que se le dice a los estudiantes cuando se ve el tema de triángulos sea: “esto es un triángulo”. Se identifican sus elementos (vértice, lado y ángulo) y después —o incluso antes— se da la definición: “es una figura plana que se compone de tres lados, tres vértices y tres ángulos”. Además, por lo general, el primer triángulo que se les presenta tiene un lado horizontal, paralelo a la base del papel o pizarrón, y muy probablemente es isósceles (figura 2). Esto genera una idea limitada de lo que es un triángulo, de la representación del espacio y de sus elementos.

Es poco probable que los estudiantes exploren por primera vez figuras como las de la página siguiente (figura 3) y las identifiquen como triángulos.

Posteriormente, es probable que realicen la actividad de iluminar triángulos, pero la variedad no siempre es suficiente para comenzar a generar conclusiones que fomenten la construcción de aprendizajes de un mayor nivel.

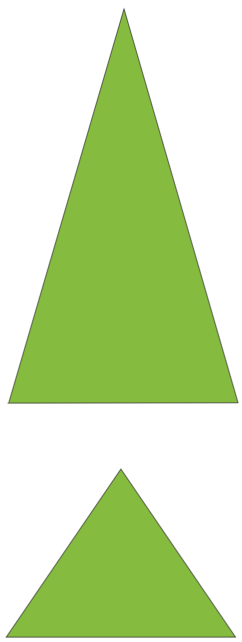


Figura 2 |

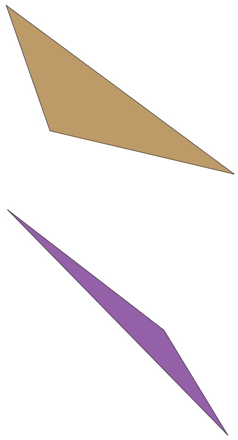


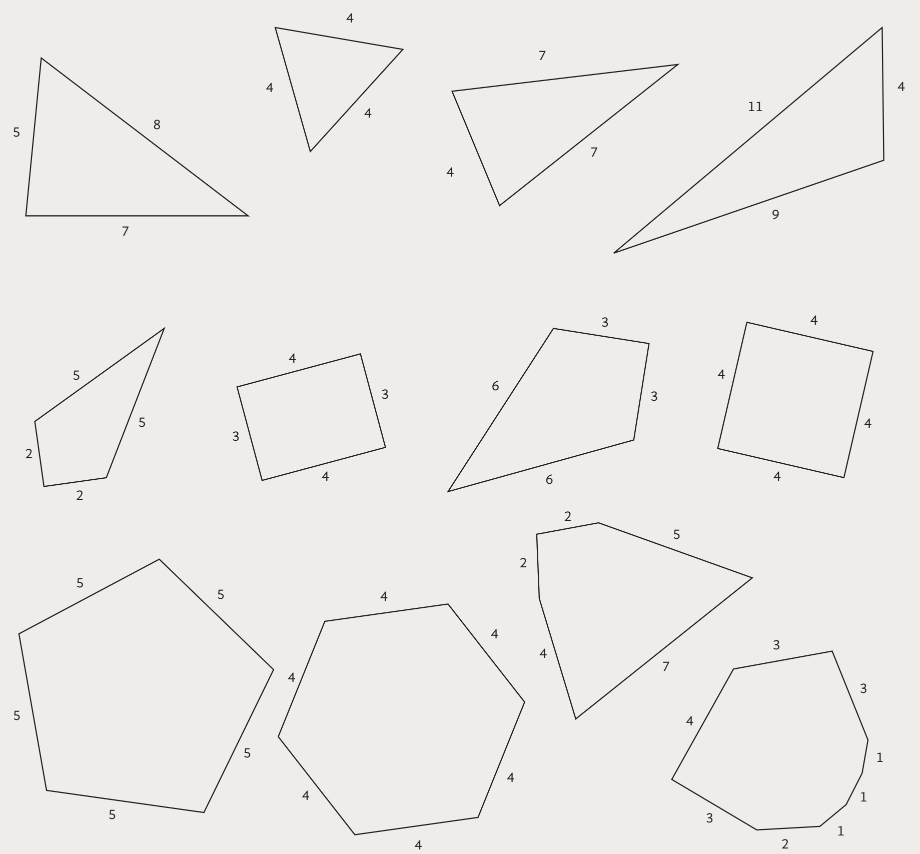
Figura 3 |

Muchos de los errores que cometen los alumnos se deben a que tienen imágenes conceptuales pobres; por ejemplo, si los alumnos creen que la base de un triángulo es el lado horizontal porque en él se apoya, entonces pensarán que el primero de los siguientes triángulos tiene base pero el segundo no, lo cual es falso: cualquier lado de un triángulo puede ser tomado como su base (García y López, 2009).

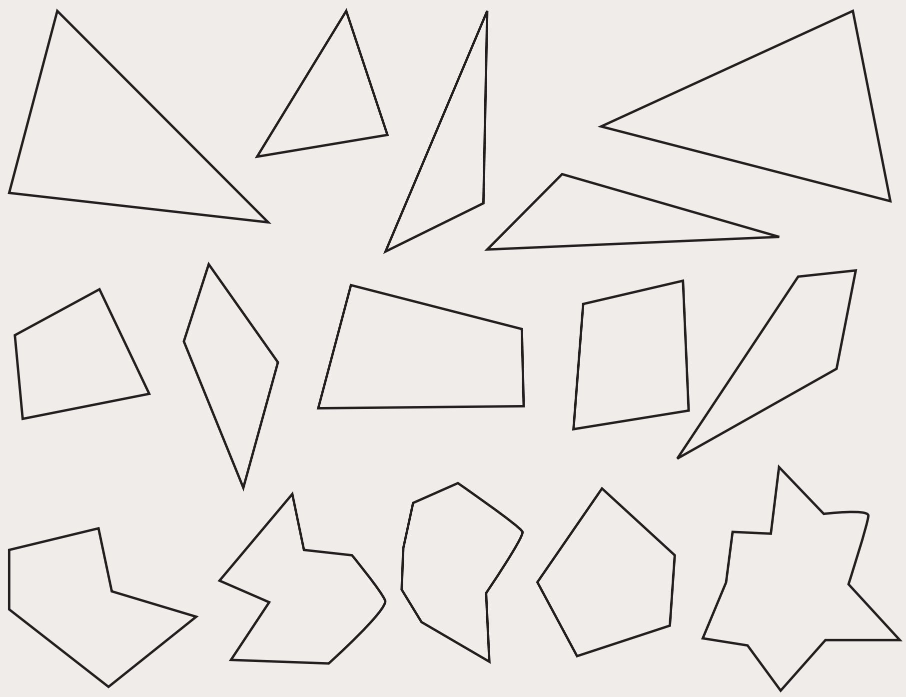
Es común que se caiga en lo que la inercia escolar dicta y se dé de antemano una primera clasificación según la relación que hay entre la medida de sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) o según la medida de sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo), antes de cualquier exploración, descubrimiento de propiedades o construcción de conceptos. Se le propone al alumno que en una colección identifique aquellos triángulos que cumplen con las características que el profesor determina. Ciertamente el estudiante explorará los triángulos que se le presenten, pero sólo a partir de las definiciones predeterminadas por el profesor. Al quedarse en este nivel, el estudiante cree que sabe todo sobre los triángulos, o bien, llegará a conclusiones tales como que dada la medida de tres lados cualesquiera o de tres ángulos cualesquiera es posible construir un triángulo.

Le sugerimos hacer la siguiente actividad, usted primero y luego presentarla a sus alumnos.

De las siguientes figuras, ilumine aquellas en las que la suma de cualesquiera dos lados es mayor que cualquiera de los lados restantes.



O bien, mida con su transportador los ángulos de las siguientes figuras. Ilumine de un color las figuras cuya medida de los ángulos interiores sume 180°, de otro color las figuras en donde la medida de los ángulos interiores sume 360 grados y con un tercer color donde la suma sea mayor que 360 grados.



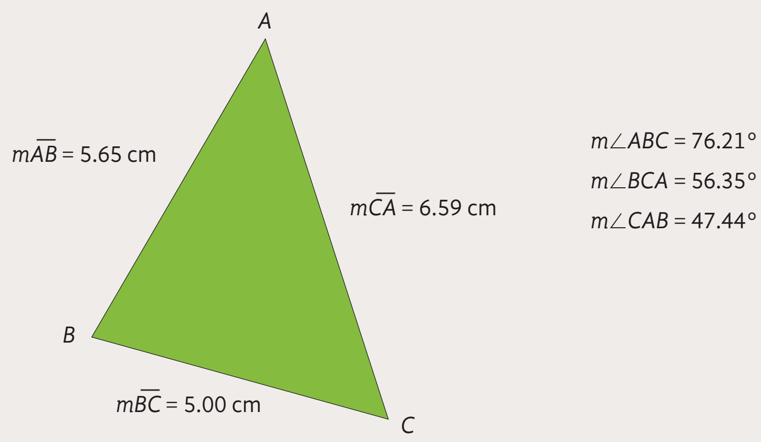
Ahora anote en su cuaderno las conclusiones que haya encontrado de cada una de las actividades.

- ¿Qué figuras iluminó en cada caso?
- ¿Qué conjetura daría a partir de observar la relación que hay entre los lados de las figuras que iluminó en el primer caso?
- ¿Qué comentaría de las figuras que iluminó según las medidas de los ángulos en cada caso?
- ¿Qué conclusiones tendría de las actividades que acaba de realizar?

Explorar no es suficiente por sí solo; hay que tener ciertas premisas, hay que dar ciertas pautas que permitan al estudiante saber por dónde empezar, pero sin darles el camino completo. Esto permitirá no sólo que reflexionen y hagan uso del razonamiento deductivo e inductivo para obtener conclusiones, sino que estar en constante contacto con este tipo de situaciones les permite construir las bases para forjar este tipo de razonamientos y, con el tiempo, ser ellos quienes formulen sus propias preguntas, diseñen sus propias estrategias de exploración y den solución a un problema para sacar las conclusiones derivadas del estudio planteado de inicio. Es decir, que comiencen a hacer matemáticas.

Por ejemplo, no es lo mismo partir de un triángulo con las medidas dadas, tanto de sus lados como de sus ángulos, a que se tengan las medidas y sea necesario construir el triángulo.

Presente esta actividad (se sugiere que también la realice para que obtenga todo lo que sabe de esta figura). Observe el triángulo, explórelo y anote todas sus características y propiedades:



Ahora, trace o construya los siguientes triángulos con todos los elementos que tenga disponibles: lápiz, regla graduada, compás, transportador, escuadras, hilo, palillos de madera, etcétera.

A partir de la medida de sus lados:

- Triángulo A: Medidas de los lados (5 cm, 4 cm, 3 cm).
- Triángulo B: Medidas de los lados (8 cm, 5 cm, 3 cm).
- Triángulo C: Medidas de los lados (6 cm, 4 cm, 4 cm).
- Triángulo D: Medidas de los lados (4 cm, 4 cm, 9 cm).

A partir de la medida de sus ángulos:

- Triángulo E: Medidas de los ángulos (90°, 35°, 55°).
- Triángulo F: Medidas de los ángulos (90°, 35°, 55°); considere hacer un triángulo de diferente tamaño.
- Triángulo G: Medidas de los ángulos (95°, 40°, 55°).
- Triángulo H: Medidas de los ángulos (60°, 40°, 55°).

- ¿Qué conclusiones tuvo a partir de realizar el trazo o la construcción de los triángulos según la medida de sus lados?
- ¿Qué conclusiones tuvo a partir de realizar el trazo o construcción de los triángulos según la medida de sus lados?
- ¿En qué casos no fue posible trazar o construir un triángulo dadas las medidas de sus lados?
- ¿En qué casos no fue posible trazar o construir un triángulo dadas las medidas de sus ángulos?

•¿Qué características o propiedades comenzó a inferir de los triángulos?

Una vez que el estudiante descubra algunas condiciones o parametros sobre los triángulos, sabrá cuáles de las siguientes ternas indican la medida de tres lados, con cuáles se traza o construye un triángulo isósceles y con cuáles no, sin necesidad de recurrir a modelos concretos.

Elija las ternas de de lados; argumente lo más posible las razones de su elección en cada caso.

(4, 4, 4);	(5, 5, 6);	(2, 2, 5);	(4, 6, 6)
(7, 5, 5);	(5, 5, 9);	(5, 5, 12);	(6, 6, 13)

Otro ejercicio consiste en hacer una clasificación de los polígonos según la medida interior de la suma de sus ángulos, la cual depende directamente del número de lados y, por lo tanto, será equivalente a éstos.

De manera similar, puede poner a los alumnos más pequeños a formar triángulos, fungiendo ellos como vértices. En un principio, la actividad se desarrolla con una cuerda o elástico cerrado para que jueguen con las diferentes formas y dimensiones que tiene un triángulo, en este caso, con el perímetro predeterminado por el tamaño de la cuerda o el elástico; posteriormente, les solicita que dichas construcciones las hagan usando secciones de cuerda de diferentes tamaños.

Durante la actividad, solicite que seleccionen tres secciones de cuerda e intenten hacer la formación que les permita construir un triángulo. Ponga ciertas condiciones para que no usen el largo de sus brazos, por ejemplo, que todos los extremos de las cuerdas toquen el ombligo y estén lo más tensas posible. De esta forma se darán cuenta de que no todos los tamaños de cuerda les sirven para construir triángulos. Pida que expliquen cuándo no les fue posible cerrar el triángulo.

Puede hacer el mismo ejercicio con palillos de dientes que sirvan como unidad. Se pueden formar triángulos con palillos alineados para cada lado. Por ejemplo, el triángulo cuya medida de lados es 3p, 4p y 2p es una construcción que requiere de nueve palillos. Puede realizar preguntas tales como:

- ¿Cuántos triángulos diferentes se forman con nueve palillos?
- ¿Cuántos triángulos diferentes se forman con siete palillos?
- ¿Cuántos triángulos diferentes se forman con tres palillos?
- ¿Y con cuatro palillos?

Es conveniente que siempre realice las actividades antes de trabajarlas con sus alumnos y analice las posibles respuestas y dificultades que se puedan presentar.

A partir de la manipulación de los objetos y de la representación de las figuras —siempre y cuando se haya obtenido y comentado alguna inferencia—, explique que las medidas de los lados deben guardar una relación determinada para construir un triángulo o que no siempre se obtiene dicha figura porque la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados debe ser mayor que el tercer lado (la conocida desigualdad del triángulo).

Sin haber planteado de antemano el teorema y su demostración, los alumnos serán capaces de inferir, a partir de los elementos con los que cuentan hasta el momento, que los triángulos tienen cierta propiedad y de una terna de longitudes lograrán comprobar, previo a hacer cualquier trazo, si esta desigualdad se cumple, por ejemplo: al hacer la suma de cualesquiera dos lados de un triángulo con las longitudes de lado 8, 10, 15 o con las ternas de longitudes 8, 10, 20, se verificará si la suma es mayor que el tercer lado.

En el primer caso, la suma de 8 y 10 es 18, y 18 es mayor que 15. La suma de 8 y 15 es 23, y 23 es mayor que 10. Por último, la suma de 10 y 15 es 25, y 25 es mayor que 8. Por lo tanto, esta terna de longitudes de lado satisface el teorema de la desigualdad del triángulo.

En el segundo caso, la suma de 8 y 10 es 18, y 18 es menor que 20. Por lo tanto, esta terna de longitudes de lado no satisface el teorema de la desigualdad del triángulo dado que la suma de dos lados cualesquiera no es mayor que el tercer lado.

Paralelas, perpendiculares y doblado de papel

De la misma manera que la relación que hay entre los lados de una figura geométrica plana puede ser un elemento de análisis, también lo puede ser la relación que hay entre otros elementos, por ejemplo, en los cuadriláteros, la medida de los ángulos que forman sus diagonales o la relación que hay entre el tipo de figura y la longitud de sus diagonales. De este tipo de reflexión se pueden derivar una serie de cuestionamientos que vale la pena explorar:

- ¿Cuáles de los cuadriláteros tienen diagonales iguales?
- ¿De qué depende que las diagonales de un cuadrilátero formen ángulos rectos en su intersección?
- ¿Qué relación hay entre los lados opuestos de un cuadrilátero y sus ángulos opuestos?

Éstas y otras preguntas servirán para continuar con el análisis de las propiedades de las figuras planas, en este caso de los cuadriláteros.

Asimismo, el dibujo y trazo geométricos se utilizarán como un elemento extra para la observación de características de las figuras planas y el análisis de sus propiedades. No sólo es importante saber trazar dichas figuras y analizarlas en su conjunto, sino que conviene también realizar construcciones y trazos alternos de los elementos que sirven para hacerlo. Por ejemplo, conocer algunas propiedades de las rectas paralelas y de las perpendiculares, así como de su trazo, será útil para determinar y descubrir las propiedades de los cuadriláteros antes mencionadas.

Para apoyar el trabajo en el aula, a continuación se presentan actividades en donde el doblado de papel sirve como herramienta para realizar algunas construcciones geométricas de las cuales se obtendrán conclusiones sobre sus propiedades y la relación que tienen con figuras como cuadriláteros y triángulos. Cabe mencionar que el uso de la regla y el compás para el trazo geométrico es un elemento fundamental del aprendizaje de la geometría; es una herramienta útil en el dibujo siempre y cuando se conozcan las propiedades fundamentales de las figuras a trazar, como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un solo punto llamado centro en una circunferencia. Si bien con regla y compás sólo se trazan rectas y circunferencias o partes de éstas, a partir del trazo de dos elementos geométricos se pueden trasladar segmentos, dividirlos en n partes iguales, trazar ángulos, triángulos y algunos otros polígonos, siguiendo una serie de pasos y construcciones auxiliares que permitan encontrar el resultado deseado. Estas dos herramientas básicas, con sus limitaciones, han tenido mucha importancia en el desarrollo de la geometría desde sus inicios.

El doblado de papel es un auxiliar que permitirá crear un círculo reflexivo en donde se construyan figuras geométricas a partir de conocer sus propiedades y viceversa, es decir, que al realizar los trazos se analicen y se descubran nuevas características de las figuras y propiedades. Las actividades o problemas propuestos se realizarán en clase con sus estudiantes, pero es importante, como ya se mencionó antes, que usted las realice previamente para identificar qué elementos integrará y cuáles no de acuerdo con el grado de sus alumnos, qué preguntas se derivan de la actividad y con cuáles comenzará, así como qué dificultades y conclusiones se pueden obtener de cada actividad.

Los trazos y construcciones geométricas hechas a partir de la técnica del doblado de papel tienen sus ventajas y sus desventajas, al igual que la geometría de la regla y el compás. Algunas cosas se podrán hacer y otras no; además, se requiere práctica para que los trazos sean cada vez más precisos.

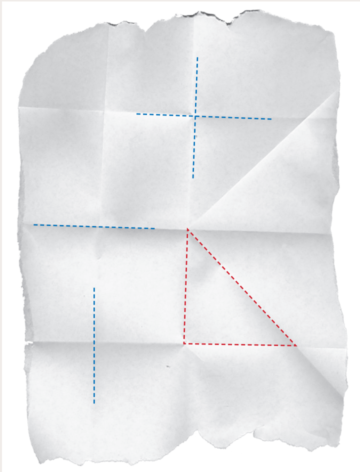
Para comenzar a adquirir destreza en el doblado de papel, inicie por construir en el centro de una hoja un segmento de recta que pase por un punto dado. O bien, elabore un ángulo recto. Cuando realice cada trazo, argumente matemáticamente por qué el elemento construido es efectivamente el que se desea. Cerciórese, por ejemplo, de que el ángulo que trazó es efectivamente recto y argumente por qué puede afirmar que lo es. Recuerde que sólo es válido doblar el papel. Para evitar tentaciones, recorte los bordes de la hoja, como se muestra en la siguiente ilustración:

Las únicas reglas para hacer trazos a partir del doblado de papel son las siguientes:

- No se pueden hacer trazos con lápiz en la hoja de papel antes de doblarla.
- Cada doblez de la hoja determina una recta y cada intersección de dobleces determina un punto, los cuales se marcan como referencia.
- Una vez terminada la actividad, se marca con lápiz el trazo o figura realizada.

Al construir la línea que pasa por un punto es posible que haya seguido el siguiente procedimiento: se marca un punto sobre el papel y se dobla la hoja de tal forma que en el borde del doblez esté el punto dibujado.

Observará que cualquier doblez genera una línea y cualesquiera dos dobleces que se empalman generan una intersección, es decir, un punto y cuatro ángulos.



Describa ahora, paso a paso, cómo realizar las siguientes construcciones:

1. Línea perpendicular a otra dada.
2. Línea perpendicular a otra dada, que pase por un punto dado.

Pista:

- ¿Cómo obtendría el punto medio de un segmento dado?
- ¿Cómo es la línea que se formó al hacer el doblez que le permitió obtener el punto medio con respecto a la línea dada?

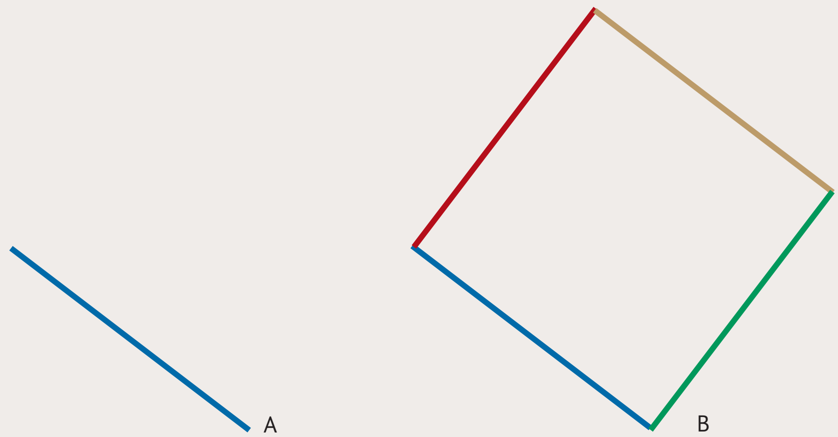
Ahora describa, paso a paso, el proceso que le permitirá construir una línea paralela a una recta dada, así como una línea paralela a otra que pase por un punto previamente determinado.

Teniendo como base estas construcciones y una vez que se haya familiarizado con la técnica del doblado de papel, contará con los elementos necesarios para realizar el trazo de las siguientes figuras, tomando en cuenta las condiciones de cada caso ya que exploró algunas de las propiedades de los cuadriláteros y la relación que hay entre sus lados, sus ángulos y sus diagonales.

Describa el proceso para llegar de la imagen A a la imagen B (página siguiente). Trace un cuadrado que tenga como lado el segmento de recta A.

Conteste:

- ¿Cómo obtuvo las rectas paralelas y las perpendiculares en cada caso?
- ¿Qué trazo le permite garantizar que los lados del cuadrilátero tengan la misma longitud?



A continuación, realice los trazos para obtener las siguientes figuras; luego, describa paso a paso los dobleces que hizo y cuál es el fin de cada uno de ellos.

- Dado un segmento de recta, trace un cuadrado que lo tenga como diagonal.
- Trace un rombo que no sea cuadrado.
- Trace un paralelogramo que no sea rectángulo ni rombo.
- Trace un trapecio isósceles.
- Dado un segmento de recta, construya un trapezoide que lo tenga como diagonal.

MEDIDA

Desde la aparición del ser humano sobre la Tierra, la necesidad de explorar el entorno para la comprensión de la naturaleza y las cosas generó la necesidad de medir. Por ejemplo, hay registros de mapas de aproximadamente 2 500 años de antigüedad en los que se marcan distancias entre lugares usando medidas corporales como el pie o el brazo, o bien, expresadas en número de jornadas solares. El trueque es otro ejemplo de medición, porque al intercambiar unos productos por otros había que conocer la cantidad exacta de éstos. La balanza es una herramienta que se ha usado para las medidas de peso desde alrededor de 3 000 a.C.; se tiene registro de su uso en Mesopotamia y Egipto. Las unidades de medición que utilizaban en ese entonces eran los granos de trigo.

En esta sección abordaremos uno de los temas más significativos en primaria: la medición. Si bien ya desde la educación preescolar los alumnos comienzan a trabajar algunos de los conceptos y temas que integran el concepto de medida, en primaria se da continuidad y se consolidan algunos temas en tanto que se inician otros.

Los temas de medida que se estudian en primaria son: medición de longitudes, superficies, volúmenes, capacidades, masas, ángulos y tiempo.

Longitud y superficie

Perímetro

¿Qué es el metro?, ¿cómo se define?, ¿cuándo y quién lo inventó?

En la antigüedad, los romanos marcaban las distancias largas usando cúmulos de piedras. Cada mil pasos ponían uno y así sucesivamente. A estos cúmulos les llamaban *miliarios* y proporcionaban una aproximación de las distancias entre los diferentes lugares de las poblaciones. También hay evidencia de que usaban partes del cuerpo para medir distancias. De hecho, el sistema inglés todavía usa este tipo de términos para medir longitudes: *pie* (la medida estándar de un pie humano), *pulgada* (medida de la falange de un pulgar), *yarda* (longitud de un brazo), entre otras.

La unidad de medida usada en el sistema métrico decimal es el *metro*. Esta palabra tiene su origen etimológico en la palabra griega μέτρον (léase *metrón*), que significa 'medida', y fue usada en Francia con el nombre de *mètre* como unidad de medida de longitud.

A lo largo del tiempo hubo varios intentos de unificar las unidades de medición. En 1789 se nombró una Comisión de Científicos en Francia con la finalidad de igualar las unidades de medida, peso y longitud. Acordaron medir un arco meridiano para establecer sobre él y, por lo tanto sobre la Tierra, la unidad de medida "metro". Los encargados de realizar los cálculos fueron Jean Baptiste, John Delambre y Pierre Méchain, quienes usaron un sistema de triángulos desde Dunkerque a Barcelona para establecer la medida "real" de dicho arco de meridiano y con esta medida determinaron cuál sería la longitud del metro. Algunas de las definiciones del metro que han establecido son:

- **1971.** Definición dada por la Academia de Ciencias francesa: "El metro es la diez millonésima parte de la distancia que separa el polo de la línea del Ecuador terrestre."
- **1889.** En septiembre de este año la Comisión Internacional de Pesos y Medidas realizó prototipos del metro, uno en platino y otro en iridio, para que sirvieran como modelo y se tuviera una referencia en caso de que se necesitara verificar que la longitud no sufriera cambios. Estos metros aún se encuentran en un pabellón subterráneo en Sèvres, en la Oficina de Pesos y Medidas en las afueras de París.
- **1960.** En la undécima conferencia de pesos y medidas se dio una nueva definición de metro: "1'650,763.73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación naranja del átomo del criptón 86." La precisión en esta medición es superior a la de 1889.
- **1983.** En la Conferencia General de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas se estableció que el metro es "la distancia que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de 1 299 792 458 de segundo".

La unidad de medida de longitud más común en el sistema métrico decimal es el metro, algunas de sus equivalencias respecto a otras unidades de medida son:

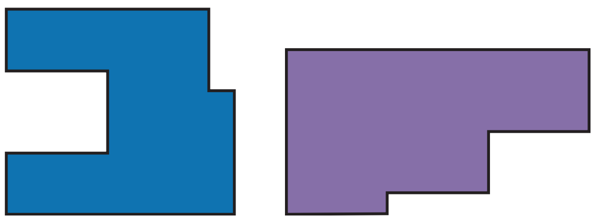
Para medidas pequeñas	
Nombre de la unidad de medida	*Equivalencia en metros*
Decímetro (dm)	Equivale a 0.1 metros o 1/10 de metro
Centímetro (cm)	Equivale a 0.01 metros o 1/100 de metro

Nombre de la unidad de medida	*Equivalencia en metros*
Milímetro (mm)	Equivale a 0.001 metros o 1/1 000 de metro
Micrómetro (µm)	Equivale a 0.000001 metros o 1/1 000 000 de metro

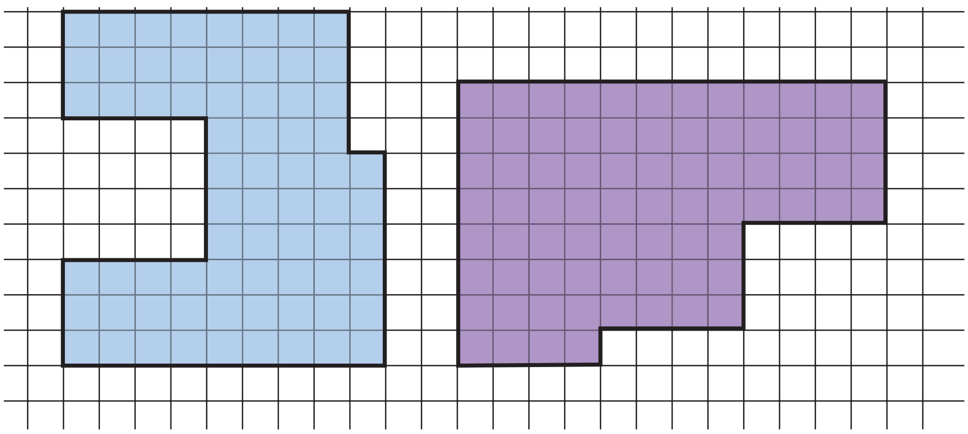
Para medidas grandes	
Nombre de la unidad de medida	*Equivalencia en metros*
Decámetro (dam)	Equivale a 10 metros o 10^1 metros
Hectómetro (hm)	Equivale a 100 metros o 10^2 metros
Kilometro (km)	Equivale a 1 000 metros o 10^3 metros
Megámetro (Mm)	Equivale a 1 000000 metros o 10^6 metros

¿Por qué y para qué medir? El hecho de medir usando una unidad de medida exacta y estándar es muy importante; si se continuara midiendo como en la antigüedad, ocurrirían muchas imprecisiones. Por ejemplo, si se compra un terreno rectangular de 50 pies de largo por 40 de ancho y resultara que al medirlo solamente mide 44 pies de largo por 35 de ancho seguramente será que los pies con los que se mide no son iguales.

El uso de imágenes de dibujos o figuras para medir es muy útil para la comprensión de regularidades de validación y verificación de fórmulas, entre otras. Por ejemplo, ¿cómo determinar cuál de las siguientes figuras tiene mayor perímetro sin usar una herramienta de medición? El *perímetro* de una figura es la medida que tiene su contorno.



Aunque parezca un problema difícil, a veces la respuesta es sencilla; en este caso nos auxiliaremos de una cuadrícula y, de esta manera, determinaremos la figura de perímetro menor.

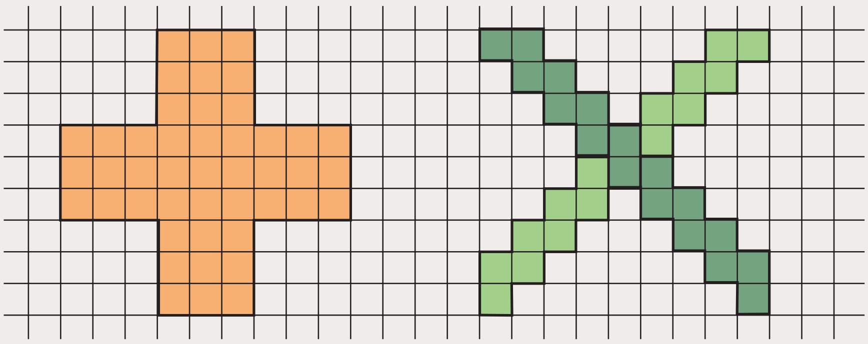


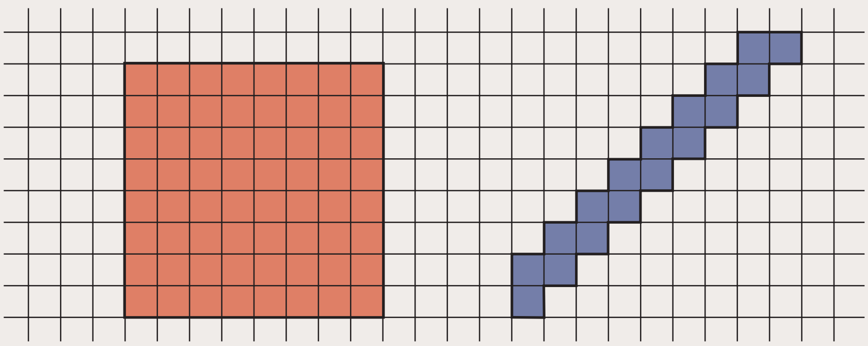
Anote el perímetro de cada una de las figuras:

- Figura azul: ______________________________
- Figura morada: ______________________________
- ¿Qué unidad de medida usó? ______________________________
- ¿Por qué eligió esa unidad? ______________________________

El cálculo de perímetros es un tema en donde los alumnos de primaria suelen cometer errores comunes. Para prepararlos mejor, le sugerimos que empiece con la siguiente actividad.

Anote cuál de las siguientes figuras tiene mayor perímetro, cuál menor y cuáles tienen el mismo perímetro.





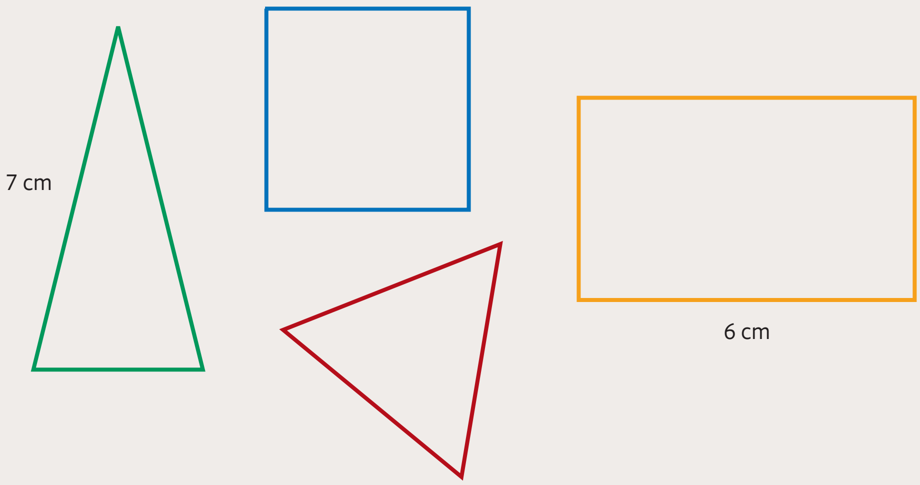
- Figura de perímetro menor: ______________________________
- Figura de perímetro mayor: ______________________________
- Figuras con el mismo perímetro: ______________________________
- ¿Por qué eligió esa unidad? ______________________________

Esta actividad prioriza la medición (no necesariamente precisa) por medio del conteo de la cuadrícula para determinar así el perímetro de cada una de las figuras.

Por otro lado, al sistematizar en la enseñanza el cálculo de perímetros hay que hacer énfasis en que se inicia el trabajo con las figuras más simples, es decir, aquellas formadas por líneas rectas. De este modo, el perímetro de una figura en la cual todos sus lados son segmentos de líneas rectas queda determinado por la suma de las medidas de cada lado.

El cálculo del perímetro de una figura se vincula con los temas de *sentido numérico* y *pensamiento algebraico*, porque en ocasiones, para resolver problemas de cálculo de perímetro, hay que resolver problemas de sumas y restas con los diferentes tipos de números que se conocen. Para ejemplificar esto le pedimos que resuelva el siguiente problema.

El perímetro de cada uno de los siguientes polígonos es de 18 cm; calcule la medida de los lados que faltan.

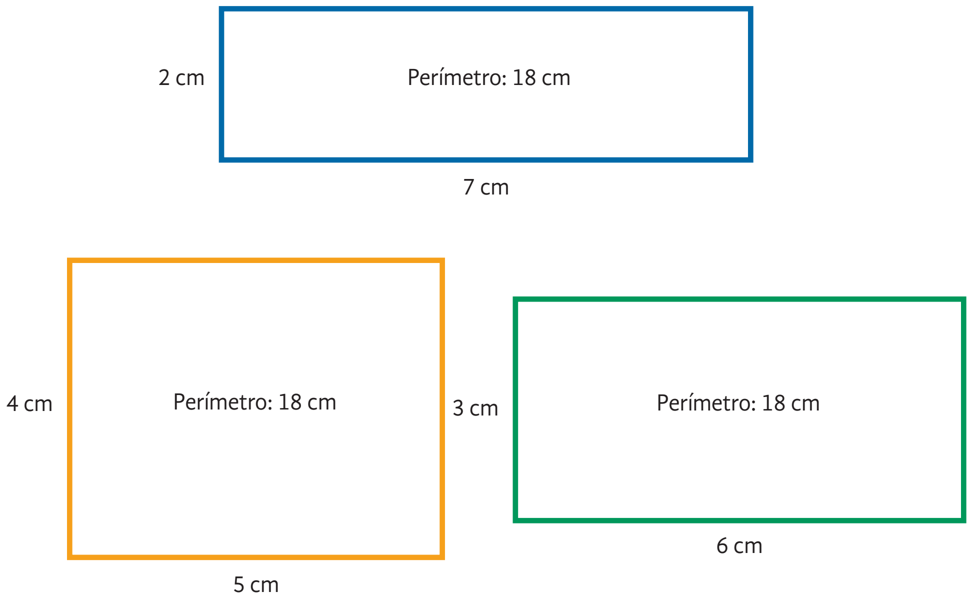


- Medidas del triángulo isósceles: ____________________
- Medidas del cuadrado: ____________________
- Medidas del rectángulo: ____________________
- Medidas del triángulo equilátero: ____________________

Además de saber operar con números para resolver este problema, se tienen que conocer algunas de las características de los polígonos, como que en un triángulo isósceles dos de sus lados miden lo mismo, o que en un rectángulo los lados opuestos tienen la misma medida.

Otro tipo de problemas significativos en el cálculo de perímetros de figuras consiste en dar el nombre de una figura, calcular el perímetro y pedir que la tracen para verificar. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente: trace un rectángulo cuyo perímetro sea de 12 cm.

Se supone que la medida de los lados del rectángulo es un número entero; por ejemplo, los siguientes rectángulos cumplen lo pedido.

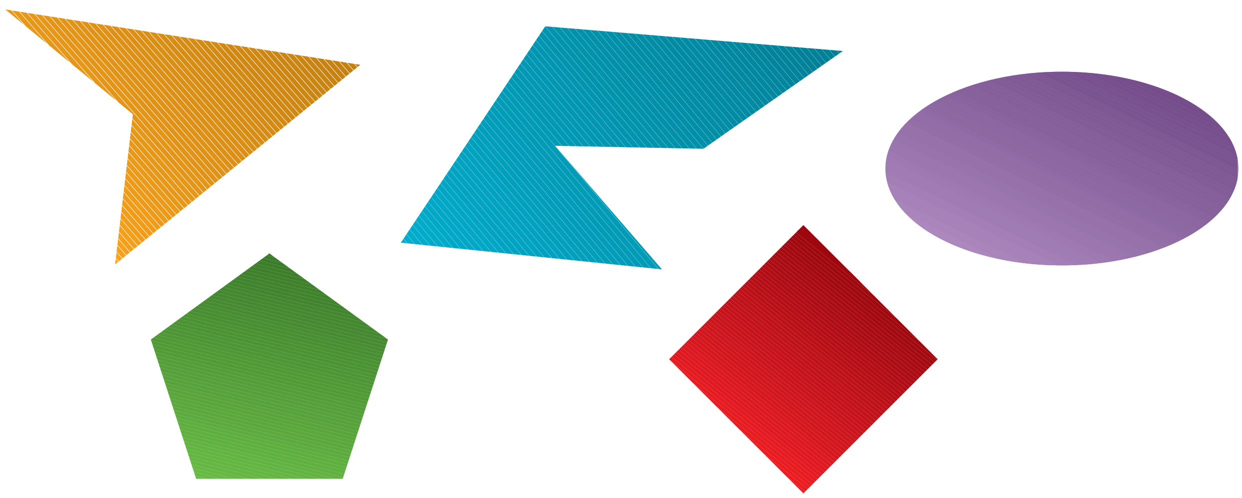


Este tipo de problemas ayuda a tener una mejor comprensión de la magnitud de situaciones que se presentan al explorar los perímetros de figuras. Lo anterior se resume diciendo que "hay figuras del mismo tipo (rectángulos) que tienen el mismo perímetro, pero no son idénticos". Más adelante se retomará esta frase para ampliar su significado.

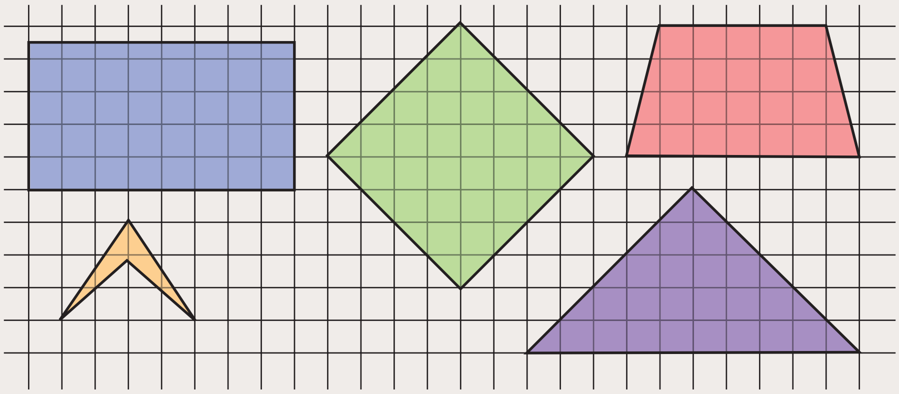
Área

El *área* de una figura es la cantidad de superficie que ocupa. ¿Cómo calcular el área de una figura?, ¿cómo son o cómo deben ser las unidades en que se mide el área?

Sin lugar a dudas no es tan natural que las unidades en las que se mide el área se llamen centímetros cuadrados, metros cuadrados, kilómetros cuadrados, etc. ¿Por qué?, ¿de dónde sale lo "cuadrado"?



En la siguiente cuadrícula se trazaron varias figuras; determine el número de cuadritos ☐ que abarca cada una de ellas.

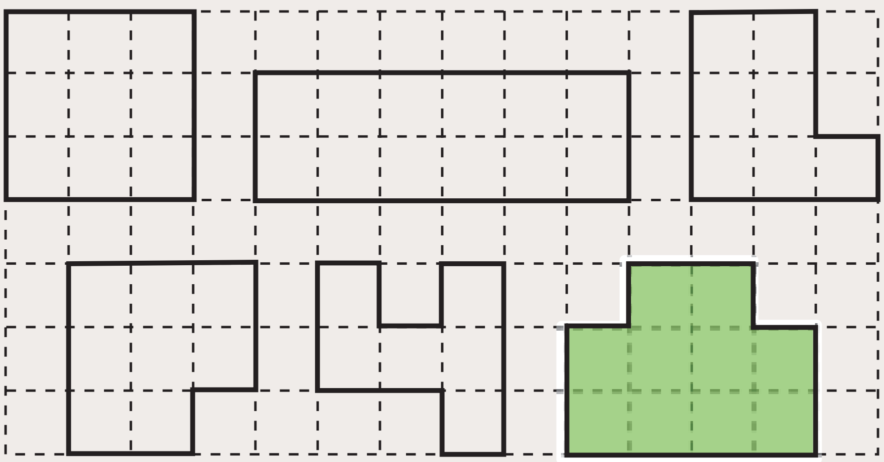


- Rectángulo: ___________________________
- Triángulo: ______________________________
- Cuadrado: ____________________________
- Trapecio: ________________________________

Usando una cuadrícula como la anterior podremos aproximar el área de figuras no geométricas. Asimismo, utilizando esta misma situación, señalaremos de manera puntual una de las razones por las cuales las unidades de medición de área son cuadráticas. Por ejemplo, en el cuadrado verde de la figura anterior caben 32 cuadraditos ☐; entonces podemos decir que tiene un área de 32 cuadrados.

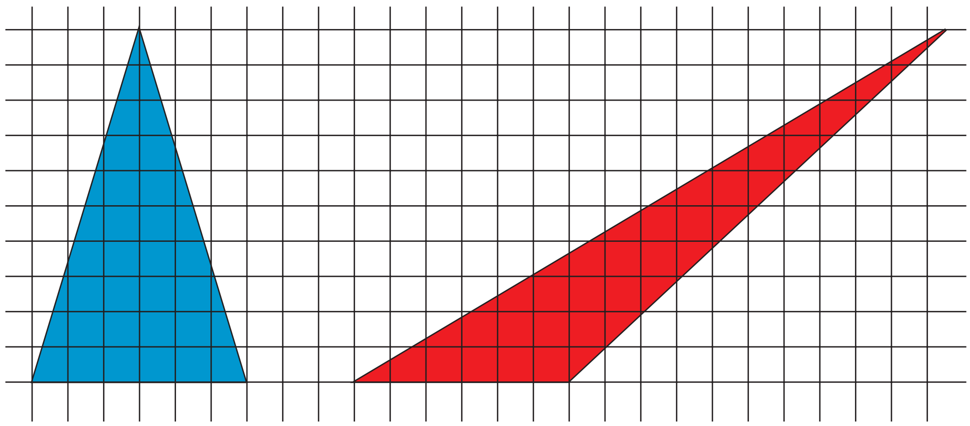
Así, un *centímetro cuadrado* es el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm. Un *decímetro cuadrado* es el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 dm; un *metro cuadrado* es el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 m y así sucesivamente.

Si el cuadrado ☐ mide 1 cm^2, calcule el área en centímetros cuadrados de las siguientes figuras:

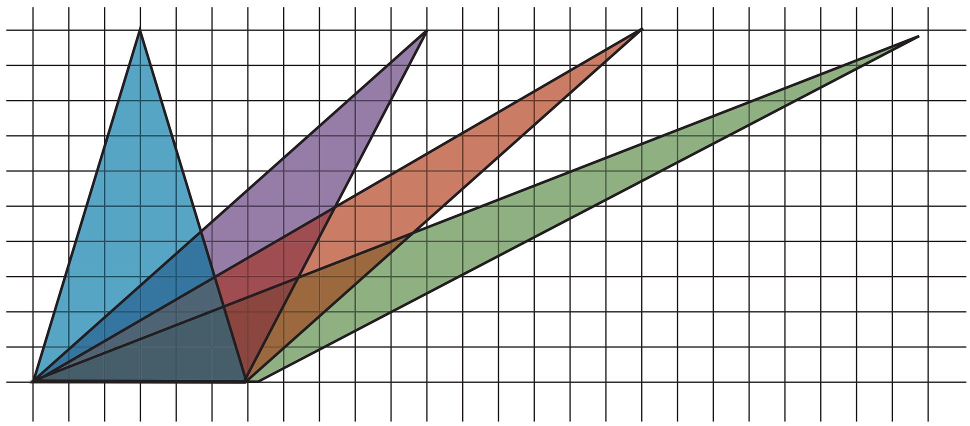


Una vez que nos apropiamos de algunas fórmulas para el cálculo de áreas, como la del triángulo —"el área de un triángulo es el producto de las medidas de su base y su altura entre dos"—, surge una gran diversidad de tipos de problemas sencillos, pero ingeniosos de resolver.

Por ejemplo, si ponemos los dibujos de los dos triángulos de la siguiente imagen y preguntamos cuál de ellos tiene mayor área, parecería un problema complicado de resolver: tendríamos que medir y, si los instrumentos de medición que usamos no son precisos, obtendríamos resultados erróneos.

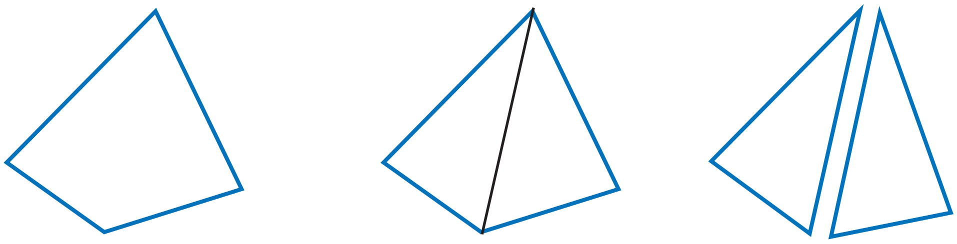


Sin embargo, una observación sencilla de las figuras nos indica que las medidas de la base y de la altura en ambos triángulos son iguales, es decir, ambos triángulos tienen la misma área. De hecho, si la cuadrícula fuera más grande, encontraríamos más triángulos con la misma superficie pero con formas diferentes. Por ejemplo, todos los triángulos del siguiente dibujo tienen la misma área.

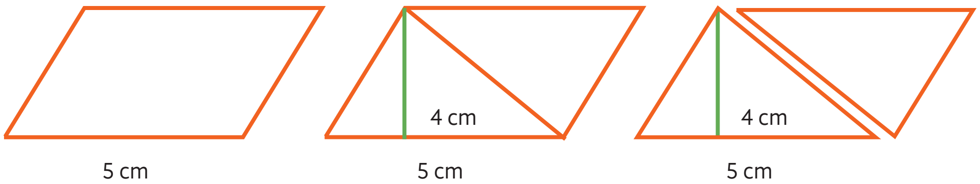


A partir de la fórmula para calcular el área del triángulo es posible derivar fórmulas para calcular el área de muchas otras figuras.

Para un cuadrilátero, basta trazar una diagonal para que éste sea dividido en dos triángulos; así, para calcular el área del cuadrilátero hay que calcular el área de cada uno de los triángulos.

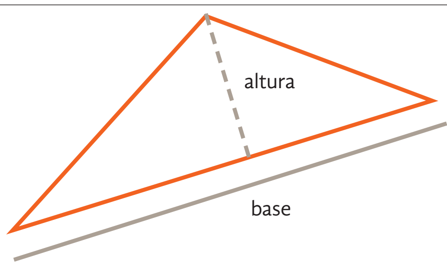
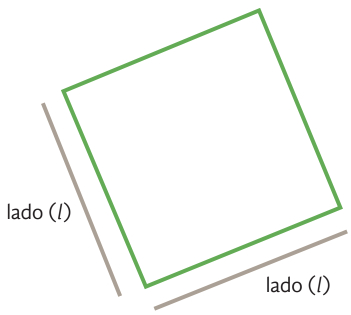


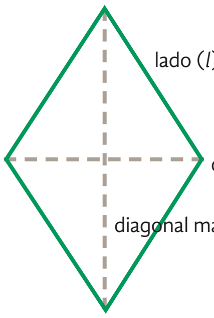
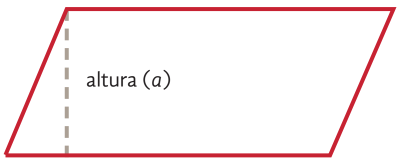
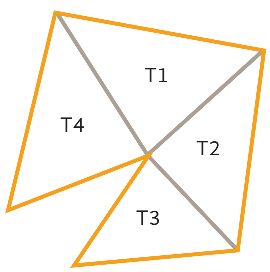
Para encontrar una fórmula para calcular el área de un paralelogramo se traza alguna de las diagonales, dividiéndolo también en dos triángulos idénticos.



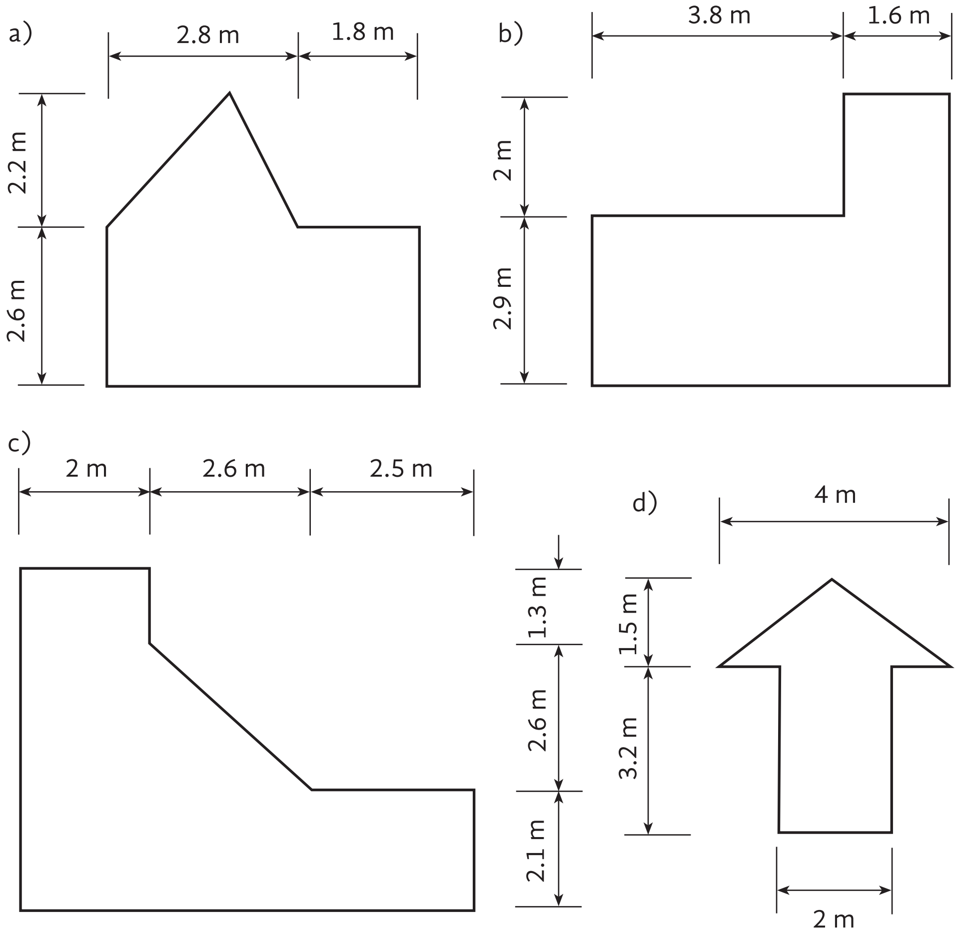
Así, el área del paralelogramo es dos veces el área del triángulo que se forma (porque se forman dos triángulos iguales), pero el área del triángulo es el producto de la base por la altura entre dos [Área = $(b \times a)/2$]; entonces el área del paralelogramo es el producto de la base por la altura.

Algunas de las fórmulas para calcular el área de las figuras geométricas más comunes son:

Nombre	*Dibujo*	*Área*	*Perímetro*
Triángulo		Base por altura dividido entre 2 área = $(a \times b)/2$	Suma de la medida de sus tres lados
Cuadrado		Producto de sus lados área = $l \times l = l^2$	Suma de la medida de sus lados $P = l + l + l + l = 4l$

Nombre	*Dibujo*	*Área*	*Perímetro*
Rectángulo		Producto de la base y la altura área = $a \times b$	Suma de la medida de sus lados $P = a + b + a + b = 2\,(a + b)$
Rombo		Producto de las diagonales dividido entre 2 área = $(m \times n)/2$	Suma de la medida de sus lados $P = l + l + l + l = 4l$
Romboide		Producto de la base y la altura área = $a \times b$	Suma de la medida de sus lados
Trapecio isósceles		Producto de la suma de sus dos bases dividido entre 2 y multiplicado por la altura área = $(B + b)/2 \times a$	Suma de la medida de sus lados
Cuadrilátero irregular		Se triangula el polígono y se suman las áreas área = $T1 + T2 + T3 + T4$	Suma de la medida de sus lados

Calcule el área y el perímetro de cada uno de los terrenos que se presentan en las figuras de la página siguiente.



Uno de los problemas que la cultura griega intentó resolver fue el de encontrar un cuadrado (o rectángulo) cuya área fuera la misma que la de una circunferencia con un radio dado usando solamente regla (no graduada) y compás. Por ejemplo, si el radio era 1, intentaban construir un rectángulo cuya área fuera la de la circunferencia de radio 1 (en este caso, la circunferencia tendría π unidades cuadradas de área). Sin embargo, no pudieron hacerlo, aunque las aproximaciones que dieron, sin duda alguna, son muy ingeniosas. Respecto a esta construcción, en 1882, el matemático francés Évariste Galois, de 20 años de edad, sorprendió a toda la comunidad científica probando que dicha construcción es imposible.

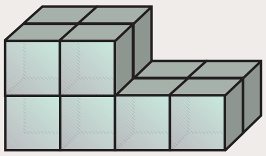
Volumen y capacidad

Volumen

El *volumen* de un cuerpo está definido como la cantidad de espacio que ocupa, pero, ¿qué significado tiene la palabra *espacio* en la definición si queremos saber el volumen de un cuerpo específico?, ¿cómo lo calculamos?, ¿cuáles son las unidades en las que se mide?

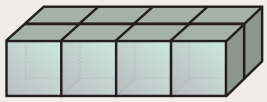
Sin lugar a dudas, este tema resulta un tanto difícil de estudiar sobre todo si comenzamos calculando el volumen de cuerpos o figuras complejas o si se estudian fórmulas desde el inicio. No obstante, si realizamos ejercicios como los que se presentan a continuación será posible construir y consolidar los conceptos además de que se promoverá la deducción de fórmulas para calcular el volumen de algunos cuerpos geométricos.

Determine el número de cubos que forman cada una de las figuras siguientes:



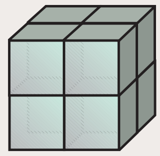
Número de cubos

____



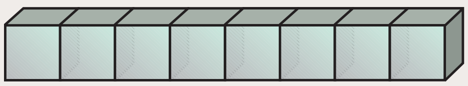
Número de cubos

____



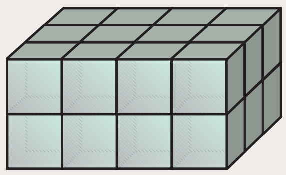
Número de cubos

____



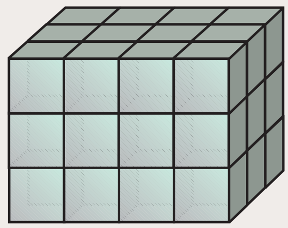
Número de cubos

____



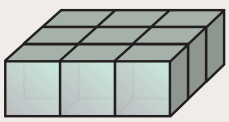
Número de cubos

____



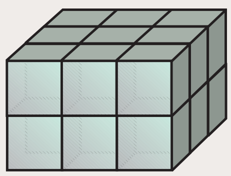
Número de cubos

____



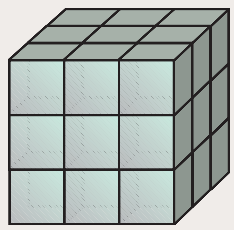
Número de cubos

____



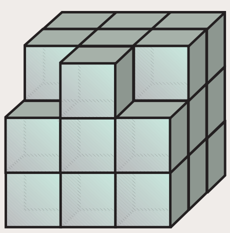
Número de cubos

____



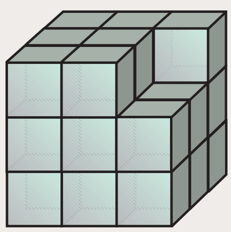
Número de cubos

____



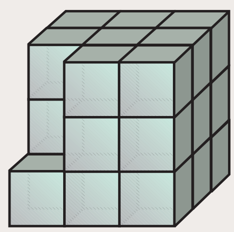
Número de cubos

____



Número de cubos

____



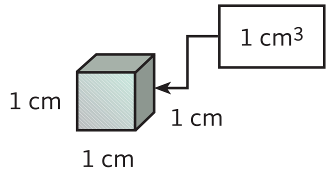
Número de cubos

____

Es importante notar que figuras y cuerpos con diferentes formas pueden estar constituidos por el mismo número de cubos.

- ¿Qué cuerpos de los anteriores están formados por el mismo número de cubos?
- Dibuje cuatro figuras con formas diferentes que estén formados por diez cubos.
- ¿Con cuántos cubos está formado un prisma rectangular que tiene tres cubos de frente, dos de ancho y cuatro de altura?

Si la medida de la arista del cubo con la que se forman las figuras mide un centímetro, entonces al cubo se le llama cubo unitario y se dice que su volumen es de un centímetro cúbico, que se escribe 1 cm^3.



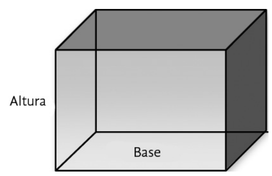
Escriba en centímetros cúbicos el volumen de las figuras de la p. 123.

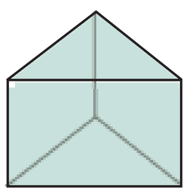
Este sistema de figuras formadas por cubos se comprende mejor si en lugar de dibujos formamos las figuras con cubos reales; por ejemplo, al hacer figuras diferentes con 20 cubos comprendemos que el volumen de una figura no depende de la forma.

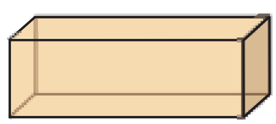
Uno de los errores comunes que cometen los alumnos al estudiar el volumen es creer que las figuras más altas tienen mayor volumen que las que son más pequeñas. Con este tipo de materiales los alumnos descartarán este tipo de ideas.

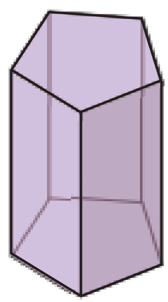
Otra consideración importante al trabajar con materiales de este tipo es el hecho de que, al formar figuras con cubos, las fórmulas para calcular el volumen de prismas rectangulares y cubos se pueden deducir. Si bien no se pretende que en la primaria se deduzcan y trabajen volúmenes de pirámides o de otros cuerpos irregulares, sí es objetivo de ésta el que se establezcan las bases para el trabajo posterior.

Por ejemplo, una vez que se determina que el área de un prisma rectangular es el producto del área de la base por la altura, se puede de manera natural extender la fórmula para el cálculo del volumen del prisma recto, el producto del área de su base por la altura.




Prisma triangular, base triángulo


Prisma rectangular, base rectángulo


Prisma pentagonal, base pentágono

Pero, ¿cómo calcular el volumen de un cuerpo irregular como una piedra, un juguete o un pan? Parecería un problema muy difícil de resolver; siquiera aproximarse parece complicado.

Sin embargo, hay un procedimiento muy usado para encontrar el volumen de cuerpos irregulares. Para ello es necesario establecer un concepto estrechamente vinculado con el de volumen: el de *capacidad*.

La capacidad de un recipiente es la cantidad de materia (agua, arena, semillas, etc.) que contiene. La diferencia entre el volumen y la capacidad es que el volumen es el espacio que ocupa el objeto.

Por ejemplo, en una caja de cartón que está abierta y cuyas medidas son un metro de largo, un metro de ancho y dos metros de altura:

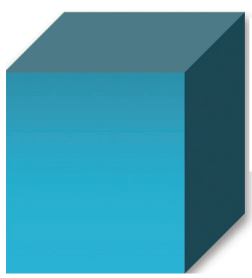
- ¿Cuál es su volumen?____________________________

- ¿Si la caja se cierra el volumen cambia o es el mismo?

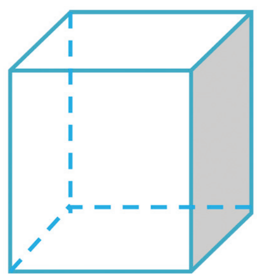
Si respondió que el volumen de la caja es de 2 metros cúbicos, es importante que verifique la definición de volumen, porque el espacio que ocupa la caja es el "espacio que ocupa el cuerpo". En este caso, el volumen de la caja abierta o cerrada es el mismo porque, al aplicar la definición, solamente el material del que esté hecha (cartón, plástico o madera) es lo que ocupa espacio. Pero, ¿qué pasa si la caja está llena de arena o semillas o algún otro producto?

Conteste a la pregunta: ¿el volumen de la caja cambia o no?

Por supuesto que el volumen de la caja es el mismo, esté llena o vacía. Lo que sucede es que la caja tiene la cualidad de contener otras cosas, es decir, la caja es un recipiente. En conclusión, la caja no tiene volumen (hay que recordar que estamos considerando que lo que tiene volumen es de lo que está hecha, por ejemplo, de cartón), pero la caja está hueca y sí tiene capacidad.



Si la caja es sólida, su volumen es el espacio que ocupa la caja.



Si la caja es hueca, su volumen es solamente el espacio que ocupan las caras de la caja, y su capacidad es todo lo que contiene.

Otro ejemplo que podemos considerar es el de una alberca vacía de 10 metros de largo por 20 de ancho y 2 de profundidad. Cuando la alberca está llena, estamos tentados a decir: "el volumen de la alberca es de 400 metros cúbicos" ($400 = 10 \times 20 \times 2$); sin embargo, este enunciado encierra un error porque la alberca no está *hecha de agua*, sino que *la contiene*. El agua que está en la alberca efectivamente tiene un volumen de 400 metros cúbicos, no la alberca. En todo caso, se dirá que la alberca *contiene* 400 metros cúbicos de agua.

Así como la definición del metro ha tenido su historia, adaptaciones y cambios, también el litro —la unidad de medida de capacidad— ha tenido cambios a lo largo de los años. En 1879, la Oficina Internacional de Pesos y Medidas estableció la definición de lo que es un litro: "la unidad de capacidad que es equivalente al espacio ocupado por un decímetro cúbico*". Su uso fue aceptado en el Sistema Internacional de Unidades.

En 1901, un litro fue descrito como "el volumen ocupado por una masa de un kilogramo de agua pura en su máxima densidad y presión normal". Esta definición de litro fue desechada en 1964 porque había una diferencia con el decímetro cúbico en aproximadamente 28 partes de millón, del orden de 0.0000028, que aunque es un número muy pequeño, en grandes cantidades provocaba errores de consideración.

El símbolo usado para denotar al litro como unidad de medida es la letra *l*, aunque en ocasiones se puede confundir con el número uno y, en ese caso, se usa mayúscula (L) u otra tipografía (ℓ).

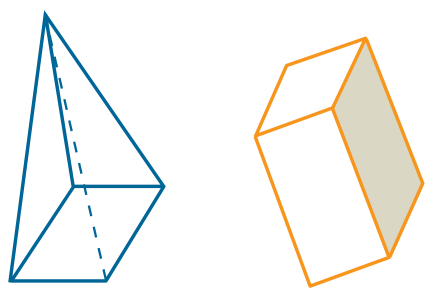
Hay una estrecha relación entre las unidades de volumen y las de capacidad, porque la capacidad se define en función de un decímetro cúbico; por ejemplo, un mililitro es la capacidad que tiene el cubo cuya arista mide un centímetro.

Un error común que cometen los alumnos es creer que en un litro de agua caben 100 mililitros o que en un metro cúbico caben 100 litros. Una actividad recomendable para llevar a cabo consiste en construir un cubo de un decímetro de arista y uno de un metro de arista e ir introduciendo los cubos de un decímetro en el de un metro para darse cuenta de cuántos caben.

Anteriormente mencionamos que es difícil calcular el volumen de ciertos cuerpos. En este momento nos encontramos en condiciones de retomar este cálculo.

¿Cómo obtener el volumen de una piedra? Una forma muy simple es poner agua en un recipiente graduado (una jeringa, un biberón e incluso algunas jarras) y registrar la capacidad que ocupa. Luego introducimos la piedra y registramos nuevamente la capacidad marcada en el recipiente; finalmente obtenemos la diferencia entre las dos cantidades obtenidas y el resultado será el volumen de la piedra.

La capacidad de los objetos puede utilizarse para el cálculo de volúmenes de figuras, como las pirámides. Por ejemplo, si tenemos una pirámide cuadrangular como la del siguiente dibujo, es conveniente construir un prisma rectangular con la misma base y altura de la pirámide.



* Un decímetro cúbico es el volumen que ocupa un cubo cuyas aristas miden cada una 10 centímetros.

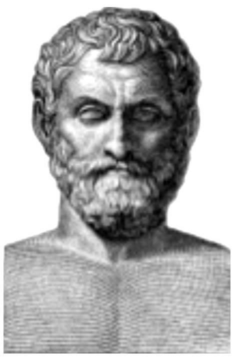
Si llenamos la pirámide de arena fina y la vaciamos en el prisma nos daremos cuenta de que este procedimiento se puede hacer tres veces, es decir, el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma.

Como ya mencionamos, la unidad de medida de capacidad más común en el sistema internacional de medidas es el litro. Algunas de sus equivalencias respecto a otras unidades de capacidad son:

Para medidas pequeñas	
Nombre de la unidad de medida	*Equivalencia en litros*
Decilitro (dl)	Equivale a 0.1 litro o 1/10 de litro
Centilitro (cl)	Equivale a 0.01 litro o 1/100 de litro
Mililitro (ml)	Equivale a 0.001 litro o 1/1 000 de litro
Microlitro (ul)	Equivale a 0.000001 litro o 1/1 000 000 de litro

Para medidas grandes	
Nombre de la unidad de medida	*Equivalencia en litros*
Decalitro (dal)	Equivale a 10 litros o 10^1 litros
Hectolitro (hl)	Equivale a 100 litros o 10^2 litros
Kilolitro (kl)	Equivale a 1 000 litros o 10^3 litros

Ángulos



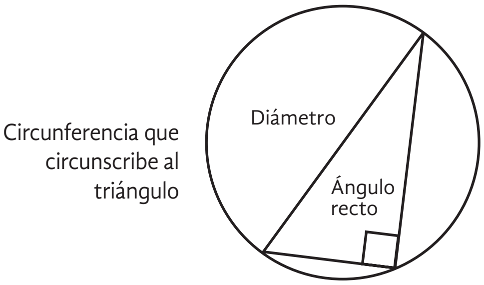
Tales de Mileto, filósofo griego que contribuyó en gran parte al desarrollo de la geometría.

Gran parte del desarrollo de los conceptos geométricos tiene su inicio en el Medio Oriente y muy particularmente en el antiguo Egipto; la necesidad de medir predios agrarios y de construir pirámides y monumentos fue, sin lugar a dudas, lo que contribuyó al desarrollo de esta disciplina. Si bien en sus orígenes el estudio de la geometría no manifestaba la necesidad puntual de estudiar las propiedades de las figuras geométricas, las propiedades y la belleza de las formas creadas se reflejaban principalmente en sus construcciones.

Posteriormente, los conocimientos geométricos desarrollados en Egipto fueron llevados a Grecia por Tales de Mileto.[3] Aunque no son hechos del todo seguros, en la actualidad se le atribuyen varios teoremas. De entre ellos los más notables son:

- Un triángulo que tiene por lado el diámetro de la circunferencia que lo circunscribe es un triángulo rectángulo (p. 133).
- Cualquier diámetro divide cualquier círculo en dos partes iguales.
- Un triángulo isósceles tiene ángulos iguales en su base.
- Las relaciones que se forman entre los ángulos formados al cortar dos rectas paralelas por una perpendicular.

[3] Tales de Mileto (630-545 a.C.) es considerado uno de los primeros filósofos de Occidente y fundador de la escuela jónica, según los testimoniales recogidos por Aristóteles. Fue conocido como el sabio astrónomo y uno de los siete sabios de Grecia; se dice que uno de sus discípulos y protegidos fue Pitágoras. Es considerado uno de los más grandes matemáticos de su época por sus importantes aportaciones a los fundamentos de la geometría.

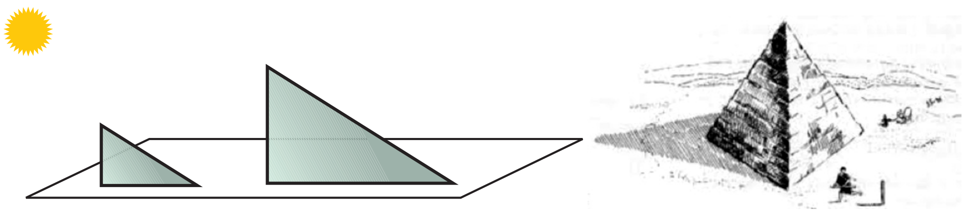


Triángulo rectángulo dentro de una circunferencia.

También es muy conocida la historia acerca del método de comparación de sombras que usó Tales de Mileto para medir la altura de las pirámides de Egipto, el cual se explica de la siguiente forma:

Si una vara es clavada al piso y a cierta hora del día da una sombra de un metro de longitud, entonces una vara del doble de tamaño dará una sombra de dos metros de longitud y una vara del triple de tamaño dará una sombra de tres metros, y así sucesivamente.

Por lo tanto, para determinar la altura de una pirámide había que clavar una vara en el piso y medir cuántas veces cabía su sombra en la sombra de la pirámide y ése era el número de varas que medía la pirámide de altura.

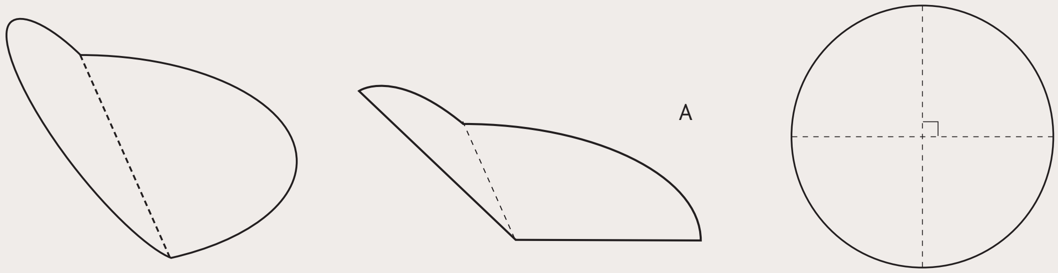


Se considera que en esta época se inicia la geometría demostrativa, es decir, la prueba o justificación de las propiedades de las figuras por medio de razonamientos y no porque resulten de la práctica. Las demostraciones pasan a ser fundamentales y la lógica comienza por consolidarse como la base del razonamiento y la abstracción del pensamiento.

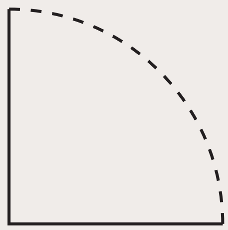
Una de las citas más celebres de Tales de Mileto es: "La esperanza es el único bien común a todos los hombres; los que todo lo han perdido, la poseen aún."

Resuelva lo siguiente:

Usando un transportador trace dos círculos, uno con un radio de 5 cm y el otro con radio de 10 cm. A continuación, dóblelos como se indica y marque el ángulo del círculo de radio de 5 cm con la letra A y el de radio de 10 cm con la letra B.



- ¿Qué ángulo es mayor?____
- Si una circunferencia de radio de 1 m se dobla de la misma manera que se indicó, ¿el ángulo que se forma es mayor, menor o igual al que se formó en las otras dos? ____

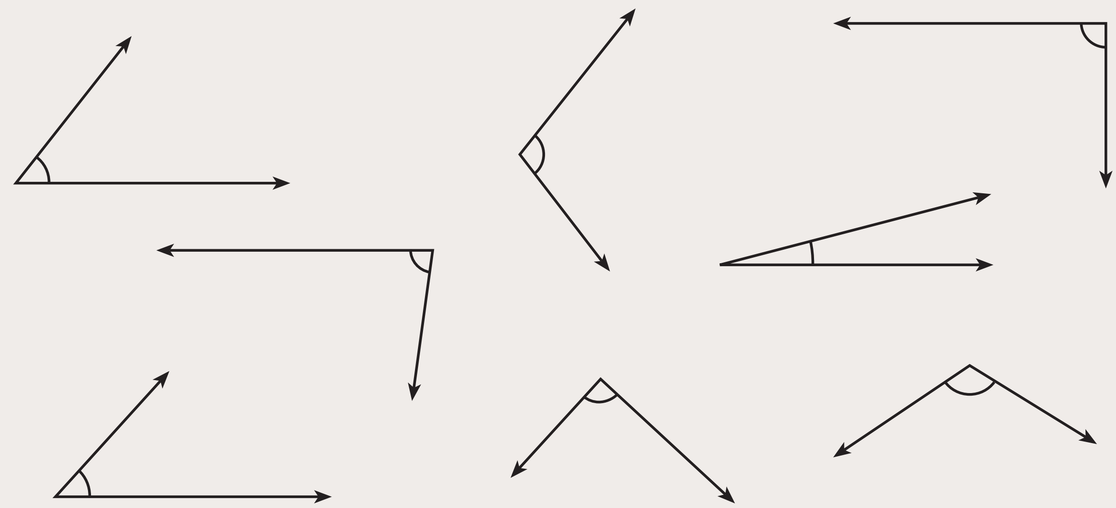


El ángulo que se formó al doblar la circunferencia, como se indicó, se llama ángulo recto.

Compare si el ángulo recto que se construyó es mayor o menor que los ángulos formados por las esquinas del libro, las esquinas de la mesa, los mosaicos del piso o las esquinas de las ventanas.

Las figuras y los conceptos geométricos se logran entender de mejor manera cuando formamos parte de éstos; la manipulación y construcción permiten una mejor reflexión acerca de lo que queremos aprender. Por ejemplo, el ángulo formado en la actividad anterior nos permite comprender que su medida no depende del tamaño de los segmentos de recta que lo forman, sino de la abertura entre éstos. Además, la comparación de este ángulo con objetos de nuestro entorno nos permite determinar que éste es uno de los ángulos más comunes y por tal motivo requiere de atención especial.

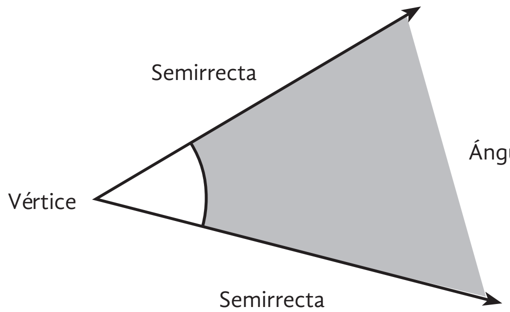
Usando uno de los ángulos rectos que construyó, mida cada uno de los siguientes y anote si el ángulo es mayor, menor o igual al ángulo recto.



Nota: Antes de medir cada uno de los ángulos le sugerimos predecir si va a ser mayor, menor o igual; luego mida.

Los ángulos se clasifican en aquellos que miden menos que un ángulo recto, los que miden más de un ángulo recto y los que miden lo mismo. Así, un *ángulo agudo* es un ángulo cuya medida (abertura) es menor que un ángulo recto. Un *ángulo obtuso* es aquel cuya medida (abertura) es mayor a la de un ángulo recto. Cabe mencionar que un ángulo obtuso debe medir menos que dos ángulos rectos. Más adelante se dará una clasificación completa de los ángulos.

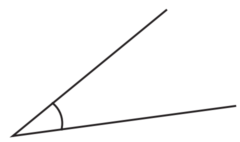
Formalmente, un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un mismo punto de origen o vértice.



Algunas definiciones históricas son:

- Euclides decía que un ángulo es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
- Proclo indicaba que un ángulo debe ser una cantidad o una relación.
- Eudemo de Rodas mencionó que un ángulo es la desviación de una línea recta.

Si entendemos un ángulo como la región comprendida entre dos semirrectas que concurren en un punto o como la abertura entre dos semirrectas, cabe indicar que el tamaño de la abertura es importante. Por ejemplo, la abertura de un ángulo agudo es menor que la del ángulo recto. Al tamaño de la abertura de un ángulo se le llama *medida del ángulo*.

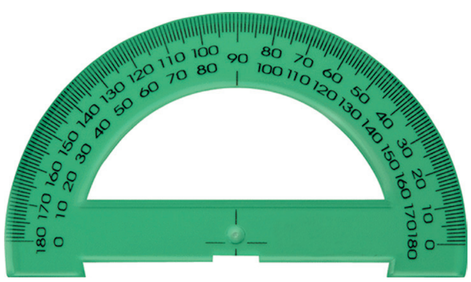


Un ángulo es la abertura que hay entre dos segmentos de recta.

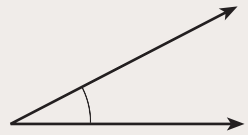
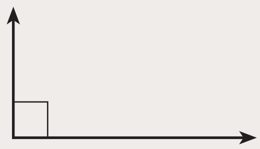
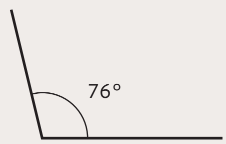
Las unidades de medición de los ángulos son:

- Radian: su uso es oficial en el Sistema Internacional de Medidas.
- Grado centesimal.
- Grado sexagesimal.

El instrumento más común para medir ángulos es el transportador.

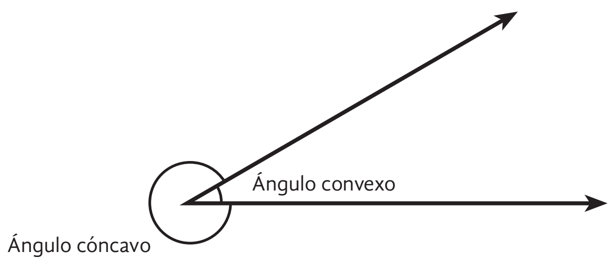


La clasificación de los ángulos respecto a su medida es:

Clasificación	*Imagen*
Ángulo agudo En radianes: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud mayor a 0 radianes y menor a $\pi/2$ radianes. En grados: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud mayor a 0° y menor a 90°.	
Ángulo recto En radianes: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud igual a $\pi/2$ radianes. En grados: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud igual a 90°.	
Ángulo obtuso En radianes: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud mayor a $\pi/2$ radianes y menor a π radianes. En grados: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud mayor a 90° y menor a 180°.	
Ángulo llano, extendido o colineal En radianes: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud igual a π radianes. En grados: es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud igual a 180°.	
Ángulo oblicuo Ángulo que no es ni recto ni suma de rectos.	

Los ángulos también se clasifican en cóncavos y convexos. Cuando se intersecan dos rectas en el plano (no coincidentes ni alineadas) se forman dos ángulos con medidas diferentes:

- Al ángulo que mide menos de π radianes o 180° se le llama *ángulo convexo* o *saliente*.
- Al ángulo que mide más de π radianes o 180° pero menos de 2π radianes o 360° se le llama *ángulo cóncavo* o *entrante*.



En la escuela primaria, el estudio de la geometría busca que el estudiante tenga la capacidad y habilidad para explorar, conocer e identificar las propiedades y características del espacio y sus elementos e interactuar y desenvolverse en él. Es decir, que los alumnos se familiaricen con los objetos geométricos, los manipulen, los midan y usen el conocimiento de sus propiedades para la resolución de los problemas que se les presenten. Por eso es importante que, desde el inicio de su formación, fomente este tipo de trabajo con los estudiantes, que sus actividades vayan encaminadas a la manipulación, la observación, la descripción, la caracterización y el análisis de los objetos geométricos que les rodean. Además —aunque no fue un tema tratado en estos apartados— conviene que los estudiantes no sólo aprendan a explorar el espacio que les rodea a partir del análisis de las propiedades de los elementos que lo componen, sino también de sus relaciones, su ubicación y sus trayectorias. El uso de mapas y representaciones planas, así como de descripciones verbales, ayudan a que esto se logre.

TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

Para comprender la información que contiene una gran cantidad de datos se requiere de una sistematización. Uno de los primeros momentos de la historia en donde se recabaron datos fue el censo, que es un procedimiento de recuento de individuos que cumplen con ciertas características.

El primer censo del que se tiene noticia en México se realizó en el año 1116 d. C. durante la segunda migración chichimeca al Valle del Anáhuac. Siglos más tarde, los virreyes españoles mandaron a hacer varios conteos de población; el primer censo del México independiente tuvo lugar en 1831 y el último censo del siglo XIX se hizo en 1895, durante la presidencia de Porfirio Díaz.

Se sabe que en Egipto se realizaron censos con diferentes propósitos, como la administración tributaria. En Roma hubo la necesidad de hacer censos de propiedades que se revisaban cada cuatro años debido al sistema de organización de su ejército, el cual se dividía en cinco clases de acuerdo con el número y valor de las posesiones de la familia de procedencia de los reclutados. A partir de estos censos se dio una nueva estratificación social: propietarios y proletarios, además de la ya existente, plebeyos y patricios. Los censos eran tan importantes en Roma que surgió el censor, quien se encargaba de empadronar a la población para conocer el número de habitantes en los diferentes territorios romanos, principalmente para el cobro de impuestos.

> ☛ Además de estos ejemplos históricamente importantes, ¿en qué otras situaciones se recaban cantidades importantes de información?

Actualmente se estudia información relacionada con muy diversas cosas, por ejemplo, el número de cúmulos de cada galaxia, la mutación de los virus y sus efectos patológicos, los diferentes tipos e intensidades de reacción de los pacientes ante los medicamentos, la cantidad de partículas suspendidas en el aire, los hábitos de los consumidores, la cantidad de morosos en distintos tipos de préstamos, nivel o porcentaje de audiencia de distintos programas de televisión, las características de los usuarios de las redes sociales, los hábitos de la migración de los animales, las características físicas de los distintos materiales, los procesos de degradación de los bosques y de todo aquello que es de interés para la humanidad, entre otras.

Seguramente usted puede pensar en varias de estas situaciones en las que el manejo de una cantidad grande de información es importante.

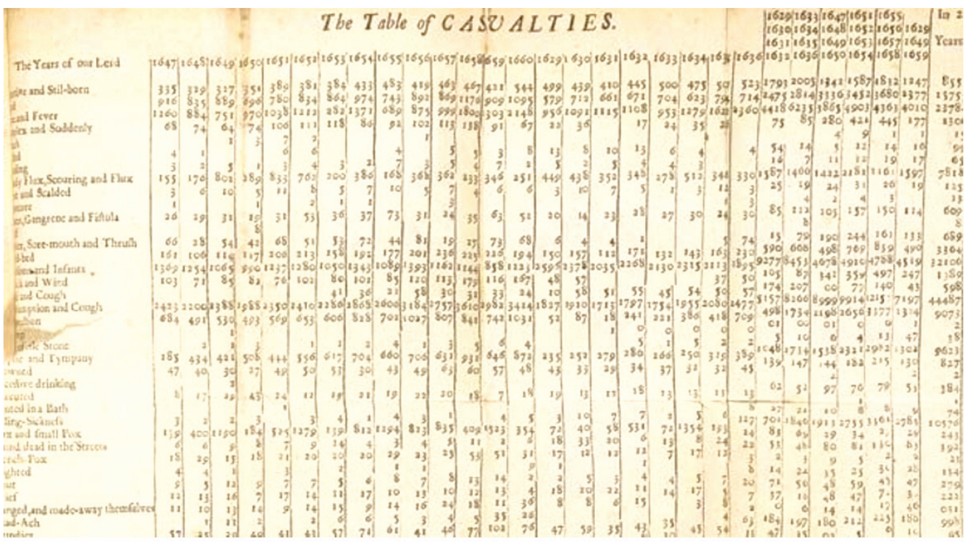
El tratamiento de la información es una de las fases de la estadística. La estadística es la rama de las matemáticas que se ocupa de la obtención, medición e interpretación de la información a partir de datos con el fin de tomar decisiones, de ahí su importancia.

Para tratar algunos de los conceptos fundamentales de la estadística, en este capítulo consideramos conveniente incorporarlos paulatina y progresivamente mediante casos concretos en los que se ilustre la necesidad de su utilización. Asimismo, a lo largo de los casos presentaremos algunas sugerencias y observaciones que creemos pueden ser de interés para el maestro de primaria. Todas las gráficas incluidas en los apartados "Recolección, organización y presentación de información" y "Análisis de la información" pueden ser consultadas en la página <http://arquimedes.matem.unam.mx/primaria/2012_FC_AMITE/>.

RECOLECCIÓN, ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Algunos de los episodios más afortunados en el desarrollo de la ciencia se dieron en contextos histórico-sociales de grandes tragedias. Tal es el caso de un muchacho de 22 años que tuvo que regresar a casa cuando la universidad de Cambridge cerró sus puertas debido a una epidemia de peste bubónica. El tiempo que pasó el joven Isaac Newton encerrado en su casa se considera uno de los periodos de creatividad científica más prolíficos en la historia de la ciencia, aunque representa un episodio trágico para miles de familias que perdieron a sus seres queridos en una ola de muerte que mermó significativamente a la población inglesa de esa época.

El edicto real de Charles II, que ordenaba a la gente recluirse en sus casas y cerrar los lugares públicos, bien pudo tener su origen en algunas advertencias de salud pública realizadas tres años antes por un comerciante inglés, quien publicó en 1622 un libro titulado *Observaciones naturales y políticas basadas en el conteo de mortalidad*, en el que describe sus hallazgos acerca de algunos patrones de regularidad al organizar datos aleatorios de los fallecimientos registrados en las iglesias londinenses a lo largo de varios años. Este hombre se llamaba John Graunt (Londres, 1620-1674) y su pujante negocio de te-


The Table of CASUALTIES.

▲ **Figura 1** | John Graunt, comerciante inglés.

▶ **Figura 2** | Tablas de morbilidad.

las y mercería lo había hecho muy influyente en la sociedad de aquella época. Graunt era un hombre con una gran curiosidad que se interesó por saber cuántas personas morían a causa de la peste bubónica que comenzaba a expandirse en Londres. Pero su curiosidad lo llevó aún más allá y, con ayuda de su alumno William Petty, extendió sus investigaciones para saber cuántos londinenses fallecían en un periodo de tiempo determinado y cuál era la causa de su muerte (figura 2).

El trabajo de Graunt es considerado como el inicio metodológico formal de la estadística. A este hombre de negocios, que empleaba y gustaba de las matemáticas, se le atribuye la paternidad de la demografía y de la epidemiología porque fue el primero en expresar las probabilidades de supervivencia por grupos de edad, así como las principales enfermedades o accidentes que las causaban. Para hacerlo empleó aritmética básica, organización y clasificación de la información y representación gráfica de datos, expresando afirmaciones fundamentadas de manera muy clara y dando a los números un significado social que sirvió al Estado para comenzar a atender cuestiones de salud pública. Las conjeturas de Graunt sentaron las bases de investigaciones sociales sobre el comportamiento de las poblaciones que siguen empleándose en la actualidad.

Caso 1. Esperanza de vida

Un indicador demográfico muy utilizado para caracterizar los niveles de bienestar de un país es la esperanza de vida, que hace referencia al número de años que se espera que vivirá un recién nacido. Es interesante comparar los cambios en la esperanza de vida entre sexos, entre regiones o países y su evolución en el tiempo.

Según datos del Consejo Nacional de Población, en la década de 1990, la esperanza de vida de los niños en México era de 67.7 años y la de las recién nacidas era de 73.5 años en promedio. Las mujeres vivían 5.8 años más que los hombres.

Tras el censo de 2010 se encontró que la esperanza de vida era de 73.1 años para los hombres y 77.8 años para las mujeres. Es claro que las mujeres sólo viven 4.7 años más que los hombres. A partir de esta información planteamos algunas preguntas:

- ¿A qué se debe la disminución de esta diferencia?
- ¿Se esperaría que esta diferencia continúe disminuyendo?
- ¿Cree que la esperanza de vida seguirá aumentando, pero su diferencia disminuyendo?

Es común que a partir de datos como los que se proporcionan arriba se hagan afirmaciones para responder a las preguntas planteadas. Sin embargo, no contamos en este momento con la información suficiente para esto. Lo que sí afirmamos es que la diferencia en la esperanza de vida por género ha disminuido.

Algunas de las explicaciones que se han dado sobre estos cambios señalan una combinación de factores entre los que se encuentran el aumento en los niveles de bienestar general y las variaciones en las actividades y espacios tradicionales en que se desempeñan hombres y mujeres. Esto último pudo producir cambios tanto en la composición de la familia, como en las responsabilidades y los hábitos cotidianos de la sociedad actual. Ello habría tenido como consecuencia un incremento de los fallecimientos por enfermedades cardiovasculares en las mujeres, lo cual explicaría en parte por qué la esperanza de vida entre hombres y mujeres ha disminuido. Observe que lo anterior no es una afirmación contundente, sino una hipótesis realizada a partir de elementos que no se encuentran en la información proporcionada originalmente.

Lo que es un hecho es que las cifras mostradas acerca de la población mexicana actual no serían conocidas sin el proceso riguroso de conteo y organización de una cantidad significativa de registros de defunciones en México. El conteo es importante pero, una vez terminado, los datos obtenidos no muestran por sí solos su sentido sino hasta que se organizan, como veremos en seguida.

A continuación se muestran dos párrafos que contienen los datos específicos de la situación que acabamos de describir, pero sin una organización adecuada, con el fin de mostrar su importancia. Proponemos al lector tratar de interpretarlos.

El aumento de enfermedades cardiovasculares en las mujeres se está manifestando a nivel mundial. Según datos publicados por la Organización Mundial de la Salud (OMS), obtenidos a partir de los reportes de **algunos** de los países miembros, se muestra que de un total de 6 224 985 000 personas (3 131 052 000 hombres y 3 093 933 000 mujeres), las enfermedades cardiovasculares representaron 14 359 000 muertes, de las cuales 7 120 000 fueron de hombres y 7 239 000 fueron de mujeres (fuente: OMS).

En este reporte se especifican cinco enfermedades cardiovasculares: cardiopatía reumática, cardiopatía hipertensiva, enfermedad isquémica del corazón, enfermedad cerebrovascular y enfermedad inflamatoria del corazón. Dos de estas cinco enfermedades causan mayor número de muertes que las demás: la tercera, con 7 208 000, de los cuales 3 802 000 son hombres y 3 406 000 son mujeres; y la cuarta, con 5 509 000, de los cuales 2 550 000 son hombres y 2 959 000 son mujeres. En cambio, para las otras tres cardiopatías, se registraron 138 000 hombres y 189 000 mujeres fallecidos a causa de la primera, 419 000 hombres y un total de 911 000 personas a causa de la segunda, y para la quinta 193 000 mujeres y un total de 404 000.

A diferencia de las preguntas planteadas inicialmente para este caso, los siguientes cuestionamientos sí pueden responderse a partir de la información del texto anterior.

- ¿Cuál es la enfermedad del corazón que causa más fallecimientos en hombres?
- ¿Hay alguna enfermedad que causa más fallecimientos en hombres que en mujeres?
- ¿Cuál de las cardiopatías causa más muertes?
- ¿Qué relación hay entre la edad de la persona y el padecimiento?
- ¿Cómo se vinculan la edad, el género y el padecimiento?
- ¿Las cardiopatías tienen que ver con el género?

Dar la respuesta a cada pregunta no es fácil, dada la desorganización con la que se presenta la información. Es más sencillo hacer afirmaciones si visualizan no sólo los datos proporcionados, sino también la relación que guardan entre ellos. Por eso se emplean tablas y gráficas como herramientas de organización y visualización, las cuales son muy útiles para lograr esto.

La tabla 1 contiene datos proporcionados en el texto en azul del recuadro anterior. ¿Los datos que están en azul son correctos? ¿Son correctas las cantidades que están en color negro en la tabla siguiente?

Tabla 1 | Enfermedades cardiovasculares

	Ambos sexos	*Hombres*	*Mujeres*
Enfermedades cardiovasculares	14 359 000	7 120 000	7 239 000
Cardiopatía reumática	327 000	138 000	189 000
Cardiopatía hipertensiva	911 000	419 000	492 000
Enfermedad isquémica del corazón	7 208 000	3, 802 000	3 406 000
Enfermedad cerebrovascular	5 509 000	2 550 000	2 959 000
Enfermedad inflamatoria del corazón	404 000	211 000	193 000

Es importante observar que la tabla 2 contiene los mismos datos que proporciona el texto, pero los últimos tres ceros se pueden omitir para facilitar su lectura de la tabla.

Tabla 2* | Enfermedades cardiovasculares

	Ambos sexos (000)	*Hombres (000)*	*Mujeres (000)*
Enfermedades cardiovasculares	14 359	7 120	7 239
Cardiopatía reumática	327	138	189
Cardiopatía hipertensiva	911	419	492
Enfermedad isquémica del corazón	7 208	3 802	3 406
Enfermedad cerebrovascular	5 509	2 550	2 959
Enfermedad inflamatoria del corazón	404	211	193

* Las cantidades están redondeadas a miles de personas.

Aunque estas tablas tienen la misma organización, los datos están presentados de manera más concisa en la segunda tabla.

Ésta es una propuesta de organización de la información, ¿se le ocurre una diferente? Elabórela y compare cuál le permite identificar mejor la información.

Ahora que se cuenta con la información mejor organizada, responderá más fácilmente las preguntas planteadas después del texto desorganizado. En general, hay afirmaciones que serán comprobadas a partir de la información dada.

Evalúe la veracidad de las siguientes afirmaciones a partir de los datos que se presentan en la página 138.

- La enfermedad isquémica del corazón es la enfermedad cardiovascular que causa el mayor número de muertes en el mundo.
- Mueren más hombres que mujeres por enfermedades cardiovasculares.
- En el registro de estos fallecimientos se observa que mueren más hombres que mujeres por isquemia.
- En el registro de estos fallecimientos se observa que mueren más hombres que mujeres por enfermedad inflamatoria del corazón y por isquemia.
- En la población mundial, la tendencia es que haya más muertes de mujeres que de hombres por enfermedades cardiovasculares.
- Si la población mundial es de 7 000 millones de habitantes, se espera que 9.8 millones de mujeres mueran por alguna enfermedad cardiovascular.
- Hay más muertes en mujeres mayores de 50 años por enfermedades cardiovasculares que de hombres en el mismo rango de edad.
- Los hombres menores de 40 años tienen menos riesgo de sufrir una enfermedad cardiovascular.
- La isquemia es la mayor causa de muertes por enfermedad cardiovascular tanto en mujeres como en hombres.
- Tanto en hombres como en mujeres, la enfermedad inflamatoria del corazón es, entre las enfermedades cardiovasculares, la que menos muertes causa.
- De entre estas cinco enfermedades cardiovasculares, la cardiopatía reumática es la que causa menor número de muertes tanto en mujeres como en hombres.
- Se corre más riesgo de morir de un infarto al corazón que de una isquemia.
- Se corre menos riesgo de morir de un infarto que de alguna enfermedad infecciosa.
- El riesgo de morir por una embolia es mayor que el de morir por un infarto al corazón.

Para hacer afirmaciones o simplemente responder a las preguntas planteadas, es necesario encontrar una relación entre cada cardiopatía y el número de personas que la padecieron y además cuántas de éstas son hombres y cuántas son mujeres.

Como mencionamos antes, la información puede no sólo organizarse en tablas, sino también en gráficas. Abordaremos, entonces, un tipo de gráficas y dos formas de hacerlas.

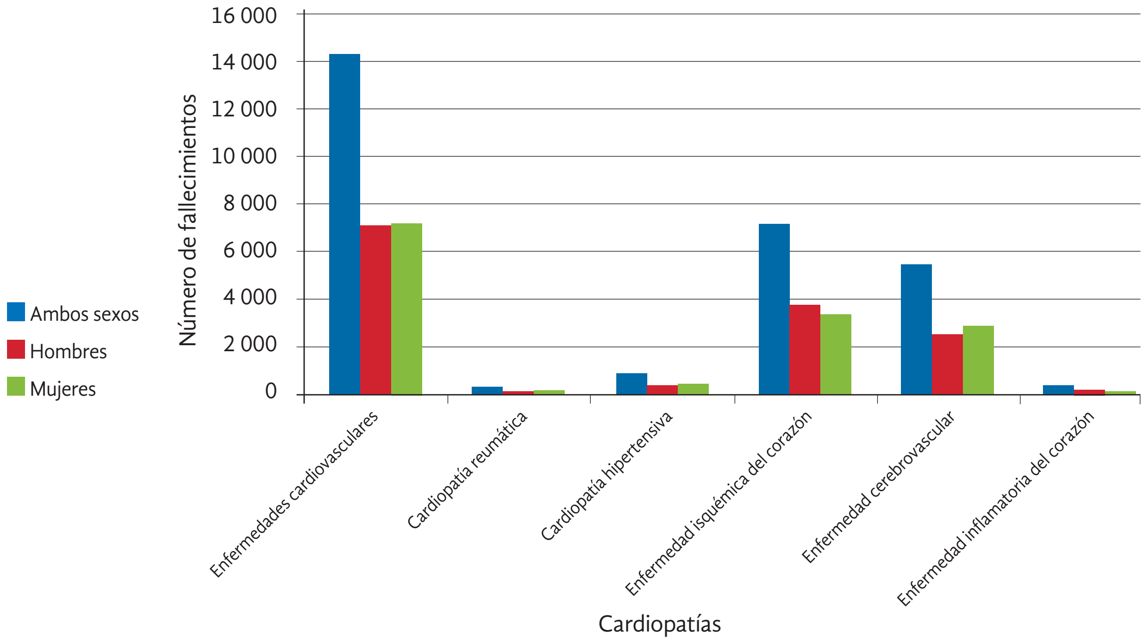
Una *gráfica* es una representación de datos. La información que contiene una gráfica depende en general de lo que se quiera analizar. Las dos gráficas que se presentan (1 y 2) están elaboradas con la información de la tabla 2 y son gráficas de barras, un tipo de gráfica que facilita hacer comparaciones entre varias categorías simultáneamente.

La gráfica 1 incluye la información sobre las enfermedades cardiovasculares en general, además de cada una de las cardiopatías. Observe que se ha representado en diferentes colores no solamente la información relativa a cada sexo, sino a ambos sexos. Esta última información no se encuentra en la segunda gráfica.

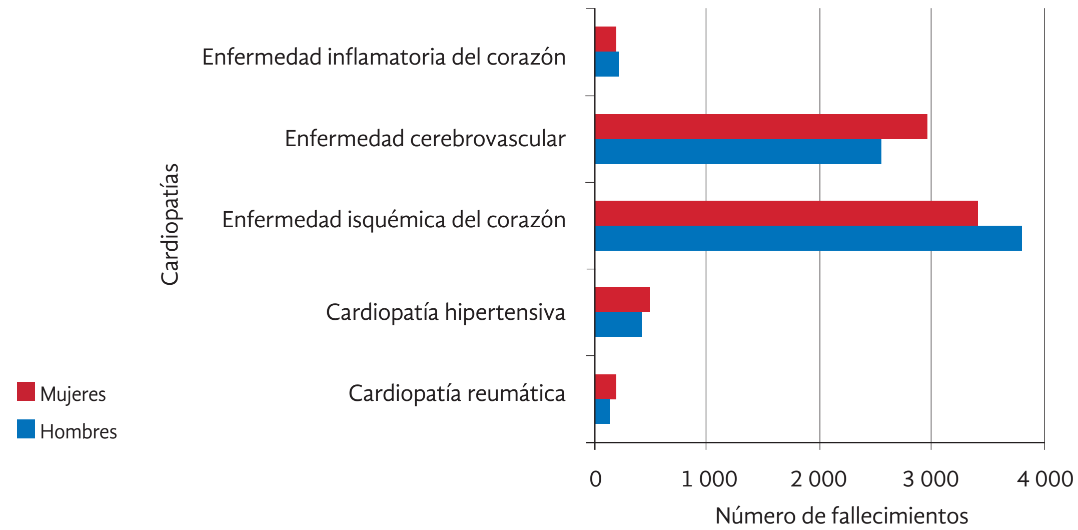
Otra diferencia entre las gráficas es la orientación de las barras y, por lo tanto, de la colocación de los ejes “Número de fallecimientos” y “Cardiopatías”. Este cambio, sin embargo, no provoca alteración alguna en la información que proporciona la tabla.

Las gráficas pueden incluir una gran cantidad de información en poco espacio que es fácil de identificar visualmente. Note que, aunque las dos gráficas están hechas a partir de los mismos datos, cada una facilita la observación de ciertos aspectos específicos de la información que se quiere enfatizar.

Gráfica 1 | Fallecimientos por cardiopatías



Gráfica 2 | Fallecimientos por cardiopatías



El hecho de que la información contenida en cada gráfica no sea exactamente la misma permite hacer ciertas afirmaciones y otras no.

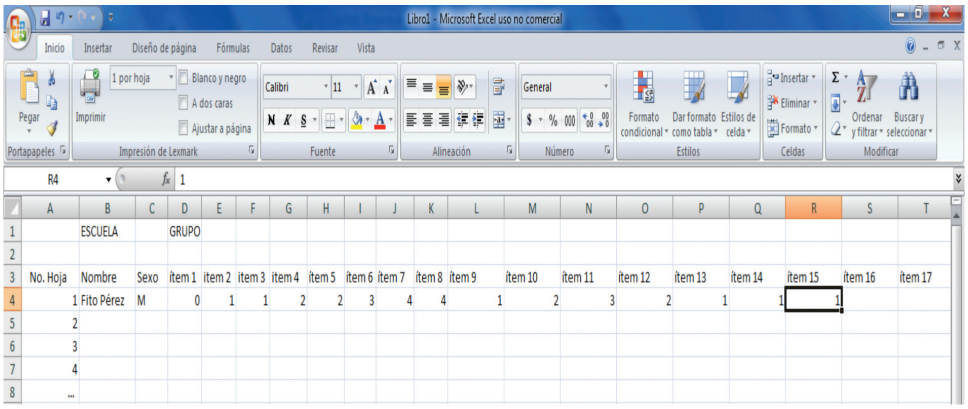
¿Qué afirmaciones se pueden hacer a partir de la gráfica 1 que no se pueden hacer a partir de la gráfica 2?

Le invitamos a plantear afirmaciones y, posteriormente, avanzar con el segundo caso de este apartado.

Caso 2. Actitudes hacia las matemáticas

En el capítulo "Actitudes hacia el estudio de las matemáticas" se le propuso utilizar un instrumento para estudiar las actitudes que tienen sus alumnos hacia las matemáticas, la escala AMMEC. En este capítulo retomaremos dicho instrumento y a lo largo del capítulo iremos construyendo algunos conceptos a partir de él. Para esto también retomaremos la tabla de Excel (figura 3) que le fue sugerida para concentrar los datos:

Figura 3 | Concentrado de datos de actitud hacia las matemáticas



Para el resto de esta sección supondremos que tuvo la oportunidad de aplicar este cuestionario a sus alumnos y de concentrar la información. Recordemos particularmente que:

> [...] deberá considerar que los enunciados de la escala fueron redactados en dos sentidos, uno positivo y otro negativo, como se observa en la tabla 3. Esto es de gran importancia porque **los valores numéricos asignados se modifican en los ítems redactados en sentido negativo**. De no considerar lo anterior se modificarían sustancialmente los resultados.

Tabla 3 | Clasificación de los 29 reactivos de la escala AMMEC de acuerdo con su redacción

	Enunciados que miden las actitudes hacia las matemáticas (AM)	Enunciados que miden las actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora (AMC)	Enunciados que miden la auto-confianza para trabajar las matemáticas (CM)
Enunciados en sentido positivo	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11	13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22	23, 24, 25, 26, 27,28, 29
Enunciados en sentido negativo	2, 3, 10	12, 14, 15	

Para los enunciados redactados en sentido positivo, que son los enunciados 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, los valores posibles que se asignan a cada una de las respuestas de los alumnos son los siguientes:

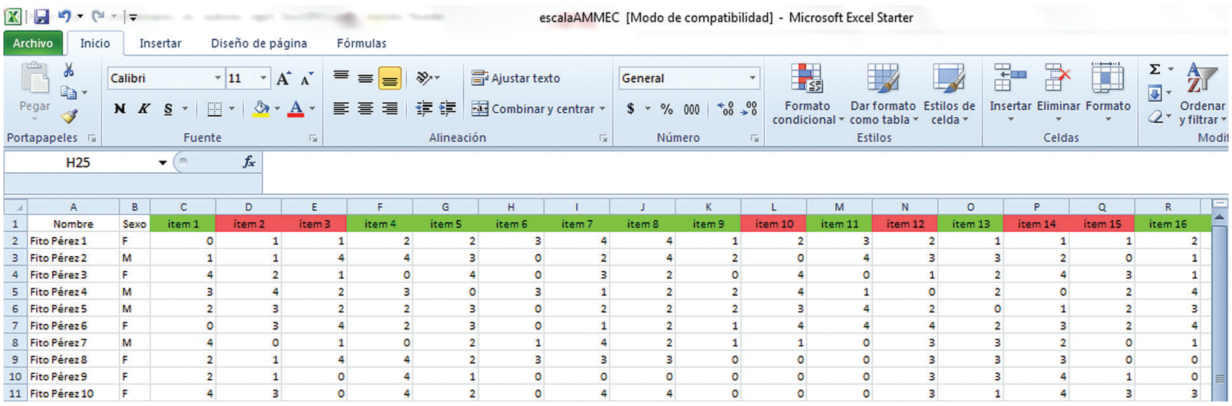
0 – No   1 – Poco   2 – Indeciso   3 – Sí   4 – Mucho

En contraparte, los enunciados redactados en sentido negativo, que son los enunciados 2, 3, 10, 12, 14, 15 y 23, pueden tener los siguientes valores:

4 – No 3 – Poco 2 – Indeciso 1 – Sí 0 – Mucho

A continuación se presenta una tabla con valores para diez alumnos (en <http:// arquimedes. matem.unam.mx/primaria/2012_FC_AMITE/> se puede consultar el archivo de Excel correspondiente) como ejemplo del tratamiento que se da para cualquier número de alumnos. Los valores que contiene la tabla son ficticios porque los utilizamos simplemente para ejemplificar. Además, a lo largo del capítulo cambiaremos los valores para ilustrar diferentes casos.

Figura 4 | Valores obtenidos por 10 alumnos



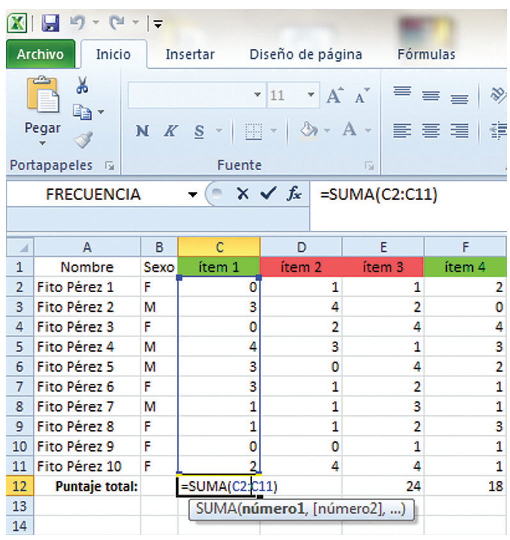
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Nombre	Sexo	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 7	ítem 8	ítem 9	ítem 10	ítem 11	ítem 12	ítem 13	ítem 14	ítem 15	ítem 16
2	Fito Pérez 1	F	0	1	1	2	2	3	4	4	1	2	3	2	1	1	1	2
3	Fito Pérez 2	M	1	1	4	4	3	0	2	4	2	0	4	3	3	2	0	1
4	Fito Pérez 3	F	4	2	1	0	4	0	3	2	0	4	0	1	2	4	3	1
5	Fito Pérez 4	M	3	4	2	3	0	3	1	2	2	4	1	0	2	0	2	4
6	Fito Pérez 5	M	2	3	2	2	3	0	2	2	2	3	4	2	0	1	2	3
7	Fito Pérez 6	F	0	3	4	2	3	0	1	2	1	4	4	4	2	3	2	4
8	Fito Pérez 7	M	4	0	1	0	2	1	4	2	1	1	0	3	3	2	0	1
9	Fito Pérez 8	F	2	1	4	4	2	3	3	3	0	0	0	3	3	3	0	0
10	Fito Pérez 9	F	2	1	0	4	1	0	0	0	0	0	0	3	3	4	1	0
11	Fito Pérez 10	F	4	3	0	4	2	0	4	4	0	0	0	3	1	4	3	3

Notará que los encabezados de las columnas correspondientes a los ítems tienen un color verde, que corresponde a los enunciados en sentido positivo, o rojo, correspondiente a los enunciados en sentido negativo.

Para hacer afirmaciones respecto a la información que se obtiene a partir del cuestionario construiremos algunas gráficas. Observemos los datos concentrados en la tabla de la figura 4 y busquemos información relevante.

Por ejemplo, el puntaje total por ítem (figura 5) permite hacer valoraciones sobre qué enunciados tienen el mayor o menor puntaje.

Figura 5 | Puntaje total ítem 1



	A	B	C	D	E	F
1	Nombre	Sexo	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4
2	Fito Pérez 1	F	0	1	1	2
3	Fito Pérez 2	M	3	4	2	0
4	Fito Pérez 3	F	0	2	4	4
5	Fito Pérez 4	M	4	3	1	3
6	Fito Pérez 5	M	3	0	4	2
7	Fito Pérez 6	F	3	1	2	1
8	Fito Pérez 7	M	1	1	3	1
9	Fito Pérez 8	F	1	1	2	3
10	Fito Pérez 9	F	0	0	1	1
11	Fito Pérez 10	F	2	4	4	1
12	Puntaje total:		=SUMA(C2:C11)		24	18
13						
14						

También podemos obtener el puntaje global del grupo sumando los totales para los 29 ítems del cuestionario (figura 6).

Figura 6 | Puntaje de grupo por ítem

FRECUENCIA =SUMA(C12:AE12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Nombre	Sexo	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 7	ítem 8	ítem 9	ítem 10	ítem 11	ítem 12	ítem 13	ítem 14	ítem 15
2	Fito Pérez 1	F	0	1	1	2	2	3	4	4	1	2	3	2	1	1	1
3	Fito Pérez 2	M	1	2	4	3	4	1	2	2	2	2	2	0	1	2	2
4	Fito Pérez 3	F	1	0	3	1	1	3	0	3	3	1	1	4	2	3	3
5	Fito Pérez 4	M	1	2	3	1	3	0	4	3	2	3	4	0	4	2	4
6	Fito Pérez 5	M	3	4	1	2	2	0	4	0	1	2	1	3	2	3	1
7	Fito Pérez 6	F	1	2	2	0	3	1	2	3	3	1	2	3	2	3	1
8	Fito Pérez 7	M	2	1	3	1	2	4	4	4	2	0	4	1	1	4	0
9	Fito Pérez 8	F	2	0	4	4	3	4	2	4	3	3	2	1	0	4	4
10	Fito Pérez 9	F	2	1	2	0	2	4	2	2	2	2	3	4	0	0	4
11	Fito Pérez 10	F	2	1	4	2	1	2	2	3	3	1	3	0	3	1	2
12	**Puntaje total:**		15	14	27	16	23	22	26	28	22	17	25	18	16	23	22
13	**Total:**		=SUMA(C12:AE12)														
14			**SUMA**(número1, [número2], ...)														
15																	

Pero, ¿qué nos dice el hecho de que el puntaje del grupo sea de, por ejemplo, 458 puntos? Tiene significado en sí mismo si lo comparamos con el puntaje mínimo y máximo posibles que corresponden a una mala o buena actitud.

Adquirirá además otro significado al compararlo con los resultados de la aplicación del cuestionario en otros grupos. También podemos calcular qué puntaje tiene cada una de las subescalas (figura 7).

Figura 7 | Puntaje de cada subescala

FRECUENCIA =SUMA(C12:M12)

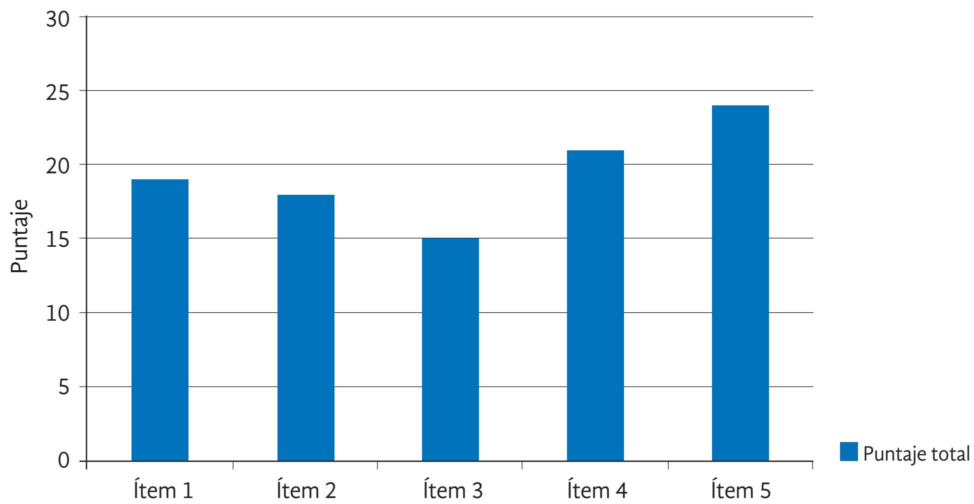
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Nombre	Sexo	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 7	ítem 8	ítem 9	ítem 10	ítem 11	ítem 12	ítem 13	ítem 14	ítem 15
2	Fito Pérez 1	F	0	1	1	2	2	3	4	4	1	2	3	2	1	1	1
3	Fito Pérez 2	M	2	2	1	2	0	0	3	0	2	4	2	0	3	3	3
4	Fito Pérez 3	F	4	2	4	0	2	0	1	2	0	4	3	1	3	3	2
5	Fito Pérez 4	M	0	3	2	3	1	4	4	1	4	3	1	2	1	2	3
6	Fito Pérez 5	M	4	1	3	1	3	4	3	0	4	4	0	2	2	4	3
7	Fito Pérez 6	F	2	3	3	4	2	2	2	1	4	1	0	4	0	4	1
8	Fito Pérez 7	M	4	3	1	3	3	2	2	2	4	3	2	0	4	0	2
9	Fito Pérez 8	F	2	2	1	3	0	0	4	0	4	3	0	3	4	4	3
10	Fito Pérez 9	F	1	1	2	4	2	4	3	1	4	0	2	1	2	4	2
11	Fito Pérez 10	F	0	4	2	3	3	4	3	2	0	1	0	1	4	2	2
12	**Puntaje total:**		19	22	20	25	18	23	29	13	27	25	13	16	24	27	22
13	**Total:**		588														
14																	
15																	
16				Sub-escala AM:	=SUMA(C12:M12)												
17				Sub-escala AMC:	221												
18				Sub-escala CM:	133												

Para construir las gráficas correspondientes hay que definir varios aspectos: en primer lugar, la información que queremos ver, por ejemplo, el puntaje total por ítem; luego, qué tipo de gráfica queremos usar. Habíamos visto que en las gráficas de barras puede compararse información de distintas categorías.

En este caso podría interesarnos ver cuál es el ítem que tiene el puntaje más alto o el más bajo. Dado que el mínimo que se obtiene en cada enunciado es 0 y el máximo 4, los valores por ítem van de 0 a 40; estamos considerando 10 alumnos en este ejemplo. Sin embargo, si observa la figura 7, el mayor valor que toma la suma por ítem es 27, entonces nos conviene elegir, por ejemplo, el 30 como máximo. El eje vertical será el puntaje y elegiremos graduarlo de 5 en 5 para lograr una visualización cómoda de la información.

La gráfica 3 corresponde al puntaje total por ítem para los primeros cinco ítems. Se puede hacer una gráfica como ésta para todos los ítems.

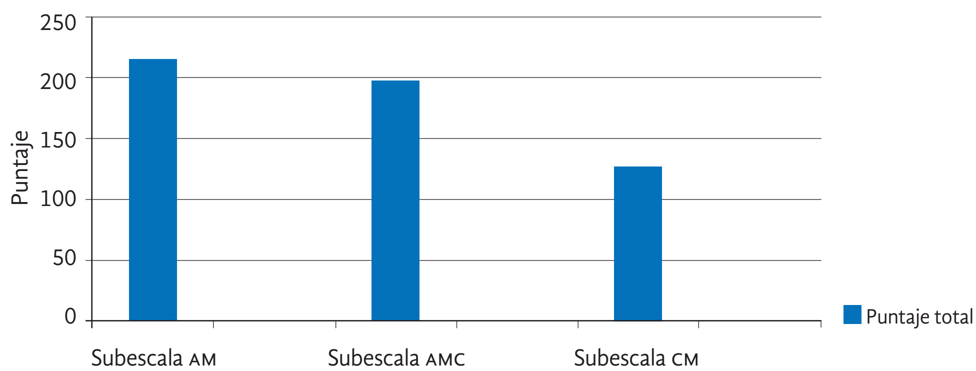
Gráfica 3 | Puntaje por ítem



El ítem 5, que tiene el mayor puntaje en nuestro ejemplo, corresponde al enunciado "Las matemáticas son divertidas". ¿Qué tan divertidas son las matemáticas para este grupo? El ítem 3, que tiene el menor puntaje, corresponde al enunciado "Las matemáticas son difíciles". ¿Las matemáticas son difíciles para estos alumnos?

También nos conviene obtener los puntajes totales entre subescalas, por lo que haremos una gráfica de barras de esta información (gráfica 4). El mayor puntaje que se obtendría para una subescala es de 440. En este ejemplo, la subescala AM obtuvo 216 puntos, la es-

Gráfica 4 | Puntaje total por subescala



cala AMC obtuvo 198 puntos y la escala CM obtuvo 127 puntos, por lo que la escala AM nos sugiere fijar un máximo de 250.

¿Podemos afirmar que los alumnos de este grupo tienen una buena actitud hacia las matemáticas? Debemos tomar en cuenta que cada subescala tiene un número de ítems diferente, pero usted puede obtener un primer panorama de la actitud de sus alumnos hacia las matemáticas.

> Podríamos hacer también un análisis por alumno si al maestro le interesara conocer la actitud de cada uno de ellos hacia las matemáticas.

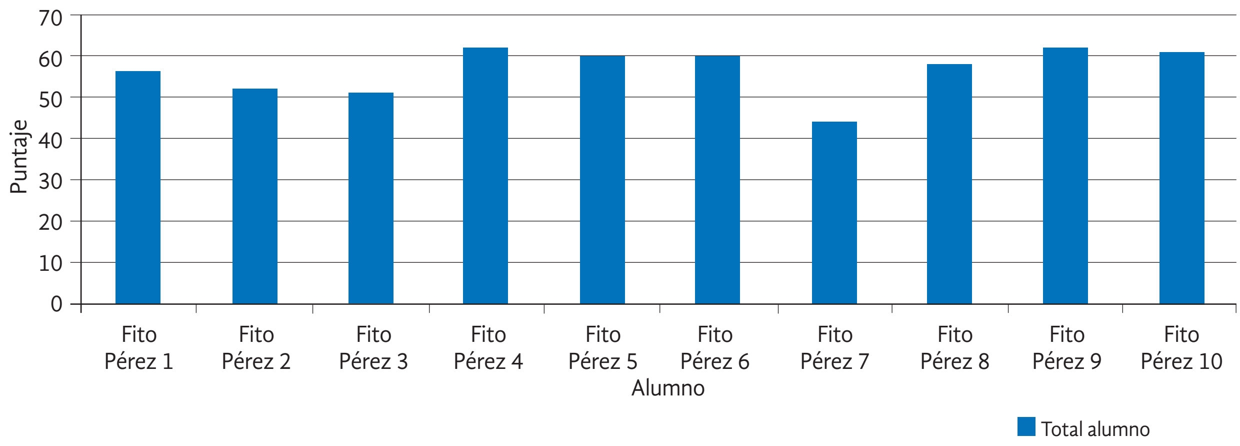
Figura 8 | PUNTAJE POR ALUMNO

FRECUENCIA =SUMA(C2:AE2)

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	ítem 15	ítem 16	ítem 17	ítem 18	ítem 19	ítem 20	ítem 21	ítem 22	ítem 23	ítem 24	ítem 25	ítem 26	ítem 27	ítem 28	ítem 29	**Total por alumno**
2	1	3	3	2	1	2	4	2	4	3	4	1	2	3	1	=SUMA(C2:AE2)
3	0	1	1	4	4	1	2	4	3	3	0	4	0	3	SUMA(**número1**, [número2], ...)	
4	4	1	4	2	1	3	2	2	1	4	4	4	3	1	2	66
5	3	3	0	2	0	2	3	2	1	4	2	0	0	2	4	62
6	3	2	2	0	1	2	2	4	4	0	4	1	0	4	0	67
7	1	2	2	4	0	3	3	0	3	4	4	1	2	2	0	60
8	3	3	0	1	0	4	4	0	3	4	1	0	2	0	3	72
9	1	0	3	1	3	3	2	4	0	0	2	4	4	4	2	62
10	0	4	2	0	4	4	4	1	1	3	4	0	1	2	0	50
11	1	1	2	2	2	0	0	1	0	1	0	1	1	3	4	44

A partir de la gráfica 5 se desprende que los alumnos 4 y 9 tienen mejor actitud hacia las matemáticas que los demás estudiantes de su grupo.

Gráfica 5 | PUNTAJE TOTAL POR ALUMNO



Recapitulemos un poco con el fin de puntualizar acerca de los conceptos estadísticos que son de interés en este apartado.

Población | Se denomina así al conjunto de interés para realizar un estudio (por ejemplo, seres vivos, procesos, objetos físicos, etc.) con el fin de obtener conclusiones o inferencias. Por lo general, el conjunto abarca una enorme cantidad de miembros o elementos.

- ¿Cuál es la población de interés en el reporte de la Organización Mundial de la Salud? La población está formada por el número de habitantes de los países que integran la OMS.
- En el caso del cuestionario de actitud, la población es el total de alumnos de un grupo, por ejemplo 45 estudiantes.

Muestra | Se trata de un subconjunto de la población que se considera representativo y manejable para realizar mediciones sobre los aspectos específicos que serán estudiados. Los elementos del conjunto seleccionados (individuos, elementos) se determinan aleatoriamente o no, dependiendo de los propósitos de estudio.

- ¿Cuál es el valor de la muestra reportada por la OMS para el estudio de las cardiopatías? 6 224 985 000 (3 131 052 000 hombres y 3 093 933 000 mujeres).
- En el caso de las pruebas de actitud, ¿cuál es el valor de la muestra? La muestra es de 10.

Variable | Es cada una de las características medibles de la muestra, que proporciona información sobre los cambios o variaciones entre los individuos que la forman.

- ¿Cuáles son las variables en el reporte de la OMS? Las cardiopatías por reumatismo, hipertensión, isquemia, enfermedad cerebrovascular e inflamación del miocardio.
- Las variables en el caso de los cuestionarios de actitud son los 29 ítems, agrupados en tres categorías.

Como se ha dado cuenta, al trabajar con información numérica es muy importante clasificar y nombrar los datos empleando tablas y gráficas para facilitar la elaboración de afirmaciones verificables. Las gráficas son herramientas poderosas que permiten visualizar datos clara y eficientemente, si están bien hechas.

Un mismo tipo de gráfica podría proporcionar diferentes aspectos de la información si se modifica la agrupación de los datos. Sin embargo, si sólo se modifican la escala y la graduación podrían dar diferente impresión visual, pero la misma información.

El caso específico que hemos presentado acerca de la esperanza de vida y los fallecimientos por diferentes tipos de cardiopatías resulta de enorme interés para valorar, por ejemplo, la efectividad de las políticas públicas en materia de salud preventiva y clínica dentro de un país o región del mundo, o para tomar decisiones para la implementación de programas sociales e infraestructura con el fin de que la gente modifique hábitos de tal manera que sus nuevos hábitos contribuyan a prevenir cardiopatías.

La comparación de este indicador de tiempo para un país y entre los diferentes países del orbe arroja conclusiones de gran interés para los gobiernos, los organismos internacionales y las compañías de seguros, entre otras instancias.

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Hasta ahora hemos visto que algunas afirmaciones pueden desprenderse o no de los datos recopilados y que su organización en tablas y gráficas permite visualizarlos. No obstante, el organizar y presentar en forma más sintética la información no garantiza una interpretación adecuada de su contenido, ni estimula el desarrollo del juicio crítico en los estudiantes.

Existen programas informáticos que generan muchas funciones para presentar gran variedad de gráficas y formas de acomodar los datos en hojas de cálculo digitales, pero si no se ha comprendido de manera vivencial por qué se realiza un determinado procedimiento para representar los datos y cómo puede obtenerse provecho de este conocimiento, la elaboración de gráficas se convierte en algo mecánico e irracional.

En diferentes momentos de la historia de la humanidad, la reflexión sobre aquello que se observa ha sido muy importante en la construcción de conocimiento. A partir de esta reflexión se ha llegado a la obtención de principios fundamentales por inducción, por ejemplo, las leyes de la física, que surgen de observar regularidades en diversos fenómenos de manera que pueden generalizarse bajo ciertas condiciones. A partir de estos principios fundamentales se genera nuevo conocimiento por deducción, es decir, cuando se verifica el cumplimiento de estas leyes. Éste sería un método deductivo de elaboración de conocimiento.

Sin embargo, para conocer algo sobre un fenómeno en el que los experimentos no son determinantes o no existen tales principios fundamentales, se recurre a los *datos* observables y se trata de recoger toda la información posible sobre el fenómeno. Éste sería un método estadístico.

Veamos un ejemplo: si se carece del conocimiento que permita deducir el resultado de la aplicación de un nuevo tratamiento médico, se aplica el tratamiento a ciertas personas, se anotan los resultados y se intenta sacar conclusiones a partir de dichos datos.

En resumen, la estadística recurre a un compendio de datos numéricos y a su agrupación para extraer de él información esencial y relevante, pero ¿qué tan confiables son los resultados que se obtienen? De ese aspecto de la estadística se ocupa la *probabilidad*.

En este apartado trataremos algunos conceptos de la estadística y, en el siguiente, veremos algunos de la probabilidad para mostrar posteriormente la relación entre ambas disciplinas.

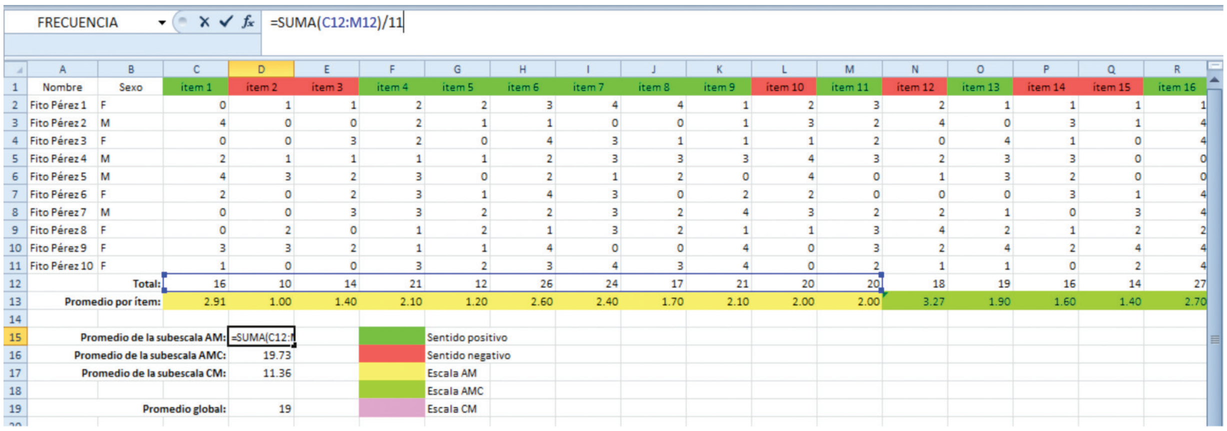
El concepto matemático más sencillo para obtener información de un conjunto de datos es el *promedio*. Un maestro suma las calificaciones obtenidas por un alumno a lo largo del año escolar, lo divide por el total de evaluaciones aplicadas y así obtiene el promedio conocido como *media* aritmética. Si hace lo mismo para cada alumno obtendrá también el promedio global del grupo. ¿Qué tan representativo es este último de las calificaciones obtenidas por los alumnos?

En general, el promedio global es muy representativo en algunos casos, pero muy engañoso en otros. Digamos que en un grupo de primaria de 38 alumnos el promedio anual del grupo es 8. Esta cifra da cierta información sobre el promedio de los alumnos, pero no demasiada. Puede ser que todos hayan obtenido un 8 de promedio individual, o que la mitad haya obtenido 7 y la otra mitad 9, y hay muchas otras posibilidades. La cifra no nos dice nada sobre la variación en la distribución de los promedios individuales en el grupo.

En el caso de la escala AMMEC que hemos venido analizando, hay varios promedios que nos proporcionan información para formular afirmaciones sobre las actitudes hacia las matemáticas de los alumnos, por ejemplo, el promedio global del grupo, el promedio por alumno, el promedio por ítem, el promedio por subescala, entre otros.

En la figura 9 se observa el promedio por ítem en relación con el número de alumnos, el promedio por subescala en relación con el número de ítems que tiene cada subescala y cómo se calcula este promedio para la subescala AM en una tabla de Excel (de manera similar se calcularían los otros promedios mencionados). Este último promedio es un número entre 0 y 40. Lo que sería interesante es saber qué nos dicen estos promedios y qué afirmaríamos a partir de ellos.

Figura 9 | Promedio por ítem



FRECUENCIA =SUMA(C12:M12)/11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Nombre	Sexo	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 7	ítem 8	ítem 9	ítem 10	ítem 11	ítem 12	ítem 13	ítem 14	ítem 15	ítem 16
2	Fito Pérez 1	F	0	1	1	2	2	3	4	4	1	2	3	2	1	1	1	1
3	Fito Pérez 2	M	4	0	0	2	1	1	0	0	1	3	2	4	0	3	1	4
4	Fito Pérez 3	F	0	0	3	2	0	4	3	1	1	1	2	0	4	1	0	4
5	Fito Pérez 4	M	2	1	1	1	1	2	3	3	3	4	3	2	3	3	0	0
6	Fito Pérez 5	M	4	3	2	3	0	2	1	2	0	4	0	1	3	2	0	0
7	Fito Pérez 6	F	2	0	2	3	1	4	3	0	2	2	0	0	0	3	1	4
8	Fito Pérez 7	M	0	0	3	3	2	2	3	2	4	3	2	2	1	0	3	4
9	Fito Pérez 8	F	0	2	0	1	2	1	3	2	1	1	3	4	2	1	2	2
10	Fito Pérez 9	F	3	3	2	1	1	4	0	0	4	0	3	2	4	2	4	4
11	Fito Pérez 10	F	1	0	0	3	2	3	4	3	4	0	2	1	1	0	2	4
12		Total:	16	10	14	21	12	26	24	17	21	20	20	18	19	16	14	27
13		Promedio por ítem:	2.91	1.00	1.40	2.10	1.20	2.60	2.40	1.70	2.10	2.00	2.00	3.27	1.90	1.60	1.40	2.70
14																		
15		Promedio de la subescala AM:	=SUMA(C12:				Sentido positivo											
16		Promedio de la subescala AMC:	19.73				Sentido negativo											
17		Promedio de la subescala CM:	11.36				Escala AM											
18							Escala AMC											
19		Promedio global:	19				Escala CM											

Consideremos la información de la tabla 4. Si hacemos una gráfica de estos promedios se vería como la gráfica 6 (p. 153).

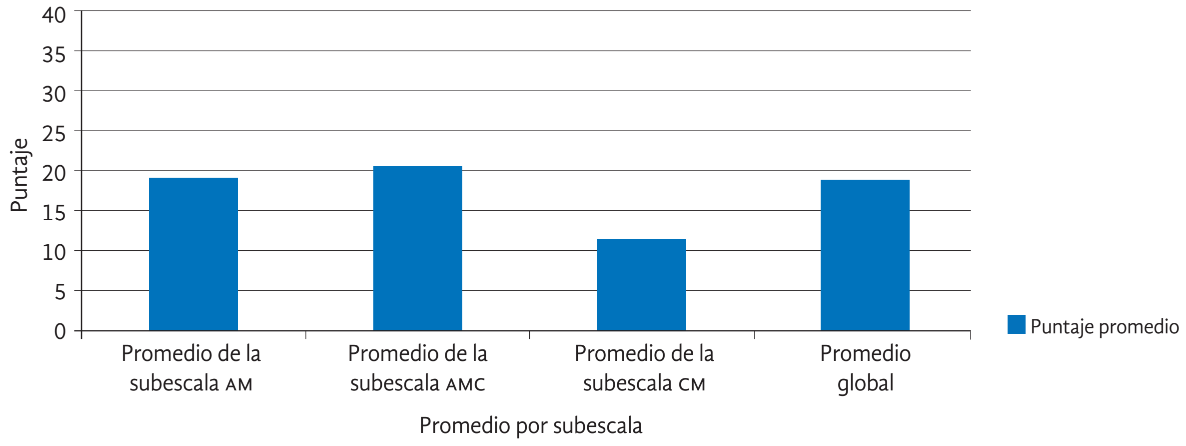
Tabla 4 | Puntaje promedio por subescala

Promedio de la subescala AM	19.09
Promedio de la subescala AMC	20.55
Promedio de la subescala CM	11.64
Promedio global por ítem	19

El eje puntaje tiene como valor máximo 40, aunque el mayor valor de los promedios es tan sólo de 20; de esta manera se nota que todos estos promedios están por debajo de 25, lejos del 40. Para calcular cuáles son los promedios por subescala y el promedio global para el grupo de 10 alumnos, se dividen las cantidades de la tabla 4 entre 10, obteniendo valores entre 0 y 4. Dichos promedios pueden darnos una idea general de la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes de este grupo (gráfica 6).

También podría ser interesante hacer un análisis similar para los promedios por ítem con el fin de tomar decisiones respecto a qué acciones tomar para propiciar un cambio en la actitud.

Gráfica 6 | PUNTAJE PROMEDIO POR SUBESCALA

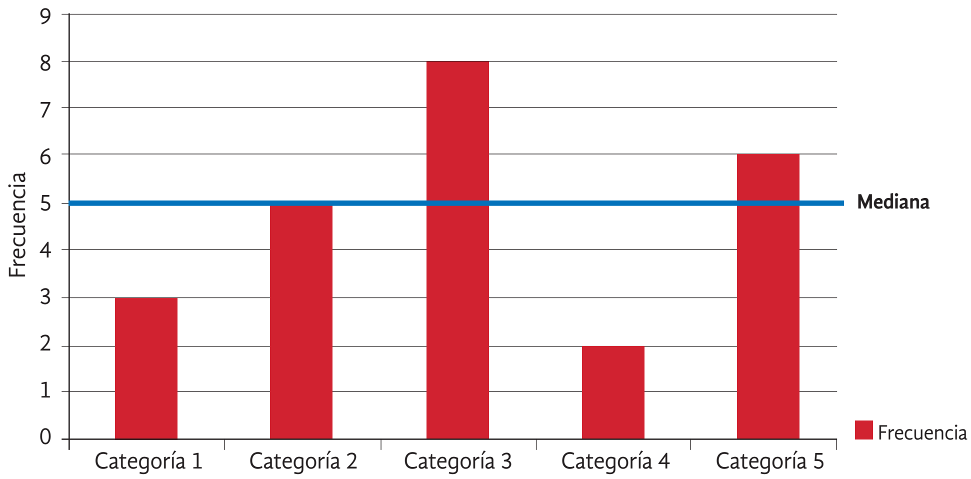


Otro tipo de promedio es la *mediana*. La mediana es un número tal que divide en dos partes iguales a los valores del conjunto de datos, es decir, que la mitad queda por arriba y la otra mitad por debajo de este número. Sin embargo, este número no queda bien definido en algunos casos, por ejemplo, cuando hay valores repetidos o cuando todos son diferentes pero el número de valores es par.

Para ilustrar a qué nos referimos usaremos histogramas de frecuencias y nos referiremos a los valores que toman estas frecuencias. En general, podemos obtener la mediana de cualquier conjunto de datos numéricos.

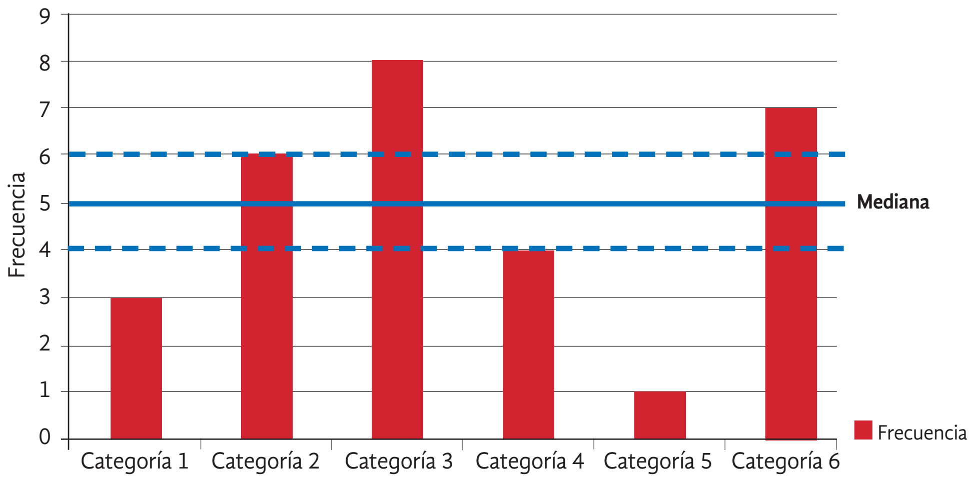
Caso 1. El número total de valores es impar y todos son distintos, por lo que hay un único valor central.

Gráfica 7 | HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS



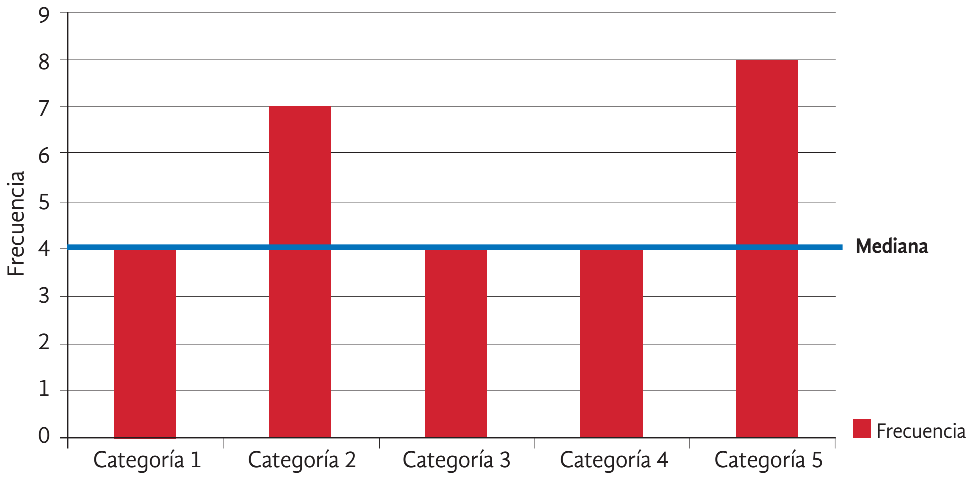
Caso 2. Hay un número par de valores. En este caso, la mediana es el promedio de los dos valores centrales del conjunto (gráfica 8).

Gráfica 8 | Histograma de frecuencias



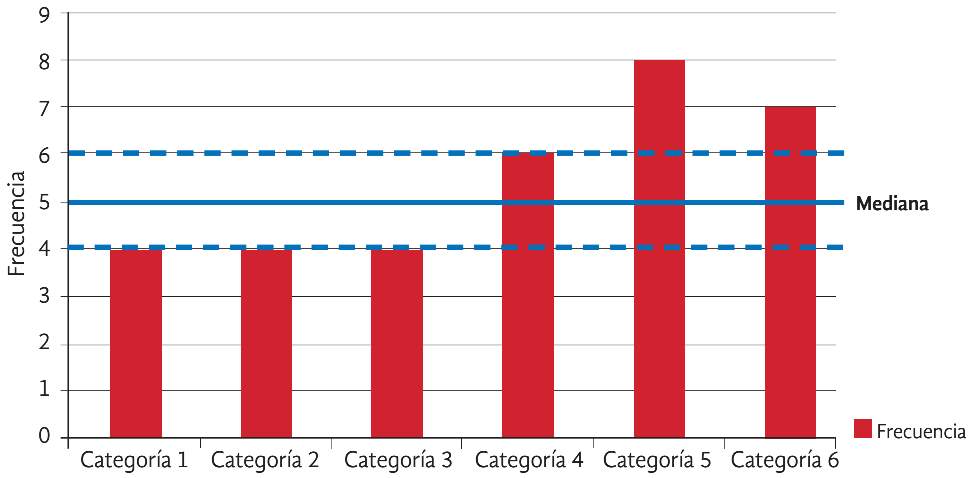
Caso 3. Hay un número impar de valores y el valor central se repite más de una vez (gráfica 9).

Gráfica 9 | Histograma de frecuencias



Caso 4. Hay un número par de valores y el valor central se repite más de una vez (gráfica 10).

Gráfica 10 | Histograma de frecuencias



Por esto se requiere de una definición más precisa: la mediana de los valores es un valor tal que la mitad de los valores es mayor o igual que ésta y la otra mitad es menor o igual que ésta. Veamos un ejemplo numérico (tabla 5).

Tabla 5 | Relación de calificaciones y alumnos

Calificaciones	Número de alumnos
5	3
6	9
7	15
8	4
9	5
10	3

Hay un total de 39 alumnos. En este caso, la mediana es la calificación del vigésimo alumno. Como el vigésimo alumno está entre los quince que obtuvieron 7, la mediana de las calificaciones es 7.

Para obtener la mediana de un conjunto de datos (en este caso, calificaciones), los datos deben ordenarse de forma creciente y localizar el que está en medio.

En nuestro ejemplo de la escala AMMEC, tiene sentido calcular la mediana para los puntajes totales obtenidos por ítem o para los puntajes totales obtenidos por alumno. Tomemos los puntajes por alumno de la figura 10 (p. 156):

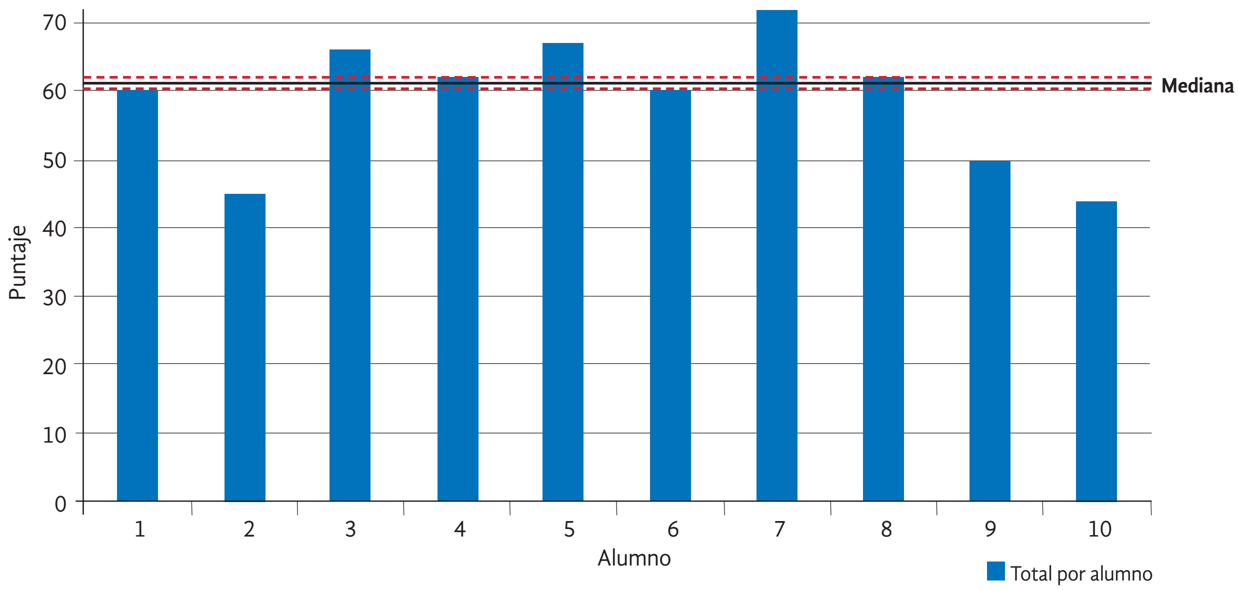
Figura 10 | Puntajes por alumno (am)

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	ítem 15	ítem 16	ítem 17	ítem 18	ítem 19	ítem 20	ítem 21	ítem 22	ítem 23	ítem 24	ítem 25	ítem 26	ítem 27	ítem 28	ítem 29	Total por alumno
2	1	0	1	3	0	4	0	4	1	0	0	2	4	1	1	60
3	2	4	1	0	2	1	1	0	2	2	0	1	0	1	4	45
4	2	0	0	3	4	2	4	3	2	2	0	1	3	2	1	66
5	1	4	1	2	0	3	1	3	1	3	2	3	0	2	4	62
6	1	2	1	0	0	4	1	0	1	2	4	2	1	1	0	67
7	3	1	0	0	1	4	1	1	2	4	1	4	1	4	0	60
8	0	4	0	1	0	0	0	1	4	0	0	1	1	4	0	72
9	2	2	1	3	4	4	0	2	2	2	0	4	2	3	0	62
10	3	0	1	1	2	3	4	3	3	0	3	0	1	3	3	50
11	3	2	2	0	1	4	2	3	1	0	3	3	4	4	4	44

Totales por alumno: 44, 45, 50, 60, **60**, **62**, 62, 66, 67, 72

Dado que tenemos diez datos en este conjunto, no hay un dato que esté en medio, entonces tomamos los dos de en medio, calculamos su promedio y ese número será la mediana: 61. En la gráfica 11, la línea roja corresponde a este valor.

Gráfica 11 | Puntaje total por alumno



Observemos lo siguiente: si calculamos la diferencia entre el valor mínimo del conjunto (barra correspondiente al alumno 2) y la mediana: 61 – 44 = 17, y la diferencia entre el valor máximo del conjunto (barra correspondiente al alumno 7) y la mediana: 72 – 61 = 11, ¿qué tan representativa del conjunto de datos es la mediana?

El tercer tipo de promedio es la *moda*, que es el dato que más se repite en el conjunto. Veamos un ejemplo. En una encuesta hecha a cien consumidores de refrescos se obtuvieron los siguientes resultados: 56 prefieren tomar refresco de cola, 26 prefieren refrescos de toronja, 12 refrescos de manzana y el resto refrescos de cualquier otro sabor. En este caso es claro que la moda es "refresco de cola", puesto que una afirmación verificable sin necesidad de hacer cálculos es que la mayoría de estos consumidores prefieren tomar refresco de cola. La moda es una medida significativa de las preferencias de los encuestados. Por esta razón, es una medida muy utilizada en los estudios de mercado, de opinión y en cualquier tipo de estudio del cual se obtenga información cualitativa.

Consideremos ahora las calificaciones de 100 alumnos de 5° de primaria. Supongamos que la manera en que se distribuyen las calificaciones es tal que 25 alumnos sacaron 8, mientras que cualquier otra calificación, mayor o menor a 8, es obtenida por menos de 25 alumnos. En este caso, la moda es 8. ¿Qué nos dice este número sobre la obtención de las calificaciones si no sabemos qué calificación obtuvieron los restantes 75 alumnos? ¿Estos alumnos obtuvieron calificaciones cercanas a 10 o a 5? En casos numéricos, la moda puede no ser un promedio representativo de la situación, contrario a lo que sucede en el ejemplo de los consumidores de refresco. En el caso en el que ningún dato del conjunto se repite, se dice que la moda no existe.

¿Qué tan significativa es la moda en el caso de la escala AMMEC? Podemos calcular la moda de los puntajes obtenidos para cada alumno o la moda de los puntajes obtenidos por todos los alumnos. Podemos también hacer esto por subescala. Veamos el primer caso:

Supongamos que un alumno respondió como en la tabla 6.

Tabla 6 | Respuestas de un alumno

Respuesta	Frecuencia
No	9
Poco	9
Indeciso	11
Sí	0
Mucho	0

De 29 ítems, este alumno respondió 11 veces "Indeciso", 9 veces "Poco" y 9 veces "No"; nunca respondió "Sí" ni "Mucho". La respuesta más frecuente es la de "Indeciso", por lo que la moda en este caso es "Indeciso". ¿Podríamos afirmar que este alumno tiene una actitud o autoconfianza neutra? En realidad, este alumno tiene una actitud negativa.

Podría ser al revés, es decir, que haya respondido 11 veces "Indeciso", 9 veces "Sí" y 9 veces "Mucho". La moda seguiría siendo "Indeciso" y, sin embargo, este alumno tiene una actitud positiva. Esto ilustra el hecho de que el sentido de moda no es utilizable en conjuntos de valores numéricos ordenados.

En la lista, los puntajes están subrayados por color de acuerdo con la subescala a la que corresponden. Si obtenemos las frecuencias por subescala, ¿los resultados obtenidos serán similares al anterior?

Figura 11 | Obtención de la frecuencia

FRECUENCIA =CONTAR.SI(D2:AF11,0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
4	3	Fito Pérez 3	F	2	1	3	4	3	0	4	3	0	3	3	0	2	0	1
5	4	Fito Pérez 4	M	3	4	3	0	3	4	3	2	1	2	2	3	1	1	4
6	5	Fito Pérez 5	M	2	4	2	2	0	3	1	2	0	2	4	0	1	2	4
7	6	Fito Pérez 6	F	4	1	2	3	1	2	3	2	4	4	0	4	2	2	4
8	7	Fito Pérez 7	M	4	2	2	1	1	0	1	4	1	3	0	3	1	1	3
9	8	Fito Pérez 8	F	4	1	1	0	1	4	0	3	2	0	1	0	3	0	4
10	9	Fito Pérez 9	F	0	4	4	3	1	0	3	4	2	0	1	2	1	3	2
11	10	Fito Pérez 10	F	4	3	3	2	4	4	1	3	1	2	4	2	1	0	3
12		Total:		27	21	21	17	18	20	20	27	13	21	20	16	16	14	27
13		Promedio por ítem:		4.91	2.10	2.10	1.70	1.80	2.00	2.00	2.70	1.30	2.10	2.00	1.60	1.60	1.40	2.70
14																		
15						Frecuencia del 0:	=CONTAR.SI([											
16						Frecuencia del 1:	54											
17						Frecuencia del 2:	60											
18						Frecuencia del 3:	58											
19						Frecuencia del 4:	61											
20						TOTAL:	290											

En la figura 11, la frecuencia del 2 es 60. ¿Qué podemos afirmar a partir de esta información? Le sugerimos hacer una gráfica de las frecuencias obtenidas con base en los datos que obtuvo aplicando el cuestionario en su grupo.

Le sugerimos también calcular el promedio, la moda y la mediana para un mismo conjunto de datos obtenidos en la aplicación del cuestionario en su grupo y compararlos. ¿Cuál de estos tres promedios cree usted que es el más representativo de ese conjunto de datos?

Ahora, si queremos obtener la moda para los puntajes obtenidos por todos los alumnos, es muy complicado contar "manualmente"; en este caso nos servimos de las funciones ya definidas en Excel. ¿Cuántos puntajes se pueden obtener en total? ¿Cuál es la frecuencia con la que se puede obtener cada puntaje?

Ahora haremos el análisis de otro caso que consideramos resultará de interés para el maestro e introduciremos dos conceptos que ya usamos de manera intuitiva: *frecuencia* y *rango*.

El caso del examen de matemáticas

Un maestro de primaria aplicó un examen bimestral de matemáticas a su grupo, conformado por treinta alumnos. Después de terminar de revisar y asignar calificaciones a todos los exámenes, el maestro decidió emplear *medidas de tendencia central* (media, mediana y moda) para obtener mayor información acerca del desempeño del grupo, así como del nivel de dificultad por reactivo, con el fin de tomar decisiones sobre la evaluación en general.

Para averiguar esto, al maestro se le ocurrió organizar la información de los exámenes en tres categorías, que se muestran a continuación:

Tabla 7 | Examen de Matemáticas 6° B. Resultados por reactivo

Reactivo	*Respuesta correcta*	*Respuesta incorrecta*	*No contestó*	
1	25	3	2	30
2	28	2	0	30
3	12	13	5	30
4	22	0	8	30
5	16	10	4	30
6	17	6	7	30
7	4	20	6	30
8	10	8	12	30
9	9	10	11	30
10	15	10	5	30
Totales	**158**	**82**	**60**	**300**
Subcategorías	**Rc**	**Ri + Nc**		
Suma	**158**	**142**		
Porcentaje	**52.67%**	**47.33%**		**100%**

Si los 30 alumnos hubieran contestado correctamente las diez preguntas del examen, se obtendrían 300 aciertos. En la tabla se observa el número de veces que la respuesta de los alumnos cae en alguna de las tres categorías establecidas por el maestro, es decir, la *frecuencia absoluta* (f) de cada tipo de respuesta.

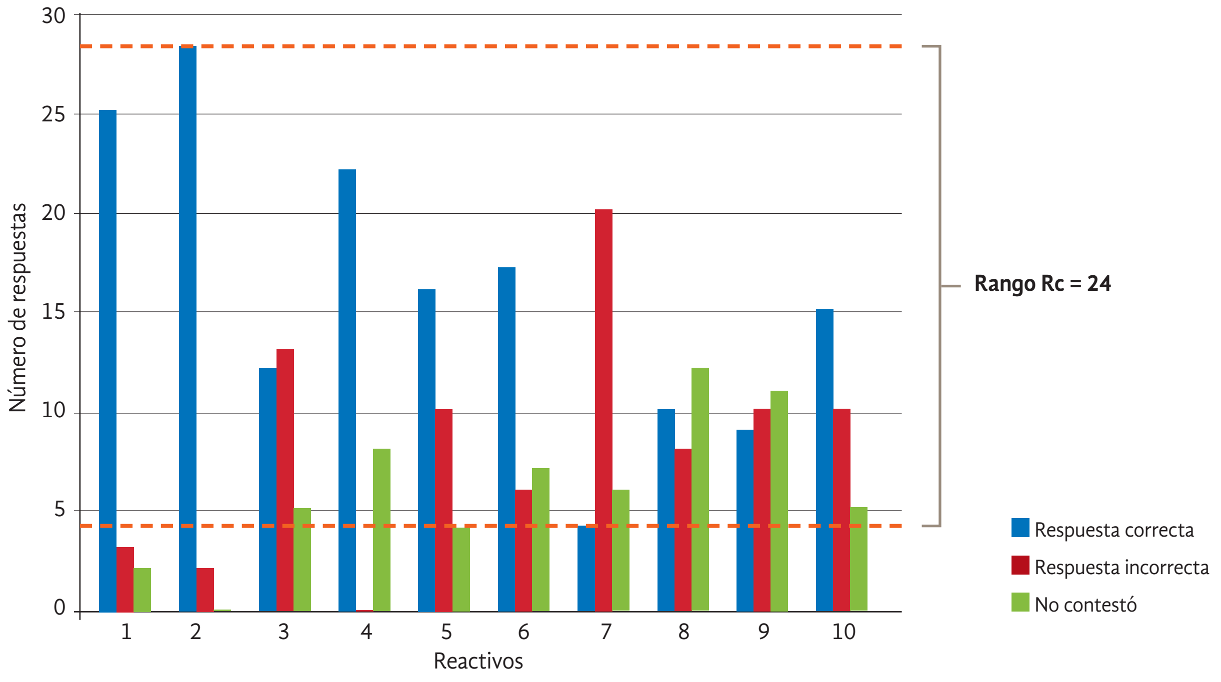
La frecuencia absoluta (para diferenciarla de la relativa de la que hablaremos después) es el número de veces que aparece un dato. Los datos obtenidos son 158 respuestas correctas, 82 respuestas incorrectas y 60 respuestas no contestadas.

En la gráfica 12 se observan dos líneas punteadas anaranjadas sobre los valores 28 y 4, que corresponden a los valores máximo y mínimo de respuestas correctas respectivamente. Estos dos valores determinan el *rango* de la categoría "Respuestas correctas". El rango es el menor intervalo que contiene a todos los datos y su tamaño es la diferencia entre el máximo y mínimo de los datos. El rango nos dice esencialmente qué tan dispersos están los datos de un conjunto.

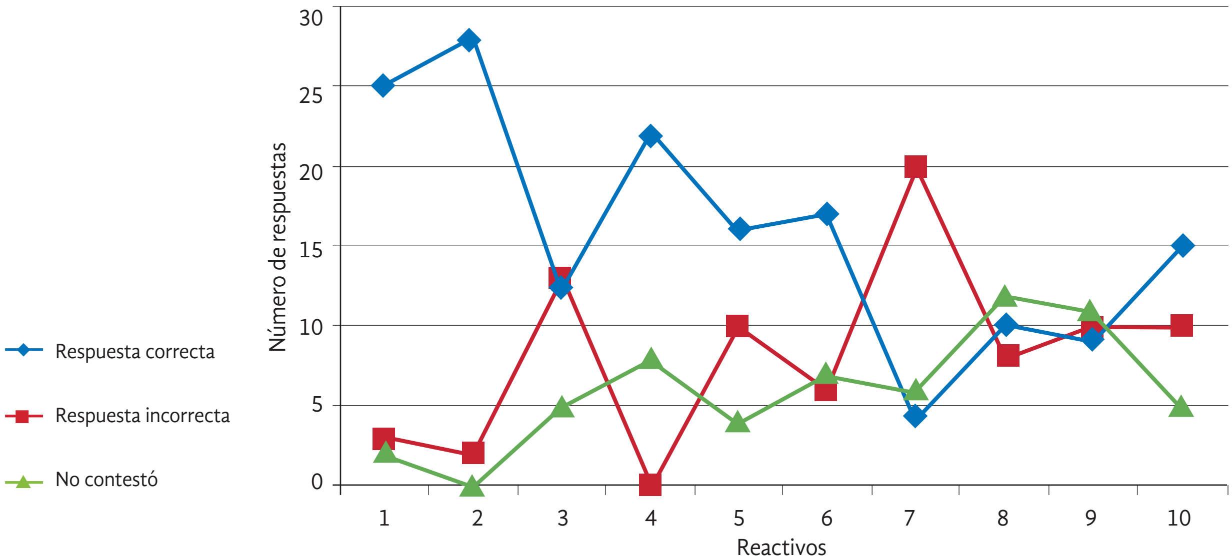
En la gráfica 12 se puede observar cómo se distribuyen los datos dentro del rango de cada una de las categorías, pese a que no todas están punteadas. Le invitamos a encontrar los otros rangos.

Las alturas de las barras en la gráfica 12 permiten visualizar claramente la cantidad de respuestas, es decir, la frecuencia absoluta por categoría, lo cual favorece la comparación entre ellas. Ahora le presentamos una *gráfica de líneas* basada en los datos de la misma tabla 7. Este tipo de gráfica permite visualizar el comportamiento de los datos de interés y, en particular, la dispersión en el rango.

Gráfica 12 | Frecuencia absoluta de respuestas por categoría



Gráfica 13 | Frecuencia absoluta de respuestas por categoría



Por otra parte, al analizar las gráficas, el lector puede realizar algunos hallazgos interesantes que se desprenden de los datos proporcionados:

- El reactivo que con mayor frecuencia contestan correctamente los alumnos es el número 2.
- El reactivo que con mayor frecuencia contestan incorrectamente los alumnos es el número 7.
- El reactivo que con mayor frecuencia no es respondido por los alumnos es el número 8.

> ¿Qué tipo de preguntas se haría usted al analizar los resultados anteriores?

Otro dato que se desprende de este análisis es que la frecuencia absoluta de respuestas correctas es 158 y que las otras dos suman 142. Esto tiene implicaciones lógicas para efectos prácticos en términos de la calificación obtenida, porque los alumnos que se ubican en cualquiera de estas dos últimas categorías no obtuvieron ningún puntaje.

La cantidad de respuestas correctas —es decir, aprobadas— apenas es superior a la cantidad de respuestas no aprobadas. ¿Qué puede significar este hecho en términos del desempeño del grupo en este examen? ¿Qué le dice este dato?

Al dividir la frecuencia absoluta entre el total de aciertos por categoría, se obtiene una cifra muy útil que nos dice la fracción del total de aciertos que fue obtenida por los alumnos en cada reactivo. Este número es siempre una fracción entre cero y uno.

Esta razón se conoce como *frecuencia relativa* (h). En la siguiente tabla se muestran los valores de h para las dos categorías que hemos construido:

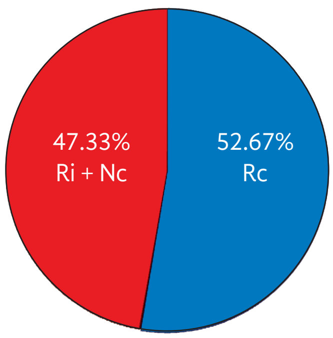
Tabla 8 | Frecuencia relativa de 6°B

Respuestas aprobadas = Rc		Respuestas no aprobadas = Ri + Nc	
h = f/n	%h	h = f/n	%h
= 0.5266	52.66%	= 0.4733	47.33%

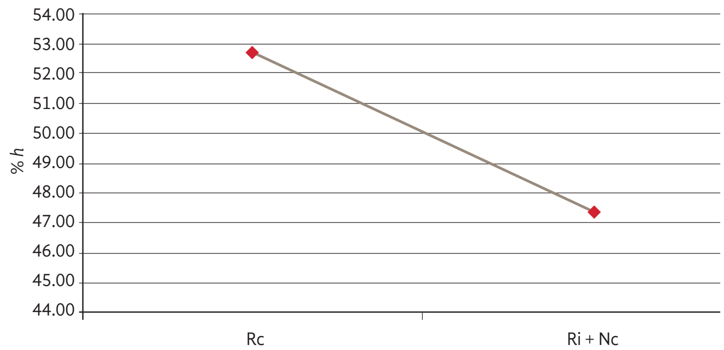
Cuando se multiplica el dato de frecuencia relativa por 100, se obtiene el porcentaje de esta frecuencia, que es una forma muy utilizada para expresar las frecuencias relativas.

A continuación se muestra el *porcentaje de frecuencia relativa* de las respuestas de los alumnos organizadas conforme a las nuevas categorías de la tabla anterior y empleando dos tipos de gráficas, con el propósito de mostrarle opciones que pueden serle útiles al desarrollar diferentes casos.

Gráfica 14 | Respuestas aprobadas y no aprobadas por categoría



Gráfica 15 | Porcentaje de respuestas aprobadas y no aprobadas



¿Cuál de las gráficas anteriores le pareció más clara? Nosotros consideramos que, para este caso, la gráfica lineal no es muy útil.

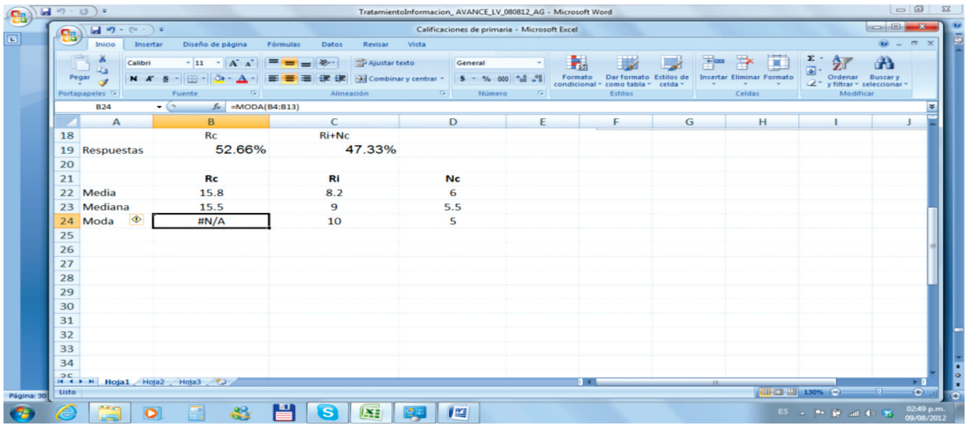
Ahora obtengamos las medidas de tendencia central de las respuestas de los alumnos, tal como estaban agrupadas inicialmente:

Tabla 9 | Medidas de tendencia central 6°B

	Rc	Ri	Nc
Promedio	15.8	8.2	6
Mediana	15.5	9	5.5
Moda	No existe	10	5

Los resultados para la categoría Rc son de 15.8 para la media, 15.5 para la mediana y la moda no existe (figura 12, p. 162).

Figura 12 | Cálculo de medidas de tendencia central



La moda no ha podido obtenerse en una de las columnas al aplicar esta función en la hoja de cálculo. ¿Cuál es la razón? Observe en la columna siguiente, que pertenece a la tabla 7 (p. 158), los datos que corresponden a Rc y encontrará la respuesta:

25
28
12
22
16
17
4
10
9
15

Atendiendo a la definición de este tipo de medida de tendencia central, en el listado de números no hay en la categoría de respuestas correctas algún dato que se repita. En las otras medidas no hay problema.

Las tres medidas de tendencia central pueden ser números representativos de una población o de la tendencia central de una muestra. No puede afirmarse que uno sea más informativo que el otro, sino que los tres juntos permiten entender mejor el comportamiento de los datos.

Si considera que el promedio es mejor que las otras medidas, le invitamos a analizar este conjunto de datos:

$$\{3, 3, 3, 3, 3, 100\}.$$

El promedio es: $115/6 = 19.16$.

¿Le parece que este número refleja fielmente lo que su intuición le sugiere?

Le invitamos a calcular la mediana y la moda de este conjunto de datos.

Por otra parte, le presentaremos ahora una medida que permite identificar la dispersión de una gran cantidad de datos o variables alrededor de la media. Se trata de la *varianza*, que se calcula obteniendo el promedio de las desviaciones con respecto a la media, elevadas al cuadrado.

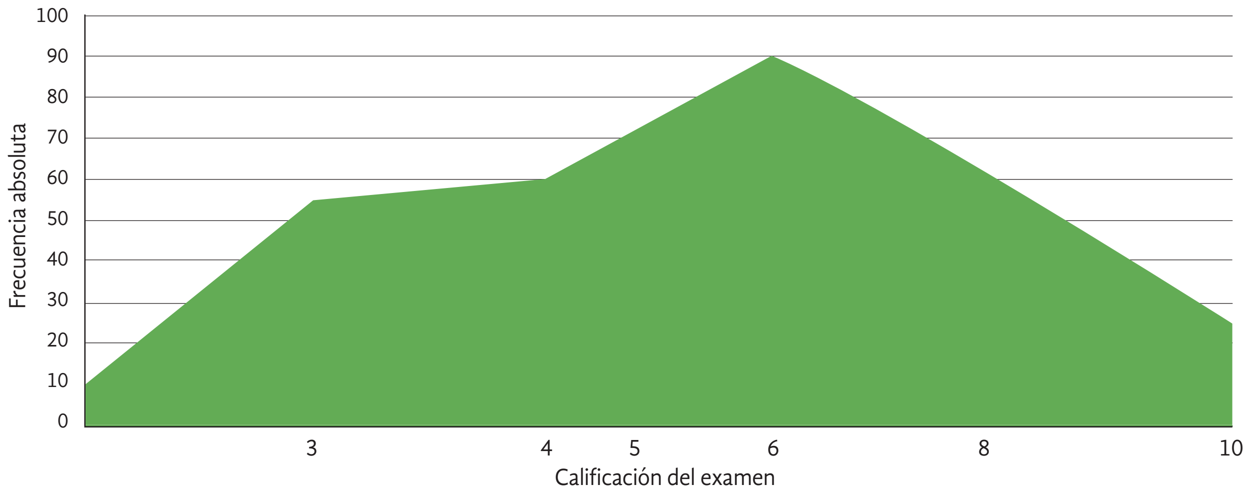
Para ejemplificar el cálculo de la varianza y apreciar mejor lo que significa este concepto, tomemos nuevamente el caso de los exámenes. Supongamos que se aplica el mismo examen de matemáticas a 300 alumnos de varios planteles educativos pertenecientes a una determinada zona escolar. Los resultados se muestran en la tabla 10.

Tabla 10 | CALIFICACIONES ZONA ESCOLAR 1

Calificaciones 6° año	Número de alumnos
3	10
4	55
5	60
6	90
8	60
10	25
6	**Media**

La media de las calificaciones obtenidas por los alumnos es 6.

Gráfica 16 | CALIFICACIONES DE 6° AÑO



La parte más alta de la curva en esta gráfica corresponde a la media. La dispersión de las otras calificaciones con respecto a la media se distribuye como se muestra. Entre mayor sea la muestra, la gráfica se parecerá más a una campana uniforme, pero de esto hablaremos en el último apartado.

Por ahora nos interesa medir esta dispersión de las calificaciones, para lo cual aplicaremos el concepto de varianza, definido anteriormente. Para calcularla, primero se obtiene el valor absoluto de la diferencia de cada calificación con respecto a la media. Por ejemplo, para la primera calificación, la diferencia es: $6 - 3 = 3$, y así se van haciendo las restas de cada calificación. El conjunto de datos de la desviación queda así:

$$\{3, 2, 1, 0, 2, 4\}$$

Estos valores se elevan al cuadrado, quedando como sigue:

$$\{9, 4, 1, 0, 4, 16\}$$

Posteriormente se calcula el producto de cada una de estas desviaciones cuadráticas por la frecuencia. Se obtiene el promedio de todas ellas, es decir, se suman los productos y se dividen entre 300 alumnos. Ésta es precisamente la varianza.

El procedimiento descrito se muestra paso a paso en la siguiente tabla. Desde luego, esto se facilita al emplear una hoja de cálculo en la que se ingrese la fórmula de la varianza.

Tabla 11 | Cálculo de varianza

Calificaciones 6° año	*Desviación de la media*	*Desviación al cuadrado*	*(Desviación al cuadrado) X (frecuencia)*
3	3	9	90
4	2	4	220
5	1	1	60
6	0	0	0
8	2	4	240
10	4	16	400
Media = 6		**Varianza (σ^2)**	3.37
		Desviación estándar	1.84

La raíz cuadrada de la varianza se denomina *desviación estándar* y proporciona también una medida de la dispersión que, en términos gráficos, muestra qué tan alta o aplanada es la curva de campana.

Mientras más cercanos a la media sean los datos, la varianza y la desviación estándar tendrán valores pequeños y la curva de campana será alta.

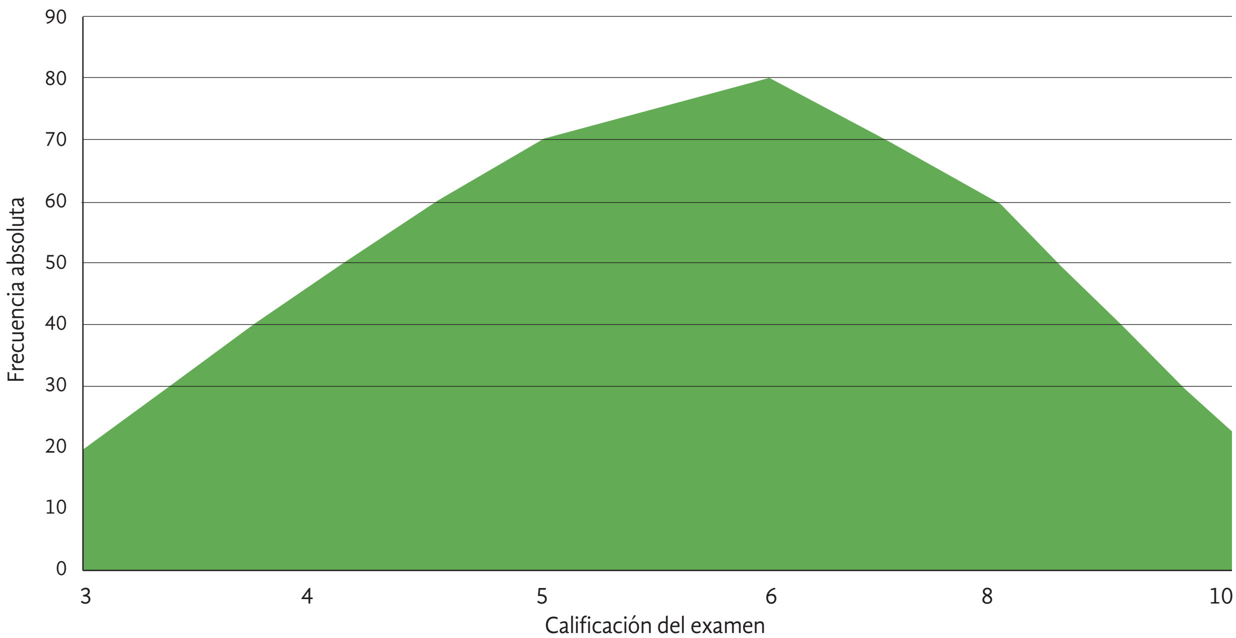
Por el contrario, los valores de la varianza y desviación estándar serán mayores en la medida en que la dispersión de los datos sea mayor, lo que significa que no son muchos los valores que se concentran alrededor de la media. Esta lejanía ocasiona que la curva de campana sea ancha o aplanada.

Invitamos al lector a observar la tabla 12, que corresponde a las calificaciones obtenidas por los alumnos de otra zona escolar a quienes se aplicó el mismo examen de matemáticas. Curiosamente, la media también es 6, pero las frecuencias de las calificaciones obtenidas son diferentes. Observe la gráfica de estas calificaciones (gráfica 17, p. 165).

Tabla 12 | Calificaciones zona escolar 2

Calificaciones 6° año	Número de alumnos
3	20
4	47
5	70
6	80
8	60
10	23
6	**Media**
Muestra	300 alumnos

Gráfica 17 | Calificaciones de 6° año. Zona 2



Le proponemos analizar las gráficas de ambos grupos y responder los cuestionamientos:

- ¿Qué diferencias encuentra en la curva de calificaciones de estos alumnos con los del primer grupo?
- ¿Cómo es la dispersión de las calificaciones: mayor o menor?
- Elabore una hipótesis. ¿Deberían ser mayores o menores los valores de la varianza y la desviación estándar en estas calificaciones?
- Le invitamos a medir la dispersión de los datos calculando la varianza y la desviación estándar para verificar su hipótesis.

Puede ayudarse con la siguiente tabla para realizar el mismo procedimiento.

Calificaciones 6° año	*Desviación de la media*	*Desviación al cuadrado*	*(Desviación al cuadrado) X (frecuencia)*
3	3	9	
4	2	4	
5	1	1	
6	0	0	
8	2	4	
10	4	16	
Media = 6		**Varianza (σ^2)**	
		Desviación estándar	

Algunos errores al analizar datos

En la tabla 13 se presentan los resultados de logro en matemáticas del Examen de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) aplicado a los alumnos de tercer grado de primaria del país. Se ha tomado únicamente la parte del cuadro que presenta el contenido curricular de Tratamiento de la información, aplicado al término del ciclo escolar 2009-2010. Los datos completos pueden consultarse en los anexos de la página electrónica del Instituto Nacional de Evaluación Educativa <http://www.inee.edu.mx/>.

Tabla 13 | Resultados nacionales de Excale 2009-2010. Alumnos de 3er año

			Porcentaje de aciertos					
Reactivo	*Contenido curricular*	*Dificultad**	*Nacional*	*Indígena*	*Comunitario público*	*Rural público*	*Urbano*	*Privado*
14	Leer e interpretar información organizada en tablas de doble entrada	496	69	44	58	61	73	85
34	Leer e interpretar gráficas de barras sencillas	542	62	35	37	51	67	79
38	Identificar lo que se puede o no contestar a partir de la información dada en una imagen	555	59	44	62	56	59	77
41	Leer e interpretar pictogramas con dibujos que representan diferentes valores	564	58	48	53	57	59	66
73	Identificar lo que se puede o no contestar a partir de la información dada en una gráfica de barras	639	44	35	37	36	45	64

* Dificultad de reactivos calibrada con la información de levantamientos de datos de 2011.

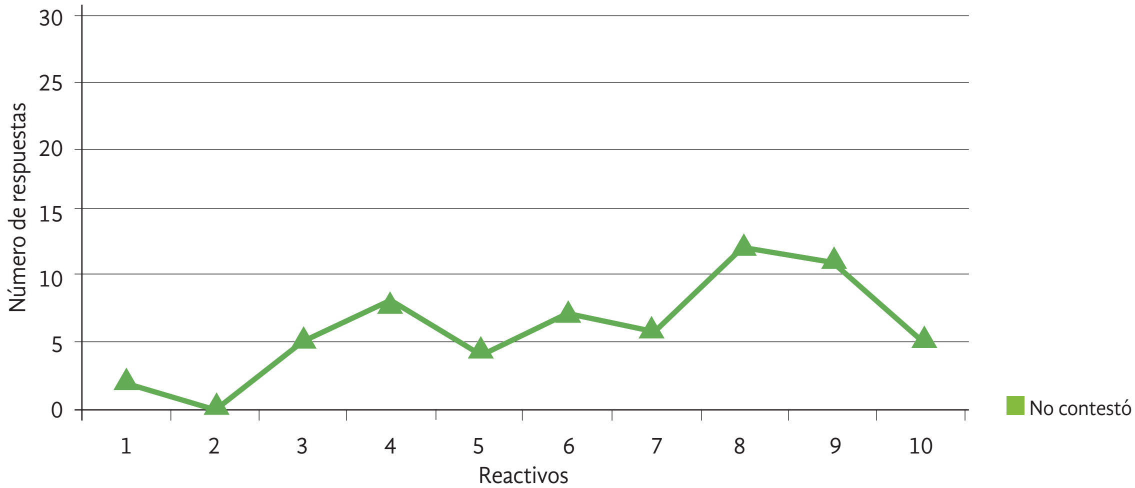
Los resultados del porcentaje de aciertos de la media nacional en los reactivos correspondientes al eje de Tratamiento de la información en tercer año de primaria son consistentes con los errores frecuentes de los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad, lo cual tiene efectos cuando se les pide interpretar lo que se puede o no contestar con la información dada en una gráfica de barras.

Esta situación puede presentarse incluso cuando ellos mismos han elaborado la gráfica. Por ejemplo, Monroy (2008) y Li y Shen (1992) destacan errores tales como:

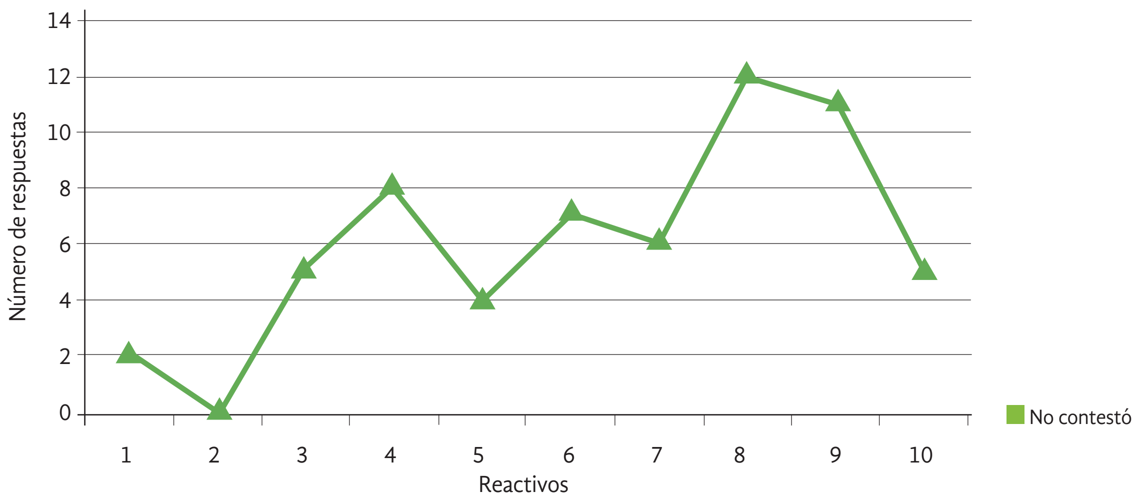
a) **No se consideran ni representan las frecuencias de los datos.** Esto significa que los estudiantes no realizan agrupaciones de la información y atribuyen una correspondencia uno a uno entre los datos y las barras. Es decir, cada número es una barra.
b) **Inversión de los ejes.** Los alumnos pueden no comprender qué es lo que van a graficar, por lo que se fijan en los números y no en las variables en que éstos se clasifican. Esta situación es común en estudiantes de primaria.
c) **Elección de una escala inadecuada.** Por ejemplo, no se cubre todo el campo de dispersión de la variable representada o francamente se omiten las escalas en alguno de los ejes.

Para ilustrar el tema de los errores de interpretación en relación con la escala, observe nuevamente la gráfica 13 (p. 160). De esta gráfica sólo consideraremos la categoría "No contestó" (gráfica 18). Compárela ahora con la gráfica 19. ¿En cuál de las dos gráficas es mayor la frecuencia de Nc?

Gráfica 18 | Frecuencia absoluta de respuestas por categoría "No contestó"



Gráfica 19 | Frecuencia absoluta de respuestas por categoría "No contestó"



Si procedemos apresuradamente, el cerebro puede engañarnos ya que en un primer vistazo pareciera que en la segunda gráfica hay mayor número de respuestas no contestadas por los alumnos. Esta interpretación es errónea puesto que los puntos que se forman de la intersección de los reactivos del examen con el número de respuestas no contestadas están más cercanos entre sí debido a que la escala va de dos en dos. Esto da como resultado una curva más detallada, en donde los puntos pueden localizarse más fácilmente que en la escala de cinco unidades de la primera gráfica.

Lo anterior no implica que la primera sea inadecuada, más bien muestra que la escala seleccionada de cinco unidades resulta muy útil para comparar simultáneamente las tres categorías y visualizar los rangos.

Con este ejemplo se quiere enfatizar la importancia de ayudar a los alumnos a que reflexionen acerca de cuál es la escala más adecuada para representar los datos que han recopilado, o los que ya tienen disponibles para ser representados en gráficas.

Desde luego que los errores cometidos por los alumnos pueden ser una oportunidad de aprendizaje cuando el maestro posee los conocimientos para identificarlos y facilita la reflexión en clase para la construcción de conceptos estadísticos fundamentales.

Es recomendable que sean los alumnos quienes propongan algunos proyectos sencillos haciendo encuestas sobre cosas que les interesan, por ejemplo, gustos, meses de cumpleaños, películas favoritas, atributos de los personajes de la historia o la literatura que abordan curricularmente, en fin.

Para finalizar —que no agotar— este apartado sobre el análisis de la información es importante resaltar que, porque vivimos en un momento histórico donde la cantidad y complejidad de la información disponible es enorme, resulta indispensable contribuir a que los alumnos desarrollen competencias para la organización, el tratamiento y el análisis de los datos que circulan por diferentes medios para desarrollar así su juicio crítico.

INFERENCIA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

La estadística consta de métodos para obtener información a partir de un conjunto de datos observados en un determinado grupo de individuos para su posterior tratamiento e interpretación. La estadística actúa constantemente como puente entre los modelos matemáticos y los fenómenos reales. Hay dos ramas de la estadística: la *estadística descriptiva* y la *estadística inferencial*.

La estadística descriptiva, como su nombre lo indica, usa métodos para describir con claridad el conjunto de datos con que se cuenta. Hasta ahora hemos usado algunos de estos métodos, como dibujar gráficas y calcular valores indicativos o que de alguna manera son representativos de toda la información, como las medidas de tendencia central de un conjunto de números.

La estadística inferencial, en cambio, hace un mayor uso de las matemáticas y, en particular, de la probabilidad o del cálculo de probabilidades. Si la población que se quiere considerar es muy grande, se selecciona una muestra y, a partir de métodos probabilísticos aplicados a ella, se obtienen conclusiones sobre toda la población. Es por eso que, para hablar de estadística inferencial, primero hablaremos de la probabilidad.

A partir del siglo XX se llegó a la conclusión de que una gran cantidad de fenómenos estudiados por las ciencias sociales como la cantidad de defunciones en un año, y también por las ciencias naturales, en realidad son de índole azarosa. La posición y velocidad exactas de las partículas elementales de la materia, el tiempo que durará la batería de un coche, o el número de eritrocitos que se regeneran después de donar sangre son eventos que pueden predecirse con base en los datos provenientes de observaciones o experimentos, pero sus valores no pueden determinarse con total seguridad.

Aun las leyes de la física clásica tienen restricciones porque, al experimentar con las variables de interés en la realidad, es claro que deben considerarse condiciones ideales que difícilmente se logran en la práctica, de modo que las predicciones pueden aproximarse en mayor o menor medida a los valores reales, pero no puede decirse que sean iguales.

Galileo tuvo que despreciar algunos aspectos de la realidad, como la forma de los cuerpos y la resistencia del aire, para afirmar que los objetos caen al mismo tiempo, independientemente de su masa. Lo mismo hizo Newton para formular su Ley de la inercia al aplicar condiciones ideales para su cumplimiento, como la ausencia de fuerzas de fricción para el estado de movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo.

Gracias a estas leyes podemos predecir el comportamiento de objetos físicos con una buena aproximación, pero existen otros que son producto de la casualidad, del azar. A esos fenómenos aleatorios que pueden aparecer en la ciencia o en muchas otras áreas, incluido el entretenimiento, se les conoce como fenómenos *probabilísticos*.

Muchas civilizaciones antiguas atribuían a ciertos fenómenos naturales los eventos de su destino y del de todo un pueblo. Por ejemplo, los eclipses, la alineación de los planetas, los signos del zodiaco y la aparición de un cometa traían buenos o malos augurios para las personas.

Los griegos edificaron un enorme templo para rendirle culto a la diosa Tique y tener "buena suerte". Decían que Tique era responsable de todas las casualidades y controlaba el destino de las personas. Los romanos adoptaron esta deidad y le pusieron el nombre de Fortuna.

Figura 13 | La diosa Tique.

La teoría de la probabilidad nace a partir de la curiosidad por encontrar mecanismos para ganar en los juegos de azar. El matemático renacentista Girolamo Cardano era un jugador empedernido que estudió la forma de aplicar las matemáticas para ganar, haciendo o descubriendo trampas. Para que otros se beneficiaran de sus hallazgos publicó un libro que era una especie de manual del jugador, llamado *El libro de los juegos de azar*.

Años más tarde, el francés Antoine Gombaud resolvió algunos problemas sencillos de probabilidades porque gustaba de las matemáticas, y solicitó el consejo de su amigo Blaise Pascal para emplearlas con el fin de determinar las apuestas en los juegos de dados. Pascal no sólo se interesó por el reto, sino que comenzó una correspondencia con el matemático Pierre de Fermat que dio como resultado una nueva ciencia: el cálculo de probabilidades, en la que se incorporaba el rigor de la demostración.

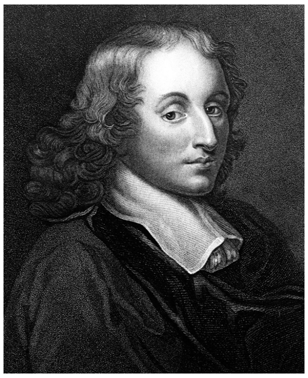


Figura 14 | Blaise Pascal | Latin Stock México.

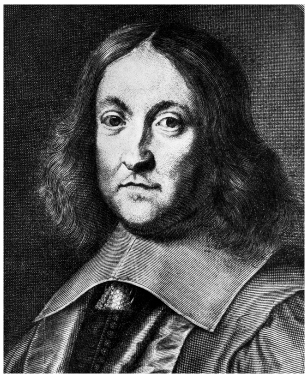


Figura 15 | Pierre de Fermat | Latin Stock México.

Tras un esfuerzo considerable de ambos matemáticos, se trazó el camino hacia un método general para calcular las probabilidades que parte de una idea muy sencilla para definir rigurosamente la probabilidad:

> La probabilidad de un evento es el número de casos favorables dividido por el número total de casos, siempre y cuando, todos los casos sean igualmente probables.

Éste es el principio básico que sirve como fundamento al cálculo de probabilidades aplicado a los juegos de azar y a muchas otras situaciones en las que es posible construir un modelo basado en casos que tienen la misma probabilidad.

La definición de probabilidad que dieron Fermat y Pascal parece muy sencilla y fácil de aplicar. Por ejemplo, si tiramos un dado que no esté "cargado" —lo cual quiere decir que la probabilidad de que caiga una cara u otra del dado es la misma—, entonces ésta debe ser, de acuerdo con la definición, igual a 1/6, debido a que hay seis casos igualmente probables.

Pasemos ahora a una situación muy diferente. Supongamos que queremos calcular la probabilidad de que alguien cruce una calle sin ser atropellado. Al cruzar la calle pueden pasar sólo dos cosas: que la persona sea atropellada o que no lo sea, así que alguien podría decir que la probabilidad de ser atropellado es de 1/2. De ser esto cierto, la esperanza de vida en las ciudades no sería muy alta. Hay un error en ese razonamiento. ¿Cuál? El error reside en que se consideraron los dos resultados posibles como si fueran igualmente probables. No siempre que haya un número definido de posibles resultados, todos son igualmente probables. Pero cuando sí lo son, entonces, y sólo entonces, podemos calcular sus probabilidades siguiendo la definición de Fermat y Pascal. Veamos un ejemplo.

Consideremos el siguiente experimento. Se tiran dos monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan dos águilas? ¿De que caiga un águila y un sol? ¿De que caigan dos soles? Para calcular estas probabilidades, primero tomaremos en cuenta de cuántas maneras distintas pueden caer las monedas:

águila-águila	águila-sol	sol-águila	sol-sol

Cada una de ellas es igualmente posible. De estos cuatro posibles resultados, sólo uno es favorable a la obtención de dos águilas, por lo que la probabilidad de que caigan dos águilas es de 1/4. Le invitamos a calcular las probabilidades de los otros eventos.

¿Pero qué pasa cuando queremos calcular la probabilidad de eventos que tienen que ver con fenómenos más complejos? Por ejemplo, la de que cierta persona, que tiene 40 años de edad, llegue a cumplir 60. ¿Podríamos decir que los dos resultados posibles, vida o muerte a los 60 años, son igualmente probables? Nuestra experiencia nos dice que no. ¿Cree que podrían calcularse las probabilidades de que una persona de 40 años muera de algún padecimiento como cáncer, diabetes, enfermedades cardiacas, etc., o de un accidente mortal a los 60 años? Eso parece muy complicado y, suponiendo que estas probabilidades pudieran calcularse de alguna manera, todavía habría que combinar los resultados para obtener la probabilidad de que una persona de 40 años viva veinte años más.

Éste no parece un método ni sencillo ni necesariamente "correcto" para obtener esa probabilidad. Sin embargo, para las compañías de seguros es muy importante calcular esas probabilidades.

Para resolver este problema, proceden más o menos así: compilan registros de nacimiento y muerte de 100 000 personas y encuentran que, por ejemplo, de las 100 000 personas vivas a la edad de 10 años, 78 106 llegaron a cumplir 40. Toman 78 106/100 000, es decir, 0.78 aproximadamente, como la probabilidad de que una persona de 10 años llegue a los 40.

Si de los 78 106 vivos a la edad de 40 años, 57 917 llegan a los 60 años de edad, entonces toman la razón 57 917/78 106, que es aproximadamente 0.74, como la probabilidad de que una persona de 40 años llegue a los 60.

Esta manera de calcular la probabilidad consiste básicamente en recurrir a la observación para determinar el número de casos favorables del total de casos posibles. Estas probabilidades son estimaciones que permiten a las compañías de seguros, por ejemplo, poner un precio justo a los seguros de vida de manera que les garanticen una ganancia, pero sean competitivos con los de otras compañías. Se basan en la idea de que una muestra de 100 000 personas es "lo suficientemente grande" como para considerar "confiables" las probabilidades estimadas por este método.

Veamos a qué nos referimos con "suficientemente grande" mediante un ejemplo.

¿Por qué decidimos que cada una de las caras de un dado tiene la misma probabilidad de caer arriba al tirarlo? Observemos el siguiente conjunto de resultados obtenidos al lanzar diez veces diez dados:

4	2	2	2	2	6	1	1	6	2
3	3	1	1	4	3	4	3	2	1
1	2	3	5	5	6	2	2	5	6
5	4	3	6	5	5	4	2	4	2
2	2	5	4	1	3	6	5	4	4
1	5	5	2	2	6	4	6	3	2
2	4	1	1	2	5	2	4	3	1
4	4	2	5	5	1	4	4	2	2
2	2	5	4	6	3	6	2	5	3
1	1	1	1	5	4	3	4	2	2

Figura 16 |

Las frecuencias relativas de obtener cada una de las caras de los dados son:

f(1) = 16/100, f(2) = 27/100, f(3) = 12/100, f(4) = 19/100, f(5) = 17/100 y f(6) = 10/100.

En los cien tiros de los dados, la cara con el número dos cayó más veces, como si los dados estuvieran cargados hacia el número dos. Si hiciéramos varias veces el mismo experimento se podrían observar otras peculiaridades en cada caso. Y si lo hiciéramos diez mil veces, un millón y luego cien millones de veces, y cada vez calculáramos las frecuencias, observaríamos que se parecen cada vez más a 1/6, pero quizá nunca sean exactamente iguales a este valor. Ésta es la naturaleza de los fenómenos aleatorios, la probabilidad a veces puede calcularse con exactitud, pero los resultados de un experimento se parecen a lo que las probabilidades predicen sólo a la larga.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de la probabilidad es la *Ley de los grandes números*, que afirma que, a la larga, la frecuencia observada de las ocurrencias de un evento se acerca a su probabilidad. Este acercamiento o convergencia es el que brinda confiabilidad a los cálculos que hacen las compañías de seguros.

Cabe mencionar, sin embargo, que debido a que este acercamiento es muy lento, con frecuencia se producen muchos errores en la interpretación de los resultados. Por ejemplo, en la línea 2 de la figura 16 (p. 171) no aparecen ni el 5 ni el 6, por lo que podría pensarse que el dado está cargado hacia otros números o que estamos tirando no un cubo sino un tetraedro y se estaría considerando un experimento completamente diferente.

Otro tipo de error es el que se produce al afirmar, por ejemplo, que el 2 tiene mayor probabilidad de salir, lo cual podría observarse cuando no se realiza un número suficientemente grande de observaciones, pero que es evidentemente falso si los dados no están cargados.

Para ilustrar con mayor claridad el hecho de que hay resultados que contradicen nuestra intuición vamos a recurrir a un ejemplo clásico: la paradoja del cumpleaños.

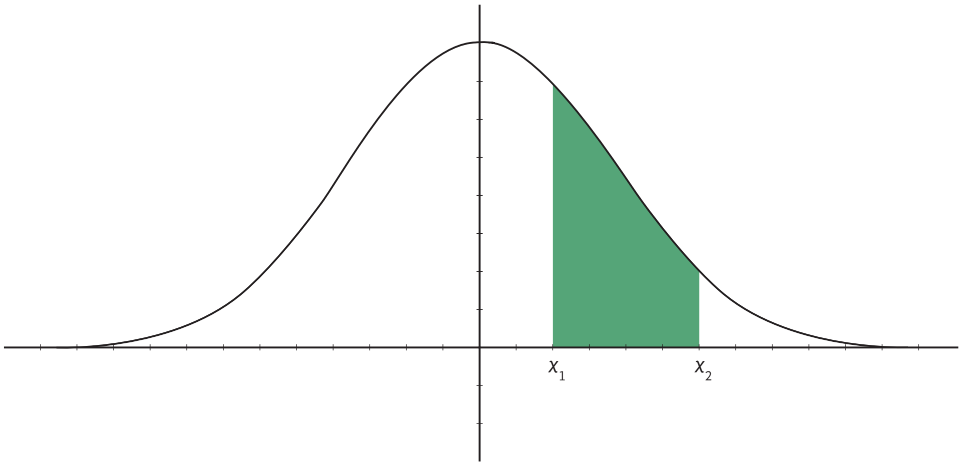
¿Qué probabilidad hay de que en un salón con 50 alumnos, dos de ellos cumplan años el mismo día? Podría ser que nuestra intuición nos indique que esta probabilidad es muy baja, pero un cálculo preciso nos muestra que, de hecho, es muy alta, cercana a 0.97.

Esta discrepancia entre la intuición y la realidad se debe a que, en general, confundimos la pregunta con esta otra: ¿cuál es la probabilidad de que yo encuentre entre 50 alumnos otro que cumpla años el mismo día que yo? Esta probabilidad es pequeña: 49/365, es decir, aproximadamente 0.13. Pero la probabilidad de que entre 50 alumnos, dos hayan nacido en la misma fecha es mucho más grande. Se calcula con la ayuda del evento complementario, es decir, que las 50 personas tengan fechas de nacimiento diferentes, que es:

$$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\ldots\times\frac{316}{365}$$

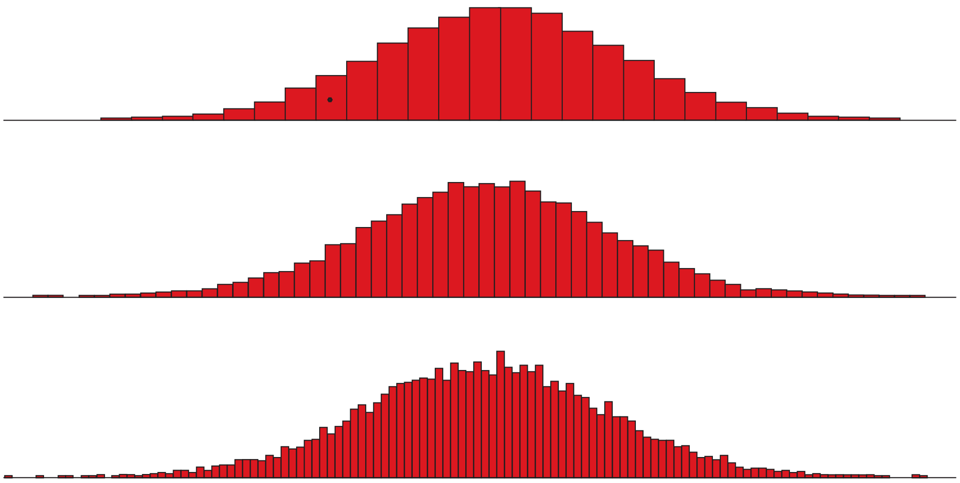
Esto da un valor de aproximadamente 0.03 (hágalo con una calculadora para convencerse). Por lo tanto, la probabilidad de que al menos dos personas tengan la misma fecha de nacimiento es de 1 – 0.03= 0.97. Esta diferencia se puede representar en una gráfica de distribución, en donde se muestra la región de probabilidad de un evento:

Gráfica 20 | Región de probabilidad de un evento



En el experimento de lanzar un dado, si consideramos el número en la cara superior y observamos el valor que toma el promedio de las frecuencias para un cierto número de observaciones, obtenemos algo muy interesante. Veamos la siguiente gráfica.

Gráfica 21 | Histogramas de frecuencias de eventos

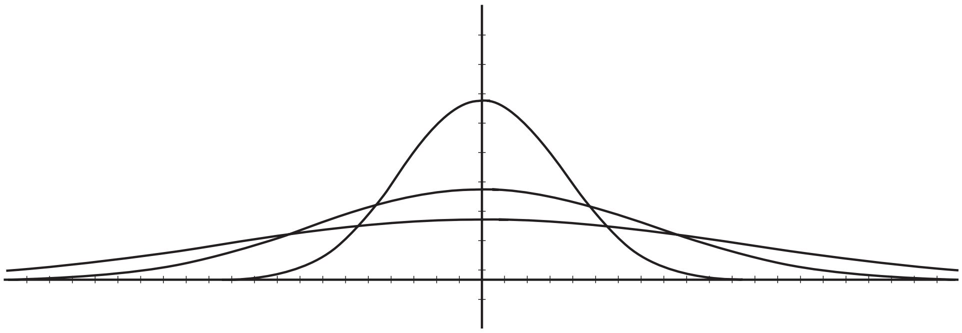


Número de repeticiones = 16 000

Los histogramas corresponden a las gráficas de las frecuencias de los resultados obtenidos al realizar 16 000 veces el experimento de lanzar 5, 20 y 80 dados, respectivamente.

Estos histogramas se parecen mucho a una famosa curva llamada la *Campana de Gauss*, por su forma de campana y en honor del gran matemático Karl Friederich Gauss, quien la descubrió como límite natural de casi todas las distribuciones de probabilidad. Por eso, a una distribución de probabilidad de este tipo se le llama *distribución normal*.

Gráfica 22 | Campana de Gauss



Es importante señalar que uno de los grandes teoremas de la teoría de la probabilidad, el *Teorema del límite central*, afirma que las observaciones aleatorias tienden a comportarse, en promedio, como una distribución normal cuando se realiza el experimento un número de veces suficientemente grande.

Este teorema es uno de los resultados más útiles para la estadística inferencial.

Estadística inferencial

En la estadística descriptiva, como hemos visto, pueden llegar a manejarse una gran cantidad de datos porque ésta se hace sobre poblaciones, pero no se aplican métodos probabilísticos para el tratamiento de la información obtenida a partir de esos datos. Trata más de la organización de la información para poder realizar afirmaciones claras, directamente observables en los propios datos. En cambio, la estadística inferencial trata con muestras de la población usando métodos probabilísticos y, con la información obtenida de la muestra, infiere afirmaciones confiables acerca de toda la población. Los métodos de la estadística inferencial son tan variados que hay toda una rama de las matemáticas dedicada a estudiarlos y a inventar e investigar otros nuevos.

En esta sección ilustraremos uno de estos métodos a partir de un ejemplo del que seguramente usted ha escuchado hablar: la prueba de un nuevo medicamento en su fase final de desarrollo al aplicarlo en seres humanos. ¿Cómo saber si el nuevo medicamento es mejor que otro? Esta pregunta es importante para los pacientes, los médicos y también para la industria farmacéutica. Para realizar esta investigación es necesario diseñar y realizar un experimento. El diseño del experimento es muy importante en varios sentidos. En él deben intervenir varias reglas que se deben cumplir para llegar a conclusiones válidas y confiables. Además, la manera en que se toman los datos determina el o los modelos estadísticos que se utilizarán en su análisis posterior.

Es necesario definir el alcance del experimento, es decir, la muestra. ¿Se usarán sujetos sanos o sujetos que padecen lo que el medicamento pretende curar? Muchas veces esta decisión depende de las regulaciones sanitarias de determinado país.[1]

Luego, hay que decidir cómo se realizará el experimento. En el caso de que se administre el medicamento a todos los sujetos de la muestra hay que determinar qué se va a medir para determinar si el nuevo medicamento es mejor que el anterior. Digamos que se utilizarán sujetos enfermos y que se medirá, por ejemplo, su temperatura corporal algún tiempo antes y después de suministrarles el medicamento para así calcular el cambio de temperatura en cada individuo.

Otra cuestión importante es asegurarse de no tener una muestra sesgada o tendenciosa, lo que pasaría si se hubieran elegido pacientes particularmente fuertes y que responden mejor a cualquier medicina que la media de los pacientes, o bien, una muestra de pacientes enfermos de varios días y que tienden a curarse más rápidamente que los que acaban de contraer la enfermedad o al contrario. La mejor manera de resolver esto es elegir una muestra aleatoria.

Por otra parte, cuanto más grande sea la muestra, más confiables serán los resultados, pero esto también eleva el costo del experimento y además más personas tomarían el riesgo de padecer posibles efectos secundarios al tomar el medicamento. Por lo anterior, un importante problema a resolver es el tamaño de la muestra. Existen varios métodos probabilísticos para determinar el tamaño mínimo de una muestra que permita obtener inferencias válidas y al mismo tiempo disminuir el costo de la investigación.[2]

---

[1] Para saber un poco más al respecto le recomendamos consultar el siguiente artículo: G. Magos y M. Lorenzana-Jiménez, "Las fases en el desarrollo de nuevos medicamentos", *Revista de la Facultad de Medicina*, México, UNAM, vol. 52, núm. 6, noviembre-diciembre, 2009, consultado en <http://www.ejournal.unam.mx/rfm/no52-6/RFM052000605.pdf>.

[2] A manera de ejemplo puede consultar: Gallego C. Fuentelsaz, "Cálculo del tamaño de la muestra", consultado en <http://www.metodologiasytecnicas.ecaths.com/archivos/metodologiasytecnicas/calculo_muestra. pdf>. Creemos que los elementos proporcionados en este capítulo serán suficientes para entender, al menos de manera general, este artículo.

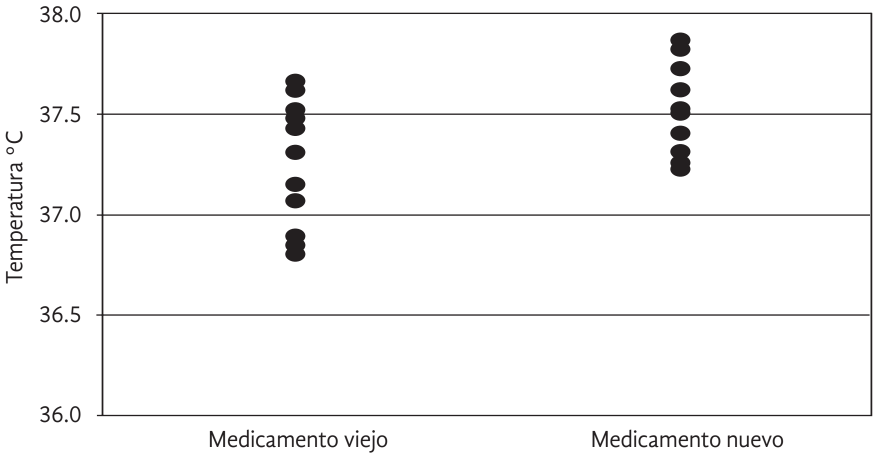
En un experimento de este tipo hay muchos otros detalles a considerar pero, para simplificar, supongamos que ya se eligió una muestra no sesgada de *N* enfermos que han aceptado responsablemente participar en el experimento (cuestión imprescindible para el experimento) y que se llevará a cabo administrando el medicamento a estos enfermos en periodos preestablecidos de tiempo, midiendo y registrando su temperatura un número determinado de horas después.

Hay tres aspectos fundamentales del diseño de un experimento que se resuelven por medio de la teoría y los métodos estadísticos:

1. **Repetición.** La confiabilidad y la precisión deseada del experimento determina el número de repeticiones.
2. **Aleatorización.** La forma de seleccionar una muestra aleatoria está definida por las características de los individuos. Se trata de obtener una comparación justa entre los medicamentos.
3. **Control.** Los conocimientos biológicos, junto con los del diseño experimental, nos dicen qué factores tenemos que controlar y cómo hacerlo.

Nuestra meta es llegar a una conclusión a partir de los datos del experimento. Esto requiere un análisis de los resultados para luego hacer la inferencia deseada.

Gráfica 23 | Temperaturas con el medicamento viejo y con el nuevo



¿Podemos saber cuál de los medicamentos es mejor a partir de la gráfica? Cada punto en la gráfica representa la temperatura de un enfermo. A simple vista parece que el medicamento nuevo no logró disminuir la temperatura de los enfermos tanto como el viejo. Sin embargo, mirando atentamente, observamos que varios resultados del nuevo medicamento se acumulan alrededor y abajo de 37.5°, que parece ser el promedio de las temperaturas para el medicamento viejo, por lo que no es obvio cuál medicamento es mejor. Para obtener una respuesta clara recurrimos a una metodología específica que se denomina *prueba de hipótesis*.

Para hacerla, se plantea una hipótesis que llamaremos *hipótesis nula* y que denotaremos como H_0. Esta prueba consiste en determinar una regla de decisión para desestimar o no la hipótesis. Observe que no se habla de aceptar el medicamento, sino de rechazarlo o no. Ésta es una muestra del cuidado extremo que debe tenerse en este tipo de trabajos.

Inferencia	*H_0 en realidad es cierta*	*H_0 en realidad es falsa*
Se rechaza la hipótesis H_0	Error tipo I con probabilidad α	Inferencia correcta
No se rechaza la hipótesis H_0	Inferencia correcta	Error tipo I con probabilidad β

Las probabilidades α y β indicadas en la tabla tienen cada una un significado preciso e importante: $1 - \alpha$ es el *grado de confianza* que da a la prueba; $1 - \beta$ es la *potencia* de la prueba. Es decisión de quien diseña el experimento elegir los valores de α y β que quiera para tomar las decisiones correspondientes, pero el cálculo de si se rechaza o no la hipótesis se sigue de manera directa a partir de los datos y los valores de α y β, y se realiza por un procedimiento matemático bastante técnico pero muy preciso que describiremos brevemente, aunque no esperamos que quede enteramente claro al lector. Lo importante es que sepa que se puede hacer y que sólo se necesita un poco más de matemáticas de las que se han presentado en este libro.

El procedimiento es el siguiente: si se conocieran las varianzas poblacionales, usaríamos una distribución normal para determinar las probabilidades α y β. Pero como no se conocen, hay que estimarlas. Para esto se usa otra distribución bien conocida llamada *t* de Student,[3] que no explicaremos aquí, sólo diremos que es muy parecida a la distribución normal y que precisamente sirve para estimar las probabilidades α y β para un número determinado de observaciones independientes.

Hay otras distribuciones que se pueden usar para las pruebas de hipótesis o para otros procedimientos estadísticos.

Lo que es invariable es el hecho de que en los resultados estadísticos siempre hay una probabilidad de error y ésta debe enunciarse explícitamente, de otra manera se estaría engañando al lector de los resultados. La estadística proporciona resultados con cierto grado de confianza pero nunca con absoluta certeza. Sin embargo, es una herramienta muy poderosa y muy utilizada en la toma de decisiones en prácticamente todos los ámbitos de la actividad humana.

[3] Student era el seudónimo con el cual William S. Gosset, estadístico inglés, publicó sus trabajos. Guiness, la destilería para la que trabajaba, prohibía a sus empleados publicar artículos debido al secreto industrial.

CONTENIDOS Y APRENDIZAJES DE MATEMÁTICAS ESPERADOS EN LOS DIFERENTES GRADOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Segundo periodo curricular que termina en tercer grado

Los estándares curriculares para el eje de Sentido numérico y Pensamiento algebraico en el segundo periodo curricular son los siguientes. El alumno:

- Lee, escribe y compara números naturales de hasta cuatro cifras.
- Resuelve problemas de reparto en los que el resultado es una fracción de la forma $m/2^n$.
- Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números naturales utilizando los algoritmos convencionales.
- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales utilizando procedimientos informales.

El estándar curricular para el eje de Forma, espacio y medida en el segundo periodo curricular es el siguiente. El alumno:

- Mide y compara longitudes utilizando unidades no convencionales y algunas convencionales comunes (m, cm).

Tercer periodo curricular que termina en sexto grado

Los Estándares curriculares para el eje de Sentido numérico y Pensamiento algebraico en el tercer periodo curricular son los siguientes. El alumno:

- Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.
- Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales empleando los algoritmos convencionales.
- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales empleando los algoritmos convencionales.
- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales utilizando los algoritmos convencionales.

Los estándares curriculares para el eje de Forma, espacio y medida en el tercer periodo curricular son los siguientes. El alumno:

- Explica las características de diferentes tipos de rectas, ángulos, polígonos y cuerpos geométricos.
- Utiliza sistemas de referencia convencionales para ubicar puntos o describir su ubicación en planos, mapas y en el primer cuadrante del plano cartesiano.
- Establece relaciones entre las unidades del Sistema Internacional de Medidas, entre las unidades del Sistema Inglés y entre las unidades de ambos sistemas.
- Usa fórmulas para calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.
- Utiliza y relaciona unidades de tiempo (milenios, siglos, décadas, años, meses, semanas, días, horas y minutos) para establecer la duración de diversos sucesos.

El estándar curricular para el eje de Tratamiento de la información en el tercer periodo curricular es el siguiente. El alumno:

- Lee información en pictogramas, gráficas de barras y otros portadores. Interpreta la información y los procesos de medición.

PRIMER GRADO

Temas fundamentales	Aprendizajes esperados
Números y sistemas de numeración	• Utiliza los números ordinales al resolver problemas planteados de forma oral. • Resuelve problemas que implican identificar relaciones entre los números (uno más, mitad, doble, 10 más, etcétera). • Utiliza la sucesión oral y escrita de números, por lo menos hasta el 100 al resolver problemas.
Problemas aditivos	• Calcula el resultado de problemas aditivos planteados de forma oral con resultados menores que 30. • Modela y resuelve problemas aditivos con distinto significado y resultados menores que 100, utilizando los signos +, −, =. • Resuelve mentalmente sumas de dígitos y restas de 10 menos un dígito.
Medida	• Utiliza unidades arbitrarias de medida para comparar, ordenar, estimar y medir longitudes.

SEGUNDO GRADO

Temas fundamentales	Aprendizajes esperados
Números y sistemas de numeración	• Determina la cardinalidad de colecciones numerosas representadas gráficamente. • Produce o completa sucesiones de números naturales, orales y escritas, en forma ascendente o descendente. • Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con objetos o figuras. • Identifica, compara y produce, oralmente o por escrito, números de tres cifras.
Problemas aditivos	• Resuelve problemas aditivos con diferentes significados, modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.
Figuras y cuerpos geométricos	• Identifica las características de figuras planas, simples y compuestas.
Medida	• Resuelve problemas que implican el uso del calendario (meses, semanas, días).

TERCER GRADO

Temas fundamentales	Aprendizajes esperados
Números y sistemas de numeración	• Produce, lee y escribe números hasta de cuatro cifras. • Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $m/2^n$. • Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.
Problemas aditivos	• Utiliza el algoritmo convencional para resolver sumas o restas con números naturales. • Resuelve problemas que implican efectuar hasta tres operaciones de adición y sustracción.
Problemas multiplicativos	• Resuelve problemas que implican el cálculo mental o escrito de productos de dígitos. • Resuelve problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos. • Resuelve problemas que implican dividir mediante diversos procedimientos.
Medida	• Resuelve problemas que implican la lectura y el uso del reloj. • Utiliza unidades de medida estándar para estimar y medir longitudes.
Análisis y representación de datos	• Representa e interpreta tablas de doble entrada o pictogramas de datos cuantitativos o cualitativos recolectados en el entorno. • Lee información contenida en gráficas de barras. • Resuelve problemas en los cuales es necesario extraer información explícita de diversos portadores.

CUARTO GRADO

Temas fundamentales	Aprendizajes esperados
Números y sistemas de numeración	• Identifica fracciones equivalentes, mayores o menores que la unidad. • Identifica fracciones de magnitudes continuas o determina qué fracción de una magnitud es una parte dada. • Compara y ordena números naturales de cuatro cifras a partir de sus nombres o de su escritura con cifras. • Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que sean equivalentes y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales. • Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones compuestas. • Identifica y genera fracciones equivalentes.
Problemas aditivos	• Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales. • Utiliza el cálculo mental para obtener la diferencia de dos números naturales de dos cifras.
Problemas multiplicativos	• Identifica problemas que se pueden resolver con una multiplicación y utiliza el algoritmo convencional en los casos necesarios. • Resuelve problemas que impliquen dividir números de hasta tres cifras entre números de hasta dos cifras.
Figuras y cuerpos geométricos	• Identifica y representa la forma de las caras de un cuerpo geométrico.
Medida	• Identifica ángulos mayores o menores que un ángulo recto. Utiliza el transportador para medir ángulos. • Resuelve problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de un rectángulo cualquiera, con base en la medida de sus lados.
Análisis y representación de datos	• Lee información explícita o implícita contenida en distintos portadores dirigidos a un público en particular. • Resuelve problemas en los cuales es necesario extraer información de tablas o gráficas de barras. • Identifica y analiza la utilidad del dato más frecuente de un conjunto de datos (moda).

QUINTO GRADO

Temas fundamentales	Aprendizajes esperados
Números y sistemas de numeración	• Explica las similitudes y diferencias entre el sistema decimal de numeración y un sistema posicional o no posicional. • Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales. • Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética o geométrica.
Problemas aditivos	• Resuelve problemas que implican sumar o restar números fraccionarios con igual o distinto denominador.
Problemas multiplicativos	• Identifica problemas que se pueden resolver con una división y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que sea necesario. • Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.
Figuras y cuerpos geométricos	• Identifica rectas paralelas, perpendiculares y secantes, así como ángulos agudos, rectos y obtusos. • Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros.
Medida	• Calcula el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros. • Resuelve problemas que implican conversiones entre unidades de medida de longitud, capacidad, peso y tiempo.
Ubicación espacial	• Describe rutas y ubica lugares utilizando sistemas de referencia convencionales que aparecen en planos o mapas.
Proporcionalidad y funciones	• Analiza procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante. • Identifica y aplica el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos. • Analiza procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante). • Relaciona el tanto por ciento con la expresión "n de cada 100". Relaciona porcentajes con las fracciones respectivas.
Análisis y representación de datos	• Analiza las convenciones para la construcción de gráficas de barras. • Calcula la media (promedio) y analiza su pertinencia respecto a la moda como dato representativo en situaciones diversas.

SEXTO GRADO

Temas fundamentales	Aprendizajes esperados
Números y sistemas de numeración	• Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales explicitando los criterios de comparación. • Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.
Problemas aditivos	• Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.
Problemas multiplicativos	• Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.
Figuras y cuerpos geométricos	• Explica las características de diversos cuerpos geométricos (número de caras, aristas, etc.) y usa el lenguaje formal.
Medida	• Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y el Sistema Inglés de Medidas.
Ubicación espacial	• Describe rutas y calcula la distancia real de un punto a otro en mapas. • Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos o trazar figuras en el primer cuadrante.
Proporcionalidad y funciones	• Calcula el tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos. • Resuelve mediante diferentes procedimientos, problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación del porcentaje que representa una cantidad en casos sencillos, aplicación de porcentajes mayores que 100%. • Compara razones en casos simples. • Compara razones del tipo "por cada n, m" mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, la expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje. • Resuelve problemas de comparación de razones con base en la equivalencia.
Análisis y representación de datos	• Lee datos contenidos en tablas y gráficas circulares para responder diversos cuestionamientos. • Lee datos, explícitos o implícitos, contenidos en diversos portadores para responder preguntas. • Usa la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la educación preescolar

Ferreiro, E., *Psicogénesis y educación*, México, CINVESTAV-IPN, Departamento de Investigaciones Educativas, 1988.

Hohmann, M. *et al.*, *Niños pequeños en acción. Manual para educadoras*, México, Trillas, 1994.

Martí, E., "Inteligencia preoperatoria", en César Coll, Jesús Palacios y Eduardo Marchesi (comps.), *Desarrollo psicológico y educación.* I *Psicología evolutiva*, Madrid, Alianza, 1993, pp. 157-171.

Moreno, M. C. y R. Cubero, "Relaciones sociales: familia, escuela, compañeros. Años preescolares", en César Coll, Jesús Palacios y Eduardo Marchesi (comps.), *Desarrollo psicológico y educación.* I *Psicología evolutiva*, Madrid, Alianza, 1993, pp. 219-232.

Ortega, R., *Crecer y aprender. Curso de psicología del desarrollo para educadores*, Madrid, Visor, 1999.

Palacios, J., *Etapas del desarrollo psicológico*, Barcelona, CEAC, 1989.

Piaget, J., *El nacimiento de la inteligencia en el niño*, Madrid, Aguilar, 1969.

——, *La formación del número en el niño*, París, PUF, 1966.

——, *La construcción de lo real en el niño*, Buenos Aires, Proteo, 1965.

——, *La formación del símbolo en el niño*. México, Fondo de Cultura Económica, 1961.

Schraml, W. J., *Introducción a la psicología moderna del desarrollo*, Barcelona, Herder, 1977.

SEP, *Programa de educación preescolar*, México, SEP-Dirección General de Educación Preescolar, 1992.

Smirnov, A. A., *Psicología*, México, Grijalbo, 1960.

Actitudes hacia el estudio de las matemáticas

Acevedo, L., *Problemas de aritmética*, México, Antigua imprenta de Murguía, 1904.

Ávila, A. *et al.*, *La resolución realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*, México, Secretaría de Educación Pública, 2004.

Bishop, A. J., *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Barcelona, Paidós, 1999.

Castro, E., "Números decimales", en E. Castro (ed.), *Didáctica de las matemáticas en la escuela primaria*, Madrid, Síntesis, 2001.

Gómez, I. M., *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea, 2000.

Hannula, M. S., "Affect in mathematical thinking and learning", en J. Maas y W. Schloeglmann (eds.), *New Mathematics Education Research and Practice*, Rotterdam, The Netherlands, Sense Publisher, 2006, pp. 209-231.

Martínez, O. J., "Actitudes hacia las matemáticas", *Sapiens*, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda, vol. 9, núm. 1, 2008, pp. 237-256.

McLeod, D. D., "Research on affect in mathematics education: A reconceptualization", en D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, Nueva York, McMillan, 1992, pp. 575-596.

McLeod, D. B., "Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education", en D. McLeod y V. Adams (eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspctive*, Nueva York, Springer-Verlag, 1989, pp. 245-258.

Nurmi, A., M. Hannula, H. Maijala y E. Pehkonen, "On Pupils'Self-Confidence in Mathematics. Gender Comparision", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Hawai, 2003, pp. 453-460.

Ursini, S., *Aspectos afectivos y género en el aprendizaje de las matemáticas en escuelas secundarias del Distrito Federal*, México, Instituto Nacional de las Mujeres, Cuaderno núm. 15, 2009.

Vila, A. y M. L. Callejo, *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Madrid, Narcea, 2004.

Walls, F., *Sociomathematical Worlds. Investigating Children's Developing Relationships with Mathematics*, 2003, <http://eprints.jcu.edu.au/775/>, consultado en agosto 2012.

Sentido numérico

Abreu, J., M. Barot y J. Bracho, "Matemáticas", *Enciclopedia de conocimientos fundamentales UNAM-Siglo XXI*, México, Siglo XXI, 2011.

Berciano, A., *Matemáticas en el Antiguo Egipto. Un paseo por la geometría*, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, 2007, <http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/indexphp? option=com_docman&task=doc_details&gid=550&Itemid=75>, consultado el 12 de agosto de 2012.

Block, D., *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*, tesis de doctorado, México, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (DIE-Cinvestav), 2001.

——, T. Mendoza y M. Ramírez, *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM, Serie Somos Maestr@s. Enseñar y Aprender, 2001.

Bosch, M., *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, tesis de doctorado, Barcelona, Universitat Autónoma de Barcelona, 1994.

Brousseau, G., "Probléme de didactique des décimaux", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, núm. 3, 1981, pp. 37-127.

Centeno, J., *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis, 1997.

Colette, J.P., *Historia de las matemáticas I*, Buenos Aires, Siglo XXI, 1985.

Comin, E., "L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núm. 2-3, 2002, pp. 135-182.

Crump, Thomas, *The Anthropology of Numbers*, Cambridge, University Press, 1990.

Chevallard Y. y M. Jullien, *Sur l'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche société*, Francia, IREM d'Aix-Marseille, 1989.

Devreese, Jozef y G. Vanden, *"Magic is no magic". The wonderful world of Simon Stevin*, United Kingdom, WIT Press, 2008.

Encyclopaedia Universalis, París, Francia S.A., 1995.

Fedriani, E. y A. Tenorio, "Los sistemas de numeración maya, azteca e inca", *Lecturas Matemáticas*, vol. 25, 2004, pp. 159-190.

Fuenlabrada, I., A. L. Barriendos y B. Vivanco, *Matemáticas I. Guía del Docente. Primer Semestre. Bachillerato Intercultural*, México, Secretaría de Educación Pública y Comisión Nacional para el Desarrollo de los Pueblos Indígenas, 2006.

Gairín, J. M., *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*, tesis doctoral, Zaragoza, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, 1998.

——, "Una interpretación de las fracciones egipcias desde el recto del papiro de Rhind", *LLULL Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, vol. 24, pp. 649-684.

García F. J., *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, tesis doctoral, Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, 2005.

García, S. y D. Block, *Fractal 2. Matemáticas. Secundaria. Segundo grado*, México, Ediciones SM, Serie Construir, 2007.

Ifrah, G., "La India. Cuna de la numeración moderna", en *Las cifras. Historia de una gran invención*, Madrid, Alianza Editorial, 1988, pp. 61-87.

Kula, Witold, *Las medidas y los hombres*, México, Siglo XXI, 1980.

López, J., "Fracciones egipcias" [versión electrónica], *Revista Electrónica del Departamento de Matemáticas Universidad de Puerto Rico CRAIM*, 2008 <https://www.box.com/shared/ovz5mpazox>.

Núñez, J. M., "El tablero medieval de cálculo y las operaciones con números romanos: estudio histórico y pedagógico", *Revista EMA*, vol. 8, núm. 2, 2003, pp. 183-207.

Pastor, R. y J. Babini, *Historia de la matemática*, vol.I, Barcelona, Gedisa, 1997.

Puig, L., "La resolución de problemas en la historia de las matemáticas", en José V. Aymerich y S. Macario (eds.), *Matemáticas para el siglo XXI*, Castellón, Publicacions de la Universitat Jaume I, 2006, pp. 39-57.

Ramírez, M., *El saber enseñado: protagonista en la trama de acontecimientos en el aula. La proporcionalidad en sexto grado de educación primaria*, tesis de maestría, México, DIE-Cinvestav, 2004.

Ruiz, L., *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Jaén, Universidad de Jaén, 1998.

Sadovski, P., *Los procesos de producción de los profesores a propósito de la planificación, implementación y análisis de una secuencia de función lineal* (título provisional), Buenos Aires, Sindicato Único de Trabajadores de la Educación (Suteba), en prensa.

Sierra, T., *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y las medidas de magnitudes*, tesis de doctorado, Madrid, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar, 2006.

Sentido numérico | Apéndice

Dantzig, T., *Número: el lenguaje de la ciencia*, Universidad de Texas, Hobbs, 1971.

Gobel, S. M., S. Shaki y Martin H. Fischer, "The Cultural Number Line. A Review of Cultural and Linguistic Influences on the Development of Number Processing", *Journal of Cross-Cultural Psychology*, vol. 42, núm. 4, 2011, pp. 543-565.

Premack, D y A. Premack, "Evolution *Versus* Invention", *Science*, vol. 307, núm. 5710, 2005, p. 673.

Forma, espacio y medida

Alsina, C., C. Burgués y J. M. Fortuny, *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid, Síntesis, 1995.

Catalá, C. A., J. M. Fortuny y R. Pérez, *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid, Síntesis, 1997.

Chamorro, M., "El currículum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, año 3, núm. 10, Barcelona, Editorial Graó, 1996.

—— y J. M. Belmonte, *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*, Madrid, Síntesis, 2000.

Fouz, F. y B. De Donosti, "Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría", artículo en versión electrónica facilitado por el CIAEM, <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales>, s/f, consultado el 12 de agosto de 2012.

Fregona, D., *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*, tesis, Bordeaux, Université de Bordeaux I, 1995.

Gálvez, G., "La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental", en Parra y Saiz (comp.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, 1994.

García, J. y C. Bertrán, *Geometría y experiencias*, México, Alhambra, 1995.

López, O. L. y S. García, *La enseñanza de la geometría*, México, INEE, 2010.

Martínez, A. y F. J. Rivalla (coords.), *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*, Madrid, Síntesis, 1989.

Segovia, I. y Rico, L., "La estimación en medida", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, año 3, núm. 10, Barcelona, Editorial Graó, 1996.

Vergnaud, G., *El niño, las matemáticas y la realidad*, México, Trillas, 1991.

Tratamiento de la información

Abreu, J.L. (coord.), "Matemáticas", *Enciclopedia de conocimientos fundamentales UNAM-Siglo XXI*, México, UNAM-Siglo XXI Editores, 2010, pp. 95-112.

Batanero, C., "Significado y comprensión de las medidas de tendencia central", *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, Barcelona, Editorial Graó, núm. 35, 2000, pp. 41-58.

Camúñez, J. y Jesús Basulto Santos, *En el alumbramiento de la estadística moderna: John Graunt*, Oviedo, España, Septem Universitas, 2009, pp. 3-12, <http://www.septem.es/files/alumbramientoestadisticawebBinder2.pdf.>, consultado el 17 de julio 2012.

Christensen, H., *Estadística paso a paso*, México, Trillas, 2005.

Consejo Nacional de Población (Conapo), *Principales causas de mortalidad en México 1980-2007,* 2007, <http://www.conapo.gob.mx/es/Conapo/Principales_causas_de_mortalidad_en_Mexico_ 1980-2007>, consultado el 1 de agosto de 2012.

——, "Esperanza de vida", *Indicadores demográficos básicos 1990-2030*, 2007, <www.conapo.gob.mx.>, consultado el 17 de julio de 2012.

Del Puerto, S., S. Seminara y C. Minaard, "Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva", *Revista Iberoamericana de Educación*, núm. 43, cap. 3, Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), 2007.

Freund, J. y G. Simon, *Estadística elemental*, México, Prentice Hall-Hispanoamericana-Pearson Educación, 1994.

Fuentelsaz Gallego, C., "Cálculo del tamaño de la muestra", *Matronas Profesión*, 2004, <http://www.metodologiasytecnicas.ecaths.com/archivos/metodologiasytecnicas/calculo_muestra.pdf.>, consultado el 20 de agosto de 2012.

Gutiérrez, A., C. Batanero, E. Sánchez, G. López, M. Saíz, S. Linares y V. Hoyos, *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, México, SEP-Cinvestav, 2011.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa, "Examen de la calidad y el logro educativos", Anexo Tercer año, 2010, <http://www.inee.edu.mx/index.php/explorador.>, consultado el 16 de agosto de 2012.

Kline, Morris, *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, México, Fondo de Cultura Económica, 2009.

Magos, G. y M. Lorenzana-Jiménez, "Las fases en el desarrollo de nuevos medicamentos", *Revista de la Facultad de Medicina*, vol. 52, núm. 6, México, UNAM, noviembre-diciembre, 2009, <http://www.ejournal.unam.mx/rfm/no52-6/RFM052000605.pdf.>, consultado el 20 de agosto de 2012.

Wackerly, D., W. Mendenhal y R. Scheaffer, *Estadística matemática con aplicaciones*, México, Cengage Learning, 2010.

Walpole, R., R. Myers, S. Myers y K. Ye, *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, México, Pearson Educación, 2007.

World Health Organization, "Mexico: Health Profile", 2012, <http://www.who.int/gho/countries/mex.pdf.>, consultado el 1 de agosto de 2012.

World Health Organization, "Life Expectancy at Birth", 2012, <http://www.who.int/gho/mortality_burden_disease/life_tables/situation_trends/en/index.html>, consultado el 1 agosto de 2012.

ÍNDICE

Sentido numérico

Forma, espacio y medida

Matemáticas para profesores de preescolar y primaria,
editado por la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México,
la Secretaría de Educación del Gobierno del Distrito Federal y Siglo XXI Editores
se terminó de imprimir el xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
en los talleres de Editorial Impresora Apolo, S.A. de C.V.
Centeno 150-6, Granjas Esmeralda, 09810, México, D.F.
El tiraje consta de seis mil ejemplares.
Los interiores fueron impresos en papel bond de 90 g
y los forros en papel couché mate de 150 g.
Para su composición se utilizaron las fuentes Minion Display y Gandhi.

Parte 2
Matemáticas

CONTENIDO

1. Operaciones con números reales, complejos y expresiones algebraicas

a. Números reales.
- Suma y resta.
- Multiplicación y división.
- Raíces y potencias con exponente racional.

b. Números complejos.
- Suma y resta.
- Multiplicación.

c. Expresiones algebraicas
- Suma y resta.
- Multiplicación y división.
- Raíces y potencias con exponente racional.
- Operaciones con radicales.

2. Productos notables y factorización

a. Binomio de Newton $(a + b)^n$, $n \in N$.
b. Teorema del residuo y del factor.
c. Simplificación de fracciones algebraicas.
d. Operaciones con fracciones algebraicas.

3. Ecuaciones

a. Despejes.
b. Ecuaciones de primer grado.
c. Ecuaciones de segundo grado.

4. Desigualdades

a. Desigualdades de primer y segundo grado en una variable y sus propiedades.

5. Sistemas de ecuaciones

a. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Métodos de solución.

b. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
- Método de solución (Regla de Cramer).

6. Funciones algebraicas

a. Dominio, contradominio y regla de correspondencia.
b. Rango o imagen.
c. Gráfica.
d. Implícitas y explícitas.
e. Crecientes y decrecientes.
f. Continuas y discontinuas.
g. Álgebra de funciones.

7. Trigonometría

a. Trigonometría básica
- Medida de un ángulo (conversión de grados a radianes y de radianes a grados)
- Razones trigonométricas.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Ley de los senos y de los cosenos.
- Resolución de triángulos oblicuángulos.
- Razones trigonométricas para un ángulo en cualquier cuadrante. Formulas de reducción.

b. Funciones trigonométricas.
- El circulo trigonométrico.
- Funciones trigonométricas directas.
    - Dominio y rango.
    - Periodo y amplitud.
    - Dafasamiento.
    - Asíntotas de la gráfica.

8. Funciones exponenciales y logarítmicas

a. Dominio y rango.
b. Gráficas y asíntotas.

9. Recta

a. Distancia entre dos puntos.
b. Coordenadas de un punto que divide a un segmento de acuerdo con una razón dada.
c. Pendiente de una recta.
d. Formas de la ecuación de la recta y su gráfica.
e. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.
f. Distancia de un punto a una recta.
g. Ecuaciones de las medianas, mediatrices y alturas de un triangulo. Puntos de intersección (ortocentro, circuncentro y baricentro).

10. Circunferencia

a. Circunferencia como lugar geométrico.
b. Forma ordinaria (canónica) y general de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.
c. Ecuación de circunferencia con centro (h, k) en las formas ordinarias y general.
d. Elementos de una circunferencia.

11. Parábola

a. Definición y elementos.
b. Fórmulas.
c. Formas ordinaria y general de la ecuación de la parábola cuando el vértice está en el origen y el eje focal coincide con alguno de los ejes coordenados.
d. Formas ordinaria y general de la ecuación de la parábola cuando el vértice está en un punto cualquiera del plano y el eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados.
e. Elementos de una parábola.

12. Elipse

a. Definición y elementos.
b. Fórmulas.
c. Relación entre los parámetros "a", "b" y "c".
d. Formas ordinaria y general de la ecuación de la elipse con centro en el origen y el eje focal sobre alguno de los ejes coordenados.
e. Formas ordinaria y general de la ecuación de la elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados.
f. Elementos de una elipse.

13. Hipérbola

a. Definición y elementos.
b. Fórmulas.
c. Relación entre los parámetros "a", "b" y "c".
d. Formas ordinaria y general de la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y el eje focal sobre alguno de los ejes coordenados.
e. Formas ordinaria y general de la ecuación de la hipérbola con centro fuera del origen y eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados.
f. Elementos de una hipérbola.

14. Ecuación general de segundo grado

a. Las cónicas.
b. Ecuación general de segundo grado.
c. Criterios para identificar a la cónica que representa una ecuación de segundo grado.

15. Límites

a. Concepto intuitivo.
b. Teoremas sobre límites.
c. Obtención de límites.
d. Formas indeterminadas.
e. Continuidad en un punto y en un intervalo.

16. La derivada

a. Definición de derivada y sus notaciones.
b. Obtención de derivadas.
c. Regla de la cadena.
d. Derivada de funciones implícitas.
e. Derivadas sucesivas de una función.
f. Interpretación geométrica y física.
g. Ecuaciones de la tangente y de la normal a una curva.
h. Cálculo de velocidad y aceleración de un móvil.
i. Máximos y mínimos relativos de una función.
j. Máximos y mínimos absolutos en un intervalo cerrado.
k. Puntos de inflexión y de concavidad en una curva.
l. Problemas de la vida cotidiana.

17. La integral

a. Función integrable en un intervalo cerrado.
b. Teoremas que justifican las propiedades de la integral de una función.
c. Integral inmediata.
d. Tabla de formulas de integración.
e. Métodos de integración.
f. Integral definida y su notación.

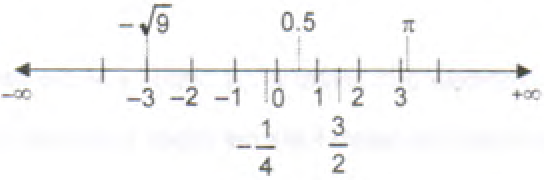
Lección 1

Operaciones con números reales, complejos y expresiones algebraicas

1. Números reales (R)

Son todos aquellos que se representan en la recta numérica.

Ejemplos:



Clasificación de los números reales

- Reales
  - Racionales
    - Naturales
      - Primos
      - Compuestos
    - Enteros
      - Positivos
      - Cero
      - Negativos
  - Irracionales

■ **Naturales (N)**

Son aquellos números que se utilizan para contar y el conjunto es:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Números primos

Son números que tienen únicamente dos divisores, la unidad y el propio número.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

Números compuestos

Son números que tienen más de dos divisores.

$$\{4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}$$

■ **Enteros (Z)**

El conjunto se conforma de números positivos, negativos y el cero.

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

■ **Racionales (Q)**

Son de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in Z$ y $q \neq 0$, se les conoce como fracciones comunes.

Ejemplos:

$$\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, -2, 3, 1.\overline{3}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{8}$$

Las fracciones comunes se clasifican en fracción propia y fracción impropia.

Fracción propia: Su valor es menor a la unidad.

$$\frac{2}{5}, \frac{12}{17}, \frac{4}{7}, \frac{1}{3}$$

Fracción impropia: Su valor es mayor o igual que la unidad.

$$\frac{8}{3}, \frac{12}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{4}$$

■ **Irracionales (Q')**

Son todos aquellos números que su parte decimal se conforma de una serie infinita de dígitos, pero no existe periodo y por lo regular son resultado de raíces no exactas.

Ejemplos:

$$\pi, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Postulados de orden para los números reales

Tricotomía

Si a, b $\in$ R, entonces al comparar estos números, sólo puede ocurrir uno de los tres casos siguientes:

$$a > b \quad , \quad a < b \quad o \quad a = b$$

Transitivo

Establece la comparación entre tres números de la siguiente manera:

Sean a, b, y c $\in$ R, si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

Aditivo

Dados dos números reales que cumplen con la propiedad de tricotomía, si se suma otro número real a los dos primeros se conserva la propiedad.

Sean a, b, y c $\in$ R, si $a > b$ entonces $a + c > b + c$

Multiplicativo

Dados dos números reales que cumplen con la propiedad de tricotomía, si se multiplica por otro número positivo a los dos primeros, se conserva la propiedad.

Sean a, b, y c $\in$ R, si $a > b$ entonces $a\,c > b\,c$ (con $c > 0$) y $a\,c < b\,c$ (con $c < 0$)

Propiedades de los números reales

Sean a, b, y c $\in$ R, entonces se verifican las siguientes propiedades

Propiedad	**Adición**	**Multiplicación**
Cerradura	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$	
Neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$

a) Suma y resta

- **Con números enteros**

Números enteros con signos iguales, se suman y se coloca el signo de los sumandos.

Ejemplos:

1) $-3-4=-7$ 2) $4+3+9=16$ 3) $-5-2-11=-18$

Números con signos diferentes, se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Ejemplos:

1) $-10+7=-3$ 2) $-9+15=6$ 3) $-4+12-9=-13+12=-1$

4) $13+15-21+7-32=35-53=-18$

Signos de agrupación

Son los que agrupan o delimitan operaciones entre números y son representados por los siguientes símbolos:

Paréntesis	( )	Llaves	{ }
Corchetes	[ ]	Vínculo	$\overline{\quad}$

Operaciones con signos de agrupación

Para la eliminación de un signo de agrupación, se multiplica por el número o signo que le antecede, en caso de que existan varios signos de agrupación se procede a la eliminación de adentro hacia fuera.

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $-(-2+5)$ se obtiene:

a) -3 b) 3 c) 7 d) -7

Solución:

Se multiplican los elementos dentro del paréntesis por el signo que le antecede

$$-(-2+5)=2-5=-3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de simplificar $-3+[4-(5-3)]$ es:

a) 1 b) 5 c) -5 d) -1

Solución:

$$-3+[4-(5-3)]=-3+[4-5+3]=-3+4-5+3=-8+7=-1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La simplificación de $-3+\{4-2\,[6-3+4(5-7)]+3\}$ es:

a) -18 b) 14 c) -14 d) 18

Solución:

$$\begin{aligned}-3+\{4-2\,[6-3+4(5-7)]+3\} &= -3+\{4-2\,[6-3+20-28]+3\} =\\ &= -3+\{4-12+6-40+56+3\}\\ &= -3+4-12+6-40+56+3\\ &= 69-55=14\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

Al simplificar la expresión $2-\{-3+5-[4-6+(3-8)-(2-4)]-2\}$, se obtiene:

a) 1 b) -1 c) -3 d) 3

Solución:

$$\begin{aligned}2-\{-3+5-[4-6+(3-8)-(2-4)]-2\} &= 2-\{-3+5-[4-6+3-8-2+4]-2\}\\ &= 2-\{-3+5-4+6-3+8+2-4-2\}\\ &= 2+3-5+4-6+3-8-2+4+2\\ &= 18-21=-3\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Con números racionales

Máximo común divisor (M.C.D)

Es el mayor de los divisores que es común a dos o más números.

Ejemplo:

Obtener el M.C.D. de 36, 30 y 18

Solución:

Se descomponen los números en factores primos hasta que no tengan un divisor primo en común.

$$\begin{array}{ccc|c} 36 & 30 & 18 & 2 \\ 18 & 15 & 9 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & \end{array}$$

El máximo común divisor se obtiene multiplicando los números primos de la derecha.

$$\text{M.C.D. } (36, 30, 10) = 2 \times 3 = 6$$

Mínimo común múltiplo (m.c.m)

Es el menor de los múltiplos que es común a dos o más números.

Ejemplo:

Obtener el m.c.m. de 36, 12 y 15

Solución:

Se descomponen simultáneamente los números en sus factores primos hasta que el cociente de cada uno de ellos sea la unidad.

$$\begin{array}{ccc|c} 36 & 12 & 15 & 2 \\ 18 & 6 & 15 & 2 \\ 9 & 3 & 15 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

El mínimo común múltiplo se obtiene multiplicando los números primos de la derecha.

$$\text{m.c.m.}(36, 12, 15) = 180$$

Fracciones comunes con denominadores iguales

Se suman o se restan los numeradores y se escribe el denominador en común.

Ejemplos:

1) $\frac{2}{7}+\frac{8}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+8+3}{7}=\frac{13}{7}=1\frac{6}{7}$ 2) $\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{10}{3}=\frac{5+7-10}{3}=\frac{2}{3}$ 3) $\frac{11}{4}-\frac{7}{4}=\frac{11-7}{4}=\frac{4}{4}=1$

Fracciones comunes con denominadores diferentes

Se obtiene el común denominador o mínimo común múltiplo de los denominadores, el cuál se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador, los números que se obtienen se suman o se restan según sea el caso.

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\frac{7}{8}$ es:

a) $\frac{15}{14}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{19}{8}$

Solución:

Se obtiene el mínimo común múltiplo (común denominador) de entre los denominadores.

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \qquad \text{m.c.m} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Por tanto, $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\frac{7}{8}=\frac{3(2)+5(4)-7(1)}{8}=\frac{6+20-7}{8}=\frac{19}{8}$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado de $2-\frac{5}{6}-\frac{2}{5}$ es:

a) $\frac{23}{30}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{15}{11}$ d) -1

Solución:

Se realiza la operación:

$$2-\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{2}{1}-\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{2(30)-5(5)-2(6)}{30}=\frac{60-25-12}{30}=\frac{60-37}{30}=\frac{23}{30}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

b) Multiplicación y división

■ **Con números enteros**

Leyes de los signos

Multiplicación

$(+)(+)=+$ $(-)(-)=+$ $(+)(-)=-$ $(-)(+)=-$

División

$\frac{+}{+}=+$ $\frac{-}{-}=+$ $\frac{+}{-}=-$ $\frac{-}{+}=-$

Ejemplos:

1) $(-3)(4)=-12$ 2) $(-5)(-7)=35$ 3) $(-2)(-6)(-7)=-84$

4) $\frac{-76}{19}=-4$ 5) $\frac{(-3)(12)}{-4}=\frac{-36}{-4}=9$ 6) $\frac{(-7)(6)(-15)}{(14)(-9)}=\frac{630}{-126}=-5$

■ **Con números racionales**

▶ En la multiplicación de fracciones comunes se realiza el producto de numerador por numerador y denominador por denominador y se aplican leyes de los signos de la misma forma.

Ejemplos:

1) $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{(5)(2)}{(6)(15)}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$ 2) $(-3)\left(\frac{7}{12}\right)=\left(-\frac{3}{1}\right)\left(\frac{7}{12}\right)=-\frac{21}{12}=-\frac{7}{4}$

3) $\left(2\frac{1}{4}\right)\left(\frac{10}{21}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{10}{21}\right)=\frac{(9)(10)}{(4)(21)}=\frac{90}{84}=\frac{15}{14}$

▶ En la división de fracciones comunes se realiza un producto cruzado.

Ejemplos:

1) $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{(2)(5)}{(3)(4)}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ 2) $3\div\frac{9}{7}=\frac{3}{1}\div\frac{9}{7}=\frac{(3)(7)}{(1)(9)}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$

3) $2\frac{3}{5}\div1\frac{1}{2}=\frac{13}{5}\div\frac{3}{2}=\frac{(13)(2)}{(5)(3)}=\frac{26}{15}$

▶ En caso de ser una división vertical de fracciones, se realiza el producto de los medios y el resultado será el denominador de la fracción resultante, se multiplican los extremos y el resultado será el numerador de la fracción resultante.

Ejemplos:

1) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{(2)(9)}{(3)(5)}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$ 2) $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{\frac{3}{1}}{\frac{7}{2}}=\frac{6}{7}$ 3) $\dfrac{\frac{4}{15}}{8}=\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{1}}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

Fracciones complejas

Se le llama fracción compleja a aquélla que está formada por operaciones subsecuentes entre fracciones.

Ejemplo 1

Al simplificar la siguiente expresión $\dfrac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}$, se obtiene:

a) 1 b) $\frac{7}{5}$ c) 3 d) $\frac{5}{7}$

Solución:

Se identifican las operaciones secundarias las cuales serán las primeras en resolverse.

$$\frac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{1}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{1}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6+1}{3}}{\frac{6-1}{3}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{(3)(7)}{(3)(5)}=\frac{7}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La simplificación de $\left(1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)$ es:

a) –1 b) 2 c) –2 d) 1

Solución:

$$\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)=\left(1+\frac{1}{\frac{2-1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{2+1}{2}}\right)=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)=(1+2)\left(1-\frac{2}{3}\right)=(3)\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

La solución corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Al simplificar la expresión $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, se obtiene:

a) 5 b) $\frac{1}{5}$ c) $-\frac{1}{5}$ d) –5

Solución:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{3-2}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=\frac{(6)(5)}{(6)(1)}=\frac{30}{6}=5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Problemas de aplicación sobre fracciones comunes

Ejemplo 1

Para construir una barda se necesitan 300 ladrillos, si cada hora se colocó $\frac{1}{15}$ del total de ladrillos. ¿En cuántas horas se colocaron 225 ladrillos?

a) $10\frac{3}{4}$ hrs. b) $11\frac{3}{4}$ hrs. c) $11\frac{1}{4}$ hrs. d) $10\frac{1}{4}$ hrs.

Solución:

Se determina el número de ladrillos colocados por hora.

$$\frac{1}{15}(300) = 20 \text{ ladrillos}$$

Para determinar el número de horas para colocar 225, esta cantidad se divide por los 20 ladrillos, entonces,

$$\frac{225}{20} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4} \text{ hrs.}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Las dimensiones de un rectángulo son 12 x 20 cm, si el ancho se aumenta en su tercera parte y el largo en su cuarta parte. ¿Qué fracción representa el área inicial del área resultante?

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{3}{5}$

Solución:

Se determinan las dimensiones del nuevo rectángulo:

El ancho se aumenta en su tercera parte: $12 + \frac{1}{3}(12) = 12 + 4 = 16$ cm

El largo se aumenta en su cuarta parte: $20 + \frac{1}{4}(20) = 20 + 5 = 25$ cm

Las dimensiones del nuevo rectángulo son: 16 x 25 cm y su área es 400 cm^2.

El área del rectángulo con dimensiones 12 x 20 cm es de 240 cm^2.

La fracción que representa el área inicial del área resultante es: $\frac{240}{400} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Un contenedor de agua de 500 lts. se encuentra lleno hasta un cuarto de su capacidad total, si se agregan al contenedor 300 lts., ¿qué parte del total de agua del contenedor se debe agregar para llenarlo?

a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{4}$

Solución:

Se determinan los litros que tiene el contenedor, si está lleno hasta un cuarto de su capacidad total, entonces:

$$\frac{1}{4}(500) = 125 \text{ lts.}$$

Luego, se agregan 300 lts., por tanto, tendrá 425 lts.

Para que el contenedor se llene le faltan 75 lts., y esta cantidad en fracción representa:

$$\frac{75}{500} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} \text{ del total}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Razones y proporciones

Razón

Es el cociente de dos cantidades, donde al numerador se le llama antecedente y al denominador, consecuente.

Ejemplo:

En la razón $\frac{2}{3}$ ó 2 : 3, el número 2 se llama antecedente y el número 3 consecuente.

Proporción

Se le denomina proporción a la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \text{o} \qquad a:b::c:d$$

Se lee: "a" es a "b", como "c" es a "d".

Términos de una proporción

En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, "a" y "d" reciben el nombre de extremos, "b" y "c" medios.

Ejemplo 1

El valor de "x" en la proporción $\frac{x}{3}=\frac{12}{4}$ es:

a) 9 b) 8 c) 11 d) 12

Solución:

En toda proporción, el valor de un extremo equivale al producto de los medios divido por el extremo restante.

$$\frac{x}{3}=\frac{12}{4} \qquad \rightarrow \qquad x=\frac{(3)(12)}{4}=\frac{36}{4}=9$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El valor de "y" en la proporción $\frac{7}{y}=\frac{10}{2}$ es:

a) 35 b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{1}{35}$

Solución:

En toda proporción, el valor de un medio equivale al producto de los extremos dividido por el medio restante.

$$\frac{7}{y}=\frac{10}{2} \qquad \rightarrow \qquad y=\frac{(7)(2)}{10}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de "m" en la proporción $\frac{14}{4}=\frac{21}{m}$ es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Solución:

$$\frac{14}{4}=\frac{21}{m} \qquad \rightarrow \qquad m=\frac{4(21)}{(14)}=\frac{84}{14}=\frac{42}{7}=6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Proporción directa o regla de tres directa

Una proporción es directa si al aumentar o disminuir una de las cantidades, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

Definición

Si "m" es a "n" como "c" es a "d", entonces $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$

Ejemplo 1

Se compran 25 dulces con \$12. ¿Cuántos dulces se pueden comprar con \$36?

a) 12.5 b) 50 c) 75 d) 100

Solución:

La proporción es directa ya que con más dinero se compran mayor número de dulces.

Se establece la proporción: 25 dulces es a \$12 como "x" es a \$36, entonces,

$$\frac{25}{12} = \frac{x}{36} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{(25)(36)}{12} = \frac{900}{12} = 75$$

Por tanto, se pueden comprar 75 dulces y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Un comerciante vende un artículo en \$112, ganando el 40 % sobre el costo del artículo. ¿Cuál es el costo de dicho artículo?

a) \$ 80 b) \$ 78.4 c) \$ 70 d) \$ 33.6

Solución:

Sea "x" el costo del artículo que representa el 100% y \$112 el 140%, entonces,

$$\frac{x}{100} = \frac{112}{140} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{(112)(100)}{140} = \frac{11200}{140} = \$\ 80$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Proporción inversa o regla de tres inversa

Una proporción es inversa si al aumentar una de las cantidades, la otra disminuye en la misma proporción y viceversa.

Definición

Si "m" es a "n", como "c" es a "d", entonces $m \cdot n = c \cdot d$.

Ejemplo 1

Un auto viaja a razón de 60 $\frac{Km}{hr}$ y tarda 3 horas en ir de una ciudad a otra. ¿A qué velocidad debe regresar para cubrir dicha distancia en 2 hrs.?

a) 30 km/hr b) 45 km/hr c) 120 km/hr d) 90 km/hr

Solución:

La proporción es inversa ya que a mayor velocidad menos tiempo tardará en recorrer cierta distancia.

Se establece la proporción: 60 $\frac{Km}{hr}$ es a 3 horas como "x" es a 2 hrs, entonces,

$$(60)(3) = 2x \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{(60)(3)}{2} = \frac{180}{2} = 90\ \frac{Km}{hr}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

c) Raíces y potencias

Potencia

Es la representación del producto de una base por sí misma, un cierto número de veces.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad \rightarrow n \text{ veces}$$

Donde, a = base y n = exponente.

Ejemplos:

1) $(3)^4 = (3)(3)(3)(3) = 81$

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{8}{343}$

3) $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$

4) $-2^5 = -(2)(2)(2)(2)(2) = -32$

Leyes de los exponentes

1) $a^0 = 1$

2) $a^1 = a$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

8) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

9) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

11) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^2}$ es:

a) 2^4 b) 2^5 c) 2^3 d) 2^6

Solución:

$$\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^2} = \frac{2^{3+5}}{2^2} = \frac{2^8}{2^2} = 2^{8-2} = 2^6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Al simplificar la expresión $\left(\frac{3^4}{3^7}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a) -3 b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $-\frac{1}{3}$

Solución:

$$\left(\frac{3^4}{3^7}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{4-7}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{(-3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{-3}{3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Al simplificar la expresión $\sqrt[3]{5^{-12}}$ se obtiene:

a) 5^4 b) $\frac{1}{5^3}$ c) $\frac{1}{5^4}$ d) 5^{-3}

Solución:

$$\sqrt[3]{5^{-12}} = 5^{\frac{-12}{3}} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

La expresión $\left(\frac{2^m}{2^{-3}}\right)^2$ es equivalente a:

a) 2^{2m+6} b) 2^{2m-6} c) 2^{m^2-9} d) 2^{m+5}

Solución:

$$\left(\frac{2^m}{2^{-3}}\right)^2 = \left(2^{m-(-3)}\right)^2 = \left(2^{m+3}\right)^2 = 2^{(m+3)(2)} = 2^{2m+6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 5

Una expresión equivalente a $\sqrt[3]{4^{-2}\cdot 4^7}$ es:

a) $4^{\frac{3}{5}}$ b) $4^{\frac{10}{6}}$ c) $4^{-\frac{5}{3}}$ d) $4^{-\frac{3}{5}}$

Solución:

$$\sqrt[3]{4^{-2}\cdot 4^7} = \sqrt[3]{4^{-2+7}} = \sqrt[3]{4^5} = 4^{\frac{5}{3}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b" $4^{\frac{10}{6}}$, el cual al simplificar el exponente se obtiene $4^{\frac{5}{3}}$.

Radicación

Operación que permite encontrar un número, que multiplicado por sí mismo, tantas veces como lo indica el índice, da como resultado el radicando.

Radical: $\sqrt[n]{a}$

Donde a: radicando y n: índice.

Ejemplos:

1) $\sqrt{81} = \pm 9$ 2) $\sqrt[3]{27} = 3$ 3) $\sqrt[4]{625} = \pm 5$ 4) $\sqrt[5]{-32} = -2$

Simplificación de radicales

Dado un radical de la forma $\sqrt[n]{a}$ expresarlo en su forma más sencilla.

Ejemplo 1

Al simplificar $\sqrt{8}$ se obtiene:

a) $2\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{2}$

Solución:

Se descompone el radicando 8 en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 8 = 2\times 2\times 2 = 2^3$$

Por tanto, $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\cdot 2} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\sqrt[3]{54}$ es:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$

Solución:

Se descompone 54 en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$$

Por tanto, $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 3\sqrt[3]{2}$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Al simplificar $\sqrt[3]{128}$ se obtiene:

a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{4}$ c) $4\sqrt[3]{2}$ d) $2\sqrt[3]{4}$

Solución:

Se descompone el radicando en sus factores primos.

$$128 = 2^7$$

Luego,

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

Una expresión equivalente a $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ es:

a) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) 3 d) $\sqrt{2}$

Solución:

$$\frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 2} = \frac{1}{3}\sqrt{3^2}\sqrt{2} = \frac{1}{3}(3)\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Suma y resta de radicales

Para sumar o restar radicales deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplo 1

El resultado de $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$

Solución:

En la operación, el índice y el radicando coinciden, por tanto,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (2 + 5 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado de $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$ es:

a) $\sqrt{66}$ b) $15\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$

Solución:

Para resolver la operación se realiza una simplificación de radicales, porque los radicandos no son los mismos, entonces,

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (3 - 5 + 7)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Propiedades de los radicales

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$

2) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

6) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

7) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $\sqrt[3]{5^6}$ se obtiene:

a) 5^2 b) 5^{-2} c) 5^3 d) 5^{-3}

Solución:

Aplicando $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ se obtiene $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Al simplificar $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ se obtiene:

a) $\sqrt[6]{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2

Solución:

Aplicando $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[(2)(3)]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\sqrt[6]{5^3}$ es:

a) $\sqrt{5}$ b) 5^2 c) $\sqrt[3]{5}$ d) 5^3

Solución:

Aplicando $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, se obtiene:

$$\sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Multiplicación de radicales

▸ Con índices iguales

Se aplica la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo 1

Al realizar la multiplicación $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ se obtiene:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt[4]{6}$

Solución:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(3)(2)}=\sqrt{6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al realizar la multiplicación $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$ se obtiene:

a) 2 b) $\sqrt[9]{8}$ c) $\sqrt{8}$ d) 4

Solución:

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(4)(2)}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

▸ Con índices diferentes

Se aplica la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}$$

Ejemplo 1

La simplificación de la multiplicación $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{5}$ es:

a) $\sqrt[6]{20}$ b) $\sqrt[3]{20}$ c) $\sqrt[5]{20}$ d) $\sqrt[6]{2000}$

Solución:

Los índices de las raíces son diferentes, por tanto, se aplica $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}$, entonces,

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[(3)(2)]{4^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{16\cdot 125}=\sqrt[6]{2000}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$ es:

a) $4^{\frac{1}{8}}$ b) $4^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{3}{4}}$ d) $2^{\frac{1}{8}}$

Solución:

Se convierten los radicales a un índice común y se multiplican los radicandos:

$$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[4]{2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

División de radicales

▸ Con índices iguales

Se aplica la siguiente propiedad: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ejemplo 1

El resultado de $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) 3 d) $\sqrt{5}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{15}{3}}=\sqrt{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado de la división $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}}$ es:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{48}{2}}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

▸ Con índices diferentes

Se aplica la siguiente propiedad: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ es:

a) $\sqrt[6]{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) 1

Solución:

Los índices de las raíces son diferentes, por tanto, se aplica $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$, entonces,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}}=\sqrt[6]{\frac{8}{4}}=\sqrt[6]{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[8]{3}$ d) $\sqrt[3]{3}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\frac{3^2}{3}}=\sqrt[4]{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Racionalización

Racionalizar es representar una fracción que contenga una raíz en el denominador, en otra fracción equivalente, cuyo denominador sea un número racional respectivamente.

▶ Racionalización de un denominador monomio

Dada una fracción de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$ su racionalización se efectúa multiplicando por el término $\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$.

Ejemplo 1

Al racionalizar la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se obtiene:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

Solución:

Para racionalizar la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se multiplica por $\sqrt{2}$ tanto numerador como denominador

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al racionalizar la expresión $\frac{6}{\sqrt{3}}$, se obtiene:

a) $\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$

Solución:

La fracción se multiplica por $\sqrt{3}$ tanto numerador como denominador.

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Al racionalizar la expresión $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$, se obtiene:

a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{2}$

Solución:

La fracción se multiplica por $\sqrt[3]{2^2}$ tanto numerador como denominador.

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

▶ Racionalización de un denominador binomio

Para racionalizar una fracción con denominador binomio se multiplica por su conjugado.

Conjugado de un binomio

Dado el binomio (a + b) su conjugado es el binomio (a – b) y viceversa, el producto de dos binomios conjugados da como resultado una diferencia de cuadrados.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 1

Al racionalizar la expresión $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$, se obtiene:

a) $3-\sqrt{2}$ b) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ c) $\frac{3-\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$

Solución:

Se multiplica tanto denominador como numerador por $3-\sqrt{2}$, entonces:

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al racionalizar la expresión $\frac{2}{4-\sqrt{5}}$, se obtiene:

a) $\frac{8+\sqrt{10}}{11}$ b) $\frac{10\sqrt{5}}{11}$ c) $\frac{8+2\sqrt{5}}{11}$ d) $\frac{8+\sqrt{5}}{11}$

Solución:

Se multiplica tanto numerador como denominador por $4+\sqrt{5}$, entonces,

$$\frac{2}{4-\sqrt{5}} = \frac{2}{4-\sqrt{5}}\cdot\frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = \frac{2\left(4+\sqrt{5}\right)}{(4)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2\left(4+\sqrt{5}\right)}{16-5} = \frac{2\left(4+\sqrt{5}\right)}{11} = \frac{8+2\sqrt{5}}{11}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ es:

a) $\sqrt{8}-\sqrt{5}$ b) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ c) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}$ d) $\frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$

Solución:

$$\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} = \frac{3\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)}{8-5} = \frac{3\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)}{3} = \sqrt{8}-\sqrt{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

2. Números complejos

Números imaginarios

La unidad imaginaria se define como:

$$i = \sqrt{-1}$$

Ejemplos:

1) $\sqrt{-81} = \sqrt{(81)(-1)} = \sqrt{81}\sqrt{-1} = 9\sqrt{-1} = 9\,i$

2) $\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\,i$

3) $\sqrt{-27} = \sqrt{(27)(-1)} = \sqrt{27}\sqrt{-1} = \sqrt{(9)(3)}\sqrt{-1} = 3\sqrt{3}\,i$

4) $\sqrt{-\dfrac{64}{9}} = \sqrt{\left(\dfrac{64}{9}\right)(-1)} = \sqrt{\dfrac{64}{9}}\sqrt{-1} = \dfrac{8}{3}i$

Operaciones con números imaginarios

a) Suma y resta de números imaginarios

Se aplica la siguiente propiedad:

$$ai + bi - ci = (a + b - c)\,i$$

Ejemplo 1

El resultado de simplificar $4i - 7i + 6i$ es:

a) $9i$ b) $3i$ c) $-3i$ d) $-9i$

Solución:

$4i - 7i + 6i = (4 - 7 + 6)\,i = 3i$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al simplificar $5i + \dfrac{1}{2}i - i$, se obtiene:

a) $\dfrac{5}{2}i$ b) $\dfrac{8}{2}i$ c) $\dfrac{10}{2}i$ d) $\dfrac{9}{2}i$

Solución:

$$5i + \frac{1}{2}i - i = (5 + \frac{1}{2} - 1)\,i = \left(\frac{5}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right)i = \frac{10 + 1 - 2}{2}\,i = \frac{9}{2}i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La simplificación de la expresión $\sqrt{-20} - 4\sqrt{5}\,i - \sqrt{-45}$ es:

a) $\sqrt{-60}$ b) $5\sqrt{5}\,i$ c) $-5\sqrt{5}\,i$ d) $\sqrt{5}\,i$

Solución:

$$\sqrt{-20} - 4\sqrt{5}\,i - \sqrt{-45} = \sqrt{20}\,i - 4\sqrt{5}\,i - \sqrt{45}\,i = \sqrt{4(5)}\,i - 4\sqrt{5}\,i - \sqrt{9(5)}\,i = 2\sqrt{5}\,i - 4\sqrt{5}\,i - 3\sqrt{5}\,i$$

$$= (2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5})\,i$$

$$= -5\sqrt{5}\,i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

► Potencias de i

Son los resultados de elevar i a una potencia "n".

$$i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i\ ,\quad i^4 = 1, \ldots$$

A partir de i^5, los resultados anteriores se repiten en el mismo orden.

Números complejos

Un número complejo es de la forma a + bi, con $a, b \in R$.

Donde:

a: parte real   b: parte imaginaria $i = \sqrt{-1}$

Los números complejos se representan de dos formas:

1) $z = a + bi$ forma rectangular   **2)** $z = (a, b)$ forma cartesiana

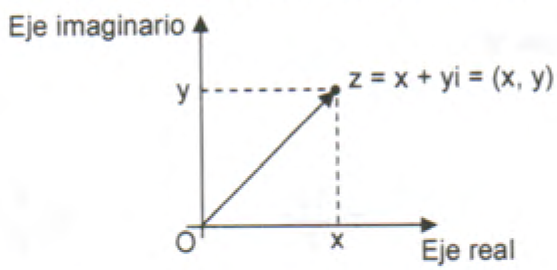
Ejemplos:

Forma rectangular	**Forma cartesiana**
$z_1 = 6 - 8i$	$z_1 = (6, -8)$
$z_2 = 4 + 5i$	$z_2 = (4, 5)$
$z_3 = -3$	$z_3 = (-3, 0)$
$z_4 = 7i$	$z_4 = (0, 7)$
$z_5 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}i$	$z_5 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

Gráfica de un número complejo

Un número complejo se grafica en un sistema de ejes coordenados, en el cual, al eje horizontal se denomina eje real, y al eje vertical se denomina eje imaginario.

Sea el número complejo $z = x + yi$, la gráfica de éste se representa en la figura.

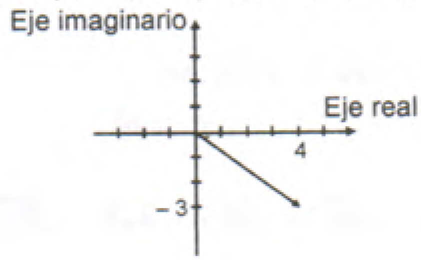


Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $z = 4 - 3i$.

Solución:

Se transforma a su forma rectangular $z = (4, -3)$, se grafica el punto en el sistema.

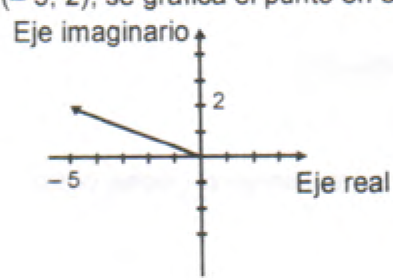


Ejemplo 2

Trazar la gráfica de $w = -5 + 2i$.

Solución:

Se transforma a su forma rectangular $w = (-5, 2)$, se grafica el punto en el sistema.



Magnitud de un número complejo

Sea $z = a + bi$ un complejo, la magnitud de un número complejo es la distancia del segmento de recta formado por el origen del sistema, y el punto que resulta de transformar a forma rectangular y se define por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\text{ , con a: parte real, b: parte imaginaria}$$

La magnitud de un número complejo también se le llama módulo o valor absoluto.

Ejemplo:

La magnitud de $z = 5 - 12i$ es:

a) $\sqrt{13}$ b) 13 c) $\sqrt{119}$ d) $\sqrt{17}$

Solución:

Se determinan la parte real y la parte imaginaria.

$$a = 5,\quad b = -12$$

Se obtiene la magnitud de z:

$$|z| = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Operaciones de números complejos

Suma y resta

Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$, se define:

a) $z + w = (a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i$ o $z + w = (a + x\,,\, b + y)$

b) $z - w = (a + bi) - (x + yi) = (a - x) + (b - y)i$ o $z - w = (a - x\,,\, b - y)$

Ejemplo 1

Si $z = 4 + 2i$ y $w = -5 + 3i$, el resultado de $(z + w)$ es:

a) $-1 + 5i$ b) $1 - 5i$ c) $-1 - 5i$ d) $1 + 5i$

Solución:

$$z + w = (4 + 2i) + (-5 + 3i) = (4 - 5) + (2 + 3)i = -1 + 5i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $(2, 5) + (-4, -3)$ es:

a) $(-6, 2)$ b) $(-2, -2)$ c) $(6, -2)$ d) $(-2, 2)$

Solución:

$$(2, 5) + (-4, -3) = (2 - 4, 5 - 3) = (-2, 2)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Si $z = -1 + 4i$ y $w = 7 - 6i$, el resultado de $(z - w)$ es:

a) $8 + 10i$ b) $-8 + 10i$ c) $8 - 10i$ d) $-8 - 10i$

Solución:

$$z - w = (-1 + 4i) - (7 - 6i) = [-1 - 7] + [4 - (-6)]i = (-1 - 7) + (4 + 6)i = -8 + 10i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

► Conjugado de un número complejo

Dado el número complejo $z = a + bi$, el conjugado de "z" se denota por "$\bar{z}$", con $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplos:

Número complejo	**Conjugado**
$z = 4 + 3i$	$\bar{z} = 4 - 3i$
$z_1 = -2 - 5i$	$\bar{z}_1 = -2 + 5i$
$z_2 = 6$	$\bar{z}_2 = 6$
$z_3 = 7i$	$\bar{z}_3 = -7i$

► Multiplicación de números complejos

Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$, se define:

$$z \cdot w = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$$

Ejemplo 1

El producto de $z = 2 + 3i$ con $w = -1 + 4i$ es:

a) $-14 + 5i$ b) $14 - 5i$ c) $14 + 5i$ d) $-14 - 5i$

Solución:

Se aplica la definición:

$$z \cdot w = (2 + 3i)(-1 + 4i) = [(2)(-1) - (3)(4)] + [(2)(4) + (3)(-1)]\, i = -14 + 5i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $(5 - i)(4 + 2i)$ es:

a) $20 - 2i$ b) $-20 + 2i$ c) $22 + 6i$ d) $-22 + 6i$

Solución:

Se aplica la definición:

$$(5 - i)(4 + 2i) = [(5)(4) - (-1)(2)] + [(5)(2) + (-1)(4)]\, i = 22 + 6i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

► División de números complejos

Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$, se define:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{x+yi} = \frac{ax+by}{x^2+y^2} + \frac{bx-ay}{x^2+y^2}i$$

Ejemplo 1

Si $z = 2 - 4i$ y $w = -4 + 3i$, el resultado de $\frac{z}{w}$ es:

a) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ b) $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ c) $-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ d) $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

Solución:

Aplicando la definición:

$$\frac{z}{w} = \frac{2-4i}{-4+3i} = \frac{(2)(-4)+(-4)(3)}{(-4)^2+(3)^2} + \frac{(-4)(-4)-(2)(3)}{(-4)^2+(3)^2}i = \frac{-20}{25} + \frac{10}{25}i = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

3. Expresiones algebraicas

Término algebraico

Expresión utilizada para generalizar una cantidad, se le conoce como monomio y sus elementos son: coeficiente, base(s) y exponente(s).

Ejemplos:

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-4x^2y^3$	-4	x, y	2, 3
mn	1	m, n	1, 1
$-\frac{2}{3}(x+y)^2$	$-\frac{2}{3}$	$(x+y)$	2

Lenguaje algebraico

Expresa oraciones de lenguaje común a términos algebraicos.

Ejemplos:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
– El doble de un número cualquiera.	$2x$
– La diferencia de dos números cualquiera.	$x-y$
– El cubo de la suma de dos números cualquiera.	$(x+y)^3$
– La suma del cubo de dos números cualquiera.	x^3+y^3
– Las dos terceras partes del cuadrado de la diferencia de un número y el tripe de otro.	$\frac{2}{3}(x-3y)^2$
– La raíz cúbica del producto de la semi – diferencia de dos números por la semi – suma de los mismos.	$\sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

Términos semejantes

Son términos algebraicos que tienen las mismas bases afectadas por los mismos exponentes.

Ejemplos:

- **Son términos semejantes**

1) $3x^2$ con $-2x^2$ 2) $\frac{1}{2}x^3y$ con $5x^3y$ 3) $6(x+y)^2$ con $\frac{2}{3}(x+y)^2$ 4) $\frac{5x}{4y}$ con $\frac{2x}{y}$

- **No son términos semejantes**

1) $3x^2y$ con $4xy^2$ 2) $4x^3$ con $5x$

Reducción de términos semejantes

Se suman o se restan los coeficientes de los términos semejantes y no se alteran los exponentes de las bases.

Ejemplos:

1) $4x - 9x = (4-9)\,x = -5x$

2) $-3mn + 7mn - 2mn = (-3+7-2)\,mn = 2mn$

3) $\frac{1}{2}a^2b^3 - \frac{2}{3}a^2b^3 + \frac{5}{6}a^2b^3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)a^2b^3 = \frac{3-4+5}{6}a^2b^3 = \frac{4}{6}a^2b^3 = \frac{2}{3}a^2b^3$

Valor numérico

Dada una expresión algebraica, su valor numérico es aquél que se obtiene al sustituir las literales o bases por un valor determinado y simplificar las operaciones indicadas.

Ejemplo 1

Si $x = 2$, $y = -3$, el valor numérico de $3x^2y$ es:

a) 27 b) – 36 c) 36 d) – 27

Solución:

Se sustituyen los valores de las literales en la expresión algebraica:

$$3x^2y = 3(2)^2(-3) = 3(4)(-3) = -36$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Si $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$ y $p = \frac{1}{6}$, el valor numérico de $mn - np$ es:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{9}$

Solución:

Sustituyendo los valores de m, n y p en la expresión algebraica.

$$mn - np = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{3-1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El valor numérico de $3a^2b - 2ab + 4ab^2$, si $a = -4$ y $b = -1$ es:

a) 72 b) 56 c) – 72 d) – 56

Solución:

Sustituyendo los valores en la expresión:

$$\begin{aligned} 3a^2b - 2ab + 4ab^2 &= 3(-4)^2(-1) - 2(-4)(-1) + 4(-4)(-1)^2 \\ &= 3(16)(-1) - 2(-4)(-1) + 4(-4)(1) \\ &= -48 - 8 - 16 \\ &= -72 \end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

Si $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 2$, el valor numérico de $\sqrt{\frac{x+y}{y+z}}$ es:

a) 2 b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

Solución:

$$\sqrt{\frac{x+y}{y+z}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+2}} = \sqrt{\frac{\frac{3+4}{12}}{\frac{1+6}{3}}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{(3)(7)}{(12)(7)}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Operaciones con polinomios

Un polinomio es la suma o diferencia de varios monomios o términos algebraicos.

Suma

Se reducen los términos semejantes entre los polinomios.

Ejemplo 1

El resultado de sumar $3x + 2y - 9$ con $-7x - 9y + 5$ es:

a) $-4x - 7y - 4$ b) $4x - 7y - 4$ c) $4x + 7y + 4$ d) $4x - 7y + 4$

Solución:

$$3x + 2y - 9 - 7x - 9y + 5 = 3x - 7x + 2y - 9y - 9 + 5 = -4x - 7y - 4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Al realizar la siguiente operación $(5x^2 - 4xy + 7y^2) + (-9x^2 - 6y^2 + 8xy)$, se obtiene:

a) $-4x^2 - 4xy + y^2$ b) $-4x^2 + 4xy - y^2$ c) $4x^2 - 4xy - y^2$ d) $-4x^2 + 4xy + y^2$

Solución:

$$(5x^2 - 4xy + 7y^2) + (-9x^2 - 6y^2 + 8xy) = 5x^2 - 4xy + 7y^2 - 9x^2 - 6y^2 + 8xy = -4x^2 + 4xy + y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Resta

Se identifica el minuendo y el sustraendo para establecer la operación.

Minuendo – Sustraendo

Ejemplo 1

Al restar $-2x - y + 5z$ de $5x + 6y - 7z$, se obtiene:

a) $-7x + 7y - 12z$ b) $7x + 7y - 12z$ c) $7x - 7y - 12z$ d) $7x + 7y + 12z$

Solución:

Se establece la operación:

$$(5x + 6y - 7z) - (-2x - y + 5z) = 5x + 6y - 7z + 2x + y - 5z = 7x + 7y - 12z$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

De $7x^2 + 3xy - 4y^2$ restar $-x^2 + 2xy$

a) $8x^2 - xy - 4y^2$ b) $-8x^2 + xy - 4y^2$ c) $8x^2 + xy - 4y^2$ d) $8x^2 - xy + 4y^2$

Solución:

Se establece la operación:

$$(7x^2 + 3xy - 4y^2) - (-x^2 + 2xy) = 7x^2 + 3xy - 4y^2 + x^2 - 2xy = 8x^2 + xy - 4y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Al realizar la operación $(m^2 + 7mn - 5n^2) - (-2m^2 + 5mn - 3n^2)$, se obtiene:

a) $3m^2 - 2mn - 2n^2$ b) $3m^2 + 2mn + 2n^2$ c) $-3m^2 + 2mn - 2n^2$ d) $3m^2 + 2mn - 2n^2$

Solución:

$$(m^2 + 7mn - 5n^2) - (-2m^2 + 5mn - 3n^2) = m^2 + 7mn - 5n^2 + 2m^2 - 5mn + 3n^2 = 3m^2 + 2mn - 2n^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

▸ Signos de agrupación

Los signos de agrupación son:

( ): paréntesis [ ]: corchetes { }: Llaves $\overline{\quad}$: vínculo

Para suprimir un signo de agrupación se multiplica por el signo o número que le anteceda.

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $2x + \{ 3x - 4y + [- 5x + y - 3(y - x) + 2y]\}$, se obtiene:

a) $3x + 4y$ b) $3x - 4y$ c) $x + 2y$ d) $x - 2y$

Solución:

$$\begin{aligned} 2x + \{3x - 4y + [- 5x + y - 3(y - x) + 2y]\} &= 2x + \{3x - 4y + [- 5x + y - 3y + 3x + 2y]\} \\ &= 2x + \{3x - 4y - 5x + y - 3y + 3x + 2y\} \\ &= 2x + 3x - 4y - 5x + y - 3y + 3x + 2y \\ &= 3x - 4y \end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La simplificación de $3a + \{- a + 2b - 2[a - 3(b - a)] + 3b\}$ es:

a) $- 6a + 11b$ b) $6a - 11b$ c) $5ab$ d) $- 5ab$

Solución:

$$\begin{aligned} 3a + \{- a + 2b - 2[a - 3(b - a)] + 3b\} &= 3a + \{- a + 2b - 2[a - 3b + 3a] + 3b\} \\ &= 3a + \{- a + 2b - 2a + 6b - 6a + 3b\} \\ &= 3a - a + 2b - 2a + 6b - 6a + 3b \\ &= - 6a + 11b \end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al simplificar la expresión $-3(a - b) + 5b - \{ 2a + b + [a - 3b - (2b - a) + 5b] - a\}$

a) $6a - 7b$ b) $-13ab$ c) $13ab$ d) $- 6a + 7b$

Solución:

$$-3(a - b) + 5b - \{ 2a + b + [a - 3b - (2b - a) + 5b] - a\} =$$

$$\begin{aligned} &= - 3a + 3b + 5b - \{ 2a + b + [a - 3b - 2b + a + 5b] - a\} = \\ &= - 3a + 3b + 5b - \{ 2a + b + a - 3b - 2b + a + 5b - a\} = \\ &= - 3a + 3b + 5b - 2a - b - a + 3b + 2b - a - 5b + a \\ &= - 6a + 7b \end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

▸ Multiplicación

Regla de los signos

$(+)(+) = +$ $\quad$ $(-)(-) = +$ $\quad$ $(+)(-) = -$ $\quad$ $(-)(+) = -$

Ley de los exponentes

Cuando se multiplican bases iguales, la base permanece y los exponentes se suman.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

▸ Monomio por monomio

Ejemplo 1

El resultado de $(-4x^2y^3)(-2x^4y^5)$ es:

a) $8x^6y^8$ $\quad$ b) $-8x^6y^8$ $\quad$ c) $6x^6y^8$ $\quad$ d) $-6x^6y^8$

Solución:

$$(-4x^2y^3)(-2x^4y^5) = 8x^{2+4}y^{3+5} = 8x^6y^8$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $(3a^{-3}b^2)(-5a^2b)(a^5b^{-2}c)$

a) $-15\,a^4b$ $\quad$ b) $15\,a^4bc$ $\quad$ c) $15\,a^6b^2$ $\quad$ d) $-15\,a^4bc$

Solución:

$$(3a^{-3}b^2)(-5a^2b)(a^5b^{-2}c) = -15\,a^{-3+2+5}b^{2+1-2}c = -15\,a^4bc$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

▸ Monomio por polinomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo 1

El resultado de $(2x^2 + 3x - 5)(3x^2)$ es:

a) $6x^4 + 9x^3 - 15x^2$ $\quad$ b) $6x^4 - 9x^3 - 15x^2$ $\quad$ c) $6x^4 + 9x^3 + 15x^2$ $\quad$ d) $-6x^4 + 9x^3 - 15x^2$

Solución:

$$(2x^2 + 3x - 5)(3x^2) = (2x^2)(3x^2) + (3x)(3x^2) - (5)(3x^2) = 6x^4 + 9x^3 - 15x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $(3a^2b^3c + 7ab^2c^2 - 2a^4b^2)(-4a^3b^5c^2)$ es:

a) $12\,a^5b^8c^3 - 28\,a^4b^7c^4 + 8a^7b^7c^2$ $\quad$ c) $-12\,a^5b^8c^3 + 28\,a^4b^7c^4 + 8a^7b^7c^2$

b) $-12\,a^5b^8c^3 - 28\,a^4b^7c^4 + 8a^7b^7c^2$ $\quad$ d) $-12\,a^5b^8c^3 - 28\,a^4b^7c^4 - 8a^7b^7c^2$

Solución:

$$\begin{aligned}(3a^2b^3c + 7ab^2c^2 - 2a^4b^2)(-4a^3b^5c^2) &= -12a^{2+3}b^{3+5}c^{1+2} - 28a^{1+3}b^{2+5}c^{2+2} + 8a^{4+3}b^{2+5}c^2 \\ &= -12\,a^5b^8c^3 - 28\,a^4b^7c^4 + 8a^7b^7c^2\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

▸ Polinomio por polinomio

Se multiplica cada uno de los elementos del primer polinomio por cada uno de los elementos del segundo polinomio y, los resultados se simplifican.

Ejemplos:

1) $$\begin{aligned}(3x^2 - 4x + 5)(3x - 7) = 3x^2(3x - 7) - 4x(3x - 7) + 5(3x - 7) &= 9x^3 - 21x^2 - 12x^2 + 28x + 15x - 35 \\ &= 9x^3 - 33x^2 + 43x - 35\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}(m^2 - mn + n^2)(m + n) = m^2(m + n) - mn(m + n) + n^2(m + n) &= m^3 + m^2n - m^2n - mn^2 + mn^2 + n^3 \\ &= m^3 + n^3\end{aligned}$$

- **División**

Regla de los signos

$$\frac{+}{+} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = - \qquad \frac{-}{-} = +$$

Ley de los exponentes

Si se dividen bases iguales, la base permanece y al exponente del numerador se le resta el exponente del denominador.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad ; \quad a^0 = 1 \text{ para todo } a \neq 0$$

- **Monomio entre monomio**

Ejemplo 1

El resultado de $\dfrac{-18x^3y^5z^2}{9x^2y^3z^2}$ es:

a) $2xy^2z$ b) $-2xy^2z$ c) $-2xy^2$ d) $-2x^2y$

Solución:

$$\frac{-18x^3y^5z^2}{9x^2y^3z^2} = -2x^{3-2}y^{5-3}z^{2-2} = -2xy^2z^0 = -2xy^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado de $\dfrac{-24a^6b^4}{-4a^3b^{-2}}$ es:

a) $8a^3b^6$ b) $6a^3b^2$ c) $6a^3b^6$ d) $8a^3b^2$

Solución:

$$\frac{-24a^6b^4}{-4a^3b^{-2}} = 6a^{6-3}b^{4-(-2)} = 6a^{6-3}b^{4+2} = 6a^3b^6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

- **Polinomio entre monomio**

Cada uno de los elementos del polinomio se divide por el monomio.

Ejemplo 1

El resultado de $\dfrac{15x^4y^5 - 10x^3y^6}{-5x^2y^2}$ es:

a) $-3x^2y^3 + 2xy^4$ b) $3x^2y^3 + 2xy^4$ c) $-3x^2y^3 - 2xy^4$ d) $-3x^3y^2 + 2x^4y$

Solución:

$$\frac{15x^4y^5 - 10x^3y^6}{-5x^2y^2} = \frac{15x^4y^5}{-5x^2y^2} - \frac{10x^3y^6}{-5x^2y^2} = -3x^{4-2}y^{5-2} + 2x^{3-2}y^{6-2} = -3x^2y^3 + 2xy^4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $\dfrac{21a^5b^{-2}+14a^2b^3-7ab}{7ab}$

a) $3a^4b + 2ab^2 - 1$ b) $-3a^4b^{-3} + 2ab^2 - 1$ c) $3a^4b^{-3} + 2ab^2$ d) $3a^4b^{-3} + 2ab^2 - 1$

Solución:

$$\frac{21a^5b^{-2}+14a^2b^3-7ab}{7ab} = \frac{21a^5b^{-2}}{7ab}+\frac{14a^2b^3}{7ab}-\frac{7ab}{7ab} = 3a^4b^{-3} + 2ab^2 - 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

► **Polinomio entre polinomio**

Se ordenan los términos en orden decreciente; se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor; el cociente que se obtiene se multiplica por el divisor, el resultado se resta del dividendo y así sucesivamente hasta obtener un residuo cero u otro cuyo grado sea menor al grado del divisor.

$$\begin{array}{r|l} & \text{Cociente} \\ \hline \text{Divisor} & \text{Dividendo} \\ & \text{Residuo} \end{array}$$

Ejemplo 1

El cociente de $\dfrac{x^2+11x+28}{x+4}$ es:

a) $x - 7$ b) $x + 7$ c) $-x + 7$ d) $-x - 7$

Solución:

Se ordena el dividendo y el divisor y se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} & x + 7 \quad \longleftarrow \text{Cociente} \\ \hline x + 4 & x^2 + 11x + 28 \\ & \underline{-x^2 - 4x} \\ & \qquad 7x + 28 \\ & \qquad \underline{-7x - 28} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

El cociente es $(x + 7)$, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El residuo que se obtiene al dividir $2a^3 + 3a^2 - 5a + 7$ por $a^2 - a + 1$ es:

a) $2a - 2$ b) $2a + 2$ c) $-2a + 2$ d) $-2a - 2$

Solución:

Se realiza la división mediante la caja divisora:

$$\begin{array}{r|l} & 2a + 5 \\ \hline a^2 - a + 1 & 2a^3 + 3a^2 - 5a + 7 \\ & \underline{-2a^3 + 2a^2 - 2a} \\ & \qquad 5a^2 - 7a + 7 \\ & \qquad \underline{-5a^2 + 5a - 5} \\ & \qquad\qquad -2a + 2 \quad \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Raíces y potencias

Potencias

La simplificación de estas operaciones se basa en las leyes de los exponentes.

Leyes de los exponentes

1) $a^0 = 1$
2) $a^1 = a$
3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
6) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$
7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
8) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
9) $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$
10) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
11) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $\dfrac{a^5 \cdot a^4}{a^7}$, se obtiene:

a) a^3 b) a^2 c) a^{-2} d) a^{-3}

Solución:

$$\frac{a^5 \cdot a^4}{a^7} = \frac{a^{5+4}}{a^7} = \frac{a^9}{a^7} = a^{9-7} = a^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La simplificación de $\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}\right)^6$ es:

a) x b) x^6 c) x^5 d) x^3

Solución:

Se expresan las raíces como un exponente racional y se realizan las respectivas operaciones con los exponentes:

$$\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}\right)^6 = \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^6 = x^{\frac{6}{2}} \cdot x^{\frac{6}{3}} = x^3 \cdot x^2 = x^5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\left(\dfrac{x^m \cdot x^n}{x^{2n}}\right)^m$ es:

a) x^{2m-mn} b) x^{m-n} c) x^{m^2-n} d) x^{m^2-mn}

Solución:

$$\left(\frac{x^m \cdot x^n}{x^{2n}}\right)^m = \left(\frac{x^{m+n}}{x^{2n}}\right)^m = \left(x^{m+n-2n}\right)^m = \left(x^{m-n}\right)^m = x^{m(m-n)} = x^{m^2-mn}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{-27a^4b^5c^2}{9a^4b^3c}\right)^2$, se obtiene:

a) $9b^4c^2$ b) $-9b^4c^2$ c) $9b^2c^4$ d) $-9b^2c^4$

Solución:

$$\left(\frac{-27a^4b^5c^2}{9a^4b^3c}\right)^2 = \left(-3b^2c\right)^2 = 9b^4c^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 5

Una expresión equivalente a $\dfrac{(2a+b)^5(2a+b)^{-1}}{(2a+b)^3}$

a) $(2a + b)^2$ b) $(2a + b)^3$ c) $(2a + b)^4$ d) $2a + b$

Solución:

La base es el binomio (2a + b), entonces,

$$\frac{(2a+b)^5(2a+b)^{-1}}{(2a+b)^3} = \frac{(2a+b)^{5-1}}{(2a+b)^3} = \frac{(2a+b)^4}{(2a+b)^3} = (2a + b)^{4-3} = (2a + b)^1 = 2a + b$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

- **Simplificación de radicales**

Dado un radical de la forma $\sqrt[n]{a}$ expresarlo en su forma más sencilla.

Ejemplo 1

Al simplificar el radical $\sqrt{4x^2y^4}$, se obtiene:

a) $2x^2y$ b) $4xy^2$ c) $2xy^2$ d) $-4xy^2$

Solución:

El radicando 4 se representa como una potencia y aplica la propiedad: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

$$\sqrt{4x^2y^4} = \sqrt{2^2x^2y^4} = 2^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}}y^{\frac{4}{2}} = 2xy^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al simplificar el radical $\sqrt[3]{27a^6b^9}$, se obtiene:

a) $-3a^2b^3$ b) $3a^3b^2$ c) $-3a^3b^2$ d) $3a^2b^3$

Solución:

$$\sqrt[3]{27a^6b^9} = \sqrt[3]{3^3a^6b^9} = 3^{\frac{3}{3}}a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{9}{3}} = 3^1a^2b^3 = 3a^2b^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Al simplificar $\sqrt{8x^5}$, se obtiene:

a) $2x\sqrt{2x}$ b) $x^2\sqrt{2x}$ c) $2x^2\sqrt{2x}$ d) $2\sqrt{2x}$

Solución:

$$\sqrt{8x^5} = \sqrt{2^3x^5} = \sqrt{2^2\cdot 2\cdot x^4\cdot x} = 2^{\frac{2}{2}}x^{\frac{4}{2}}\sqrt{2x} = 2x^2\sqrt{2x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Operaciones con radicales

Suma y resta de radicales

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x} - 3\sqrt{3x}$, se obtiene:

a) $4\sqrt{3x}$ b) $3\sqrt{3x}$ c) $2\sqrt{3x}$ d) $\sqrt{3x}$

Solución:

$$\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x} - 3\sqrt{3x} = (1 + 4 - 3)\sqrt{3x} = 2\sqrt{3x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La simplificación de la expresión $\sqrt{8x^2} + \sqrt{18x^2} - \sqrt{98x^2}$ es:

a) $-2\sqrt{2}\,x$ b) $-\sqrt{2}\,x$ c) $2\sqrt{2}\,x$ d) $-2x$

Solución:

Se simplifica cada uno de los radicales de la expresión:

$$\sqrt{8x^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot x^2} = 2\sqrt{2}\,x \quad ; \quad \sqrt{18x^2} = \sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot x^2} = 3\sqrt{2}\,x \quad ; \quad \sqrt{98x^2} = \sqrt{7^2 \cdot 2 \cdot x^2} = 7\sqrt{2}\,x$$

Por tanto,

$$\sqrt{8x^2} + \sqrt{18x^2} - \sqrt{98x^2} = 2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,x - 7\sqrt{2}\,x = (2 + 3 - 7)\sqrt{2}\,x = -2\sqrt{2}\,x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Multiplicación

Para realizar el producto de radicales se utilizan las siguientes propiedades:

Con índices iguales **Con índices diferentes**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$$

Ejemplo 1

El resultado de $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}$ es:

a) x b) x^3 c) x^4 d) x^2

Solución:

Los índices de los radicales son iguales entonces,

$$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^3 \cdot x} = \sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El producto de $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^7}$ es:

a) x^2 b) x^3 c) x^4 d) x

Solución:

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^2 \cdot x^7} = \sqrt[3]{x^9} = x^{\frac{9}{3}} = x^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$ es:

a) $x^{\frac{1}{6}}$ b) $x^{\frac{5}{6}}$ c) $x^{\frac{1}{2}}$ d) $x^{\frac{1}{3}}$

Solución:

Los índices de los radicales son diferentes, se aplica la propiedad: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}$.

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[(2)(3)]{x^3\cdot x^2} = \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

El resultado de $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x}$ es:

a) $\sqrt[4]{x}$ b) $x\sqrt[4]{x^3}$ c) $x\sqrt[4]{x}$ d) $x\sqrt{x}$

Solución:

$$\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3\cdot x^2} = \sqrt[4]{x^5} = \sqrt[4]{x^4\cdot x} = x\sqrt[4]{x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

► **División**

Para realizar la división de radicales se aplican las siguientes propiedades:

Con índice igual

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Con índice diferente

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$$

Ejemplo 1

Al realizar $\dfrac{\sqrt[3]{16x^7}}{\sqrt[3]{2x}}$, se obtiene:

a) x^2 b) $3x^2$ c) $4x^2$ d) $2x^2$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{16x^7}}{\sqrt[3]{2x}} = \sqrt[3]{\frac{16x^7}{2x}} = \sqrt[3]{8x^6} = \sqrt[3]{2^3x^6} = 2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{6}{3}} = 2x^2$$

La respuesta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado de $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ es:

a) $\sqrt[6]{x}$ b) $\sqrt{x}$ c) $\sqrt[6]{x^5}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

Solución:

Los índices de los radicales son diferentes, entonces,

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^2}} = \sqrt[6]{x^{3-2}} = \sqrt[6]{x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejercicios

1. ¿Cuál de las siguientes opciones, es un número racional?

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{5}$ d) π

2. ¿Cuál de los siguientes números es un irracional?

a) $-\frac{3}{4}$ b) $0.\overline{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{9}$

3. Al simplificar la expresión $-3+\{4-[5-2]+1\}$, se obtiene:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

4. El resultado de simplificar $5-[3-\overline{8-7+1}+(4-3)]$, es:

a) -3 b) -2 c) 2 d) 3

5. El máximo común divisor (M.C.D.) de 45 y 60 es:

a) 2700 b) 120 c) 60 d) 15

6. El mínimo común múltiplo (m.c.m) de 60 y 120 es:

a) 60 b) 120 c) 240 d) 7200

7. El mínimo común múltiplo (m.c.m) de 80 y 240 es:

a) 80 b) 160 c) 240 d) 3200

8. El máximo común divisor (M.C.D.) de 100 y 140 es:

a) 20 b) 50 c) 70 d) 1400

9. El resultado de $3-\frac{2}{3}-\frac{7}{9}$ es:

a) $3\frac{1}{9}$ b) $2\frac{8}{9}$ c) $1\frac{5}{9}$ d) $1\frac{1}{3}$

10. El resultado de $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}$ es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{3}$

11. El resultado de $\left(2\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$ es:

a) $3\frac{4}{15}$ b) $2\frac{5}{21}$ c) $1\frac{2}{3}$ d) $1\frac{1}{5}$

12. El resultado de $\left(1\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)$ es:

a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{9}{8}$ d) 1

13. Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{3}{1-\frac{2}{5}}\right)\left(2-\frac{9}{5}\right)$, se obtiene:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) $\frac{5}{3}$

14. Al realizar $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)$, se obtiene:

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{5}$

15. Cuando se realiza $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$, se obtiene:

a) 2 b) -1 c) $-\frac{3}{4}$ d) $-\frac{1}{8}$

16. Un estanque de 500 litros se encuentra a $\frac{3}{4}$ de su capacidad, si se agregan 50 litros a dicho tanque, a ¿qué porcentaje de llenado, se encuentra el estanque?

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{13}{20}$ d) $\frac{17}{20}$

17. Las dimensiones de un rectángulo son 15 x 20 cm, si el ancho se aumenta en su quinta parte y el largo en su décima parte. ¿Qué fracción representa el perímetro inicial del perímetro final?

a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

18. El valor de "x" en la proporción $\frac{x}{5}=\frac{21}{3}$ es:

a) 7 b) 15 c) 35 d) 105

19. El valor de "m" en la proporción $\frac{4}{m}=12$, es:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 3 d) 48

20. El valor de "w" en la proporción $\frac{2}{w}=\frac{3}{8}$ es:

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{16}{3}$ c) 24 d) 48

21. Elizabeth compró 6 metros de listón y pago \$42.00. ¿Cuánto pagará Elizabeth si desea comprar 11 metros?

a) \$84.00 b) \$77.00 c) \$56.00 d) \$49.00

22. Delia paga \$1680.00 por un televisor que se encuentra rebajado un 20% sobre el costo marcado. ¿Cuál es el costo marcado de dicho televisor?

a) 336.00 b) \$1344.00 c) \$1980.00 d) \$2100.00

23. Se vierte el contenido de una bolsa de 20Kg de detergente en bolsas de 1Kg. ¿Cuántas bolsas de 250 gr., se podrán llenar con la misma cantidad de detergente?

a) 500 bolsas b) 125 bolsas c) 80 bolsas d) 50 bolsas

24. Un ciclista que viaja a una velocidad de $12\frac{\text{Km}}{\text{hr}}$, recorre una distancia en 40 minutos. ¿Qué distancia recorrerá en el mismo tiempo el ciclista, si su velocidad es de $18\frac{\text{Km}}{\text{hr}}$?

a) 8Km b) 10Km c) 12Km d) 16Km

25. Un trabajo de carpintería lo realizan 12 personas en 3 días, si en la misma tarea trabajan 9 personas. ¿Cuántos días tardarán en realizarlo?

a) 2.25 días b) 4 días c) 16 días d) 36 días

26. El resultado de $\frac{5^{-2}\cdot 5^{4}}{5^{2}}$ es:

a) 5^{-6} b) 5^{-4} c) 1 d) 5^{2}

27. Al simplificar $\left(\frac{4^{-2}}{4^{-7}}\right)^{-\frac{1}{5}}$, se obtiene:

a) 4^{-10} b) $\frac{1}{4}$ c) -4 d) $\frac{1}{4^{-10}}$

28. Una expresión equivalente de $\sqrt[3]{3^{-2}\,3^{11}}$ es:

a) 27 b) 3^{2} c) 3^{-3} d) $3^{-\frac{13}{3}}$

29. Una expresión equivalente de $\sqrt[4]{48}$ es:

a) $16\sqrt[4]{3}$ b) $4\sqrt[4]{6}$ c) $3\sqrt[4]{2}$ d) $2\sqrt[4]{3}$

30. El resultado de $2\sqrt{2}-\sqrt{27}+\sqrt{8}+3\sqrt{3}$ es:

a) $6\sqrt{2}-\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

31. Si se simplifica $\sqrt{75}+2\sqrt{12}-\sqrt{108}$, se obtiene:

a) $11\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

32. Al efectuar $(\sqrt{6})(\sqrt{15})$, se obtiene:

a) $\sqrt[4]{90}$ b) $\sqrt{21}$ c) $3\sqrt{10}$ d) $9\sqrt{10}$

33. La simplificación de $(\sqrt[4]{18})(\sqrt{3})$ es:

a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $3\sqrt[4]{15}$ c) $\sqrt{54}$ d) $6\sqrt{6}$

34. Al realizar $\frac{4\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{16}}$, so obtiene:

a) $6\sqrt[3]{2}$ b) 6 c) $\sqrt[3]{18}$ d) $\sqrt[3]{6}$

35. Una expresión equivalente de $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{6}}$ es:

a) $\sqrt[6]{2}$ b) $2\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[6]{48}$ d) $\sqrt[6]{54}$

36. Si se racionaliza $\frac{6}{\sqrt{2}}$, se obtiene:

a) $2\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{6}$ c) $2\sqrt{6}$ d) $3\sqrt{2}$

37. Al racionalizar $\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$, se obtiene:

a) $2\sqrt[3]{5}$ b) $5\sqrt[3]{2}$ c) $10\sqrt[3]{5}$ d) $25\sqrt[3]{10}$

38. Al racionalizar $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$, se obtiene:

a) $\sqrt{5}+1$ b) $\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5}$ c) $4(\sqrt{5}+1)$ d) $8(\sqrt{5}-1)$

39. Si se racionaliza $\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$, se obtiene:

a) $1-\sqrt{x}$ b) $1+\sqrt{x}$ c) $\sqrt{1+x}$ d) $\sqrt{1-x}$

40. Una expresión equivalente de $\sqrt{-16}$ es:

a) 2 i b) 4 i c) –4 i d) – 8

41. Al simplificar $\sqrt{-49}$, se obtiene :

a) – 7 i b) – 7 c) 7 i d) 7 – i

42. Al simplificar la expresión $\sqrt{-9}+\sqrt{-25}-\sqrt{-4}$ se obtiene:

a) 10 i b) 8 i c) 6 i d) – 6 i

43. La simplificación de $3\sqrt{-64} - 5\sqrt{-100}$

a) $-26\,i$ b) $-74\,i$ c) $26\,i$ d) $74\,i$

44. La magnitud del numero complejo $z = -3 + 4\,i$, es:

a) 5 b) $\sqrt{17}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{5}$

45. Dado $z = 8 - 6\,i$, su magnitud, es:

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{14}$ c) $\sqrt{28}$ d) 10

46. Si $z = -1 - 2\,i$ y $w = 8 - i$, al realizar $(z + w)$ se obtiene:

a) $7 - 3\,i$ b) $7 - i$ c) $9 - 3\,i$ d) $-8 + i$

47. Dados los números $z = 11 + 2\,i$ y $w = 3 - 2\,i$, la operación $(z - w)$ es equivalente a:

a) $14 - i$ b) $8 + 4\,i$ c) $8 - 4\,i$ d) 14

48. El producto de $z = 5 - 2\,i$ y $w = 2 + i$, es:

a) $8 - i$ b) $10 - 2\,i$ c) $10 - i$ d) $12 + i$

49. Si $z = 6 - i$ y $w = 2 - i$, el resultado de $\dfrac{z}{w}$, es:

a) $\dfrac{11-4i}{5}$ b) $\dfrac{13+4i}{5}$ c) $\dfrac{12-8i}{3}$ d) $\dfrac{11+4i}{3}$

50. Al realizar el producto $(7 - 2\,i)(4 + 2i)$, se obtiene:

a) $26 - 2\,i$ b) $28 - 4\,i$ c) $32 + 6\,i$ d) $34 + 4\,i$

51. Dados los números $z = 3 + i$ y $w = 2 - 3\,i$, el resultado de $\dfrac{w}{z}$ es:

a) $\dfrac{3+11i}{13}$ b) $\dfrac{12-11i}{8}$ c) $\dfrac{3+11i}{8}$ d) $\dfrac{3-11i}{10}$

52. Al sumar $(-3x^2)$ con $(-2x^2)$ el resultado es:

a) $6x^2$ b) $-5x^2$ c) $-6x^4$ d) $5x^4$

53. La simplificación de $\{5x - (4x - 1) - \overline{2 - x} + 5 + 3x\}$ es:

a) $2x - 6$ b) $3x + 6$ c) $4x + 5$ d) $5x + 4$

54. La expresión algebraica del enunciado "el doble de un número aumentado en 3 unidades" es:

a) $x^2 - 3$ b) $2x - 3$ c) $2x + 3$ d) $x^2 + 3$

55. Si $x = -2$, $y = 3$, el valor numérico de $-7x^2y$, es:

a) 84 b) -84 c) -126 d) 126

56. El resultado de sumar $(2x^2 - 3x + 11)$ con $(-x^2 - 4x - 1)$, es:

a) $x^2 - 7x + 10$ b) $-x^2 - 7x + 10$ c) $-x^2 - x - 10$ d) $3x^2 + x + 12$

57. Al evaluar $m = -2$, $n = -1$, en la expresión $2m^2 + 5mn + n^2$, se obtiene:

a) 19 b) 13 c) 7 d) – 1

58. Una forma de representar el enunciado, "la semidiferencia de dos números cualesquiera" es:

a) $\frac{2}{x-y}$ b) $2(x-y)$ c) $\frac{x-y}{2}$ d) $(x-y)^2$

59. Al restar $(-w^2 - w + 14)$ de $(5w^2 + w - 11)$, se obtiene:

a) $4w^2 - 3$ b) $-4w^2 + 3$ c) $-6w^2 - 2w + 25$ d) $6w^2 + 2w - 25$

60. Si se simplifica la expresión $4 - [5p - 7 - (8 - 2p)] + 11p - 5$, se obtiene:

a) $4p + 14$ b) $-4p + 1$ c) $8p + 14$ d) $18p - 16$

61. Al realizar $(8m^2 - mn + n^2) - (m^2 - 3mn + n^2)$, se obtiene:

a) $7m^2 - 4mn + 2n^2$ b) $7m^2 + 2mn$ c) $7m^2 - 4mn$ d) $9m^2 + 2mn - 2n^2$

62. Al realizar el producto de $(-3x^2)$ por $(-2x^3)$, se obtiene:

a) $-6x^6$ b) $-5x^5$ c) $6x^5$ d) $5x^6$

63. El resultado de $(-3mn)(m^2 - 2mn + 3n^2)$, es:

a) $-3m^3n + 6m^2n^2 - 9mn^3$ b) $-3m^2n + 6mn - 9mn^2$ c) $-3m^3n - 6m^2n^2 - 9mn^3$ d) $3m^3n - 6m^2n^2 + 9mn^3$

64. El resultado del producto $(2x - 1)(x + 2)$ es:

a) $2x^2 - 3x + 2$ b) $2x^2 - 3x - 2$ c) $2x^2 + 3x - 2$ d) $2x^2 + 3x + 2$

65. El producto de $(3x - 2)(2x - 3)$ es:

a) $6x^2 - 13x + 6$ b) $6x^2 + 13x + 6$ c) $6x^2 - 13x - 6$ d) $6x^2 + 5x + 6$

66. El resultado del cociente $\frac{-30x^3y^3}{5xy^2}$ es:

a) $-6xy^2$ b) $-5x$ c) $-6x^2y$ d) $6x^4y^5$

67. Al dividir $(3x^2 - 9x)$ por $(3x)$, se obtiene:

a) $x - 3$ b) $x + 3$ c) $3x - 1$ d) $9x^3 - 27x^2$

68. El cociente de $(2x^2 - 11x + 15)$ por $(2x - 5)$, es:

a) $x + 3$ b) $x - 3$ c) $x + 10$ d) $x - 10$

69. El residuo que se obtiene al dividir $(2x^3 - 3x^2 + 6x + 6)$ por $(2x - 1)$, es:

a) $2x - 1$ b) $x + 8$ c) $5x - 6$ d) $6x - 5$

70. El cociente de $\frac{x^2 + 3x - 28}{4 - x}$ es:

a) $-x + 7$ b) $x + 7$ c) $x - 7$ d) $-x - 7$

71. Una expresión equivalente de $(\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x})^4$ es:

a) $\sqrt[6]{x}$ b) x^3 c) x^6 d) $\sqrt[4]{x}$

72. Al simplificar $\left(-\dfrac{x^2y^4}{3x^3y}\right)^2$, se obtiene:

a) $\dfrac{y^5}{6x^2}$ b) $\dfrac{y^6}{9x^2}$ c) $-\dfrac{y^7}{3x}$ d) $-\dfrac{x}{9y^2}$

73. La simplificación de $\sqrt[3]{16x^4}$, es:

a) $4x\sqrt[3]{2x}$ b) $2x^2\sqrt[3]{x}$ c) $2x\sqrt[3]{2x}$ d) $x^2\sqrt[3]{x}$

74. Una expresión equivalente de $\left(\dfrac{2m^3n}{3m^2n^4}\right)^{-2}$, es:

a) $-\dfrac{9m}{4n^3}$ b) $\dfrac{9n^6}{4m^2}$ c) $\dfrac{4m^2}{9n^6}$ d) $-\dfrac{3m^2}{2n^4}$

75. Al simplificar $\dfrac{(3m-1)^3(3m-1)^{-2}}{(3m-1)^{-4}}$, se obtiene:

a) $(3m-1)^{-3}$ b) $(3m-1)^{-5}$ c) $(3m-1)^5$ d) $(3m-1)^{-9}$

76. Al simplificar $4\sqrt{2x^3}-2x\sqrt{2x}+x\sqrt{8x}$, se obtiene:

a) $4x\sqrt{2x}$ b) $4\sqrt{2x}$ c) $6\sqrt{2x}$ d) $x\sqrt{2x}$

77. El resultado del producto $(-2m\sqrt{2m})(-m\sqrt{m})$, es:

a) $2m^3\sqrt{m}$ b) $2m^3\sqrt{2}$ c) $-2m\sqrt[4]{2m}$ d) $2m^2\sqrt[4]{2m^2}$

78. Una expresión equivalente de $\dfrac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{8x^3}}$, es:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2x}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2x}}$ d) $\dfrac{1}{x}$

79. Al realizar el producto $(3\sqrt[3]{2x})(2\sqrt{x})$, se obtiene:

a) $6\sqrt[6]{4x^5}$ b) $6\sqrt[6]{2x^2}$ c) $5\sqrt[5]{2x}$ d) $5\sqrt[6]{4x^3}$

80. El cociente de $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$, es:

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt[4]{x}$ c) $2\sqrt{x}$ d) $2\sqrt[4]{x}$

Lección 2

Productos notables y factorización

1. Productos notables

Aquellos productos que se resuelven con la ayuda de reglas y evitando efectuar todo el producto se conocen como "productos notables".

a) Binomio al cuadrado

Al elevar un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto.

Regla:

- Se eleva al cuadrado el primer término del binomio.
- Se suma o resta el doble producto del primero por el segundo término del binomio.
- Se suma el cuadrado del segundo término del binomio.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplo 1

El desarrollo de $(m + 5)^2$ es:

a) $m^2 + 5$ b) $m^2 + 25$ c) $m^2 + 2m + 10$ d) $m^2 + 10m + 25$

Solución:

- El cuadrado del primer término: $(m)^2 = m^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(m)(5) = 10m$
- El cuadrado del segundo término: $(5)^2$

Se realiza la suma de los términos, entonces:

$$(m + 5)^2 = m^2 + 10m + 25$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado del desarrollo de $(7 - x)^2$ es:

a) $49 - x^2$ b) $49 + x^2$ c) $x^2 - 14x + 49$ d) $49 + 14x + x^2$

Solución:

Se desarrolla el binomio al cuadrado

$$(7 - x)^2 = (7)^2 - 2(7)(x) + (x)^2 = 49 - 14x + x^2$$

Se ordena el trinomio y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El resultado de desarrollar $(n^2 - 10)^2$ es:

a) $n^4 - 20n^2 + 100$ b) $n^2 - 20n + 100$ c) $n^2 - 100$ d) $n^2 + 20$

Solución:

$$(n^2 - 10)^2 = (n^2)^2 - 2(n^2)(10) + (10)^2 = n^4 - 20n^2 + 100$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

b) Binomios conjugados

Son aquellos que tienen los mismos elementos, pero uno de ellos de signo contrario y su resultado es una diferencia de cuadrados.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Regla:

- Se eleva al cuadrado el término que no cambia de signo.
- Se resta el cuadrado del término que cambia de signo.

Ejemplo 1

El desarrollo de $(b + 8)(b - 8)$ es:

a) $b^2 - 16b + 64$ b) $b^2 - 64$ c) $b^2 + 8b + 64$ d) $b^2 + 64$

Solución:

- Se eleva al cuadrado el primer término: $(b)^2 = b^2$
- Se eleva al cuadrado el término que cambia de signo: $(8)^2 = 64$

Se realiza la diferencia de ambos términos: $b^2 - 64$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al desarrollar $(2a - 1)(1 + 2a)$, se obtiene:

a) $4a^2 - 1$ b) $4a^2 + 2$ c) $1 - 4a + 4a^2$ d) $1 - 4a^2$

Solución:

Se ordenan los términos de los binomios:

$$(2a - 1)(2a + 1) = (2a)^2 - (1)^2 = 4a^2 - 1$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right)$ es:

a) $4x^2 + \frac{1}{4}$ b) $4x^2 - \frac{1}{4}$ c) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Solución:

Empleando la regla de la diferencia de cuadrados:

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right) = (2x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 - \frac{1}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

El desarrollo de $(-3x - 2)(3x - 2)$ es:

a) $4 - 12x + 9x^2$ b) $4 - 9x^2$ c) $9x^2 - 4$ d) $4 + 12x + 9x^2$

Solución:

Se acomodan los elementos de los binomios y se aplica la regla de diferencia de cuadrados:

$$(-2 - 3x)(-2 + 3x) = (-2)^2 - (3x)^2 = 4 - 9x^2 .$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

c) Binomios con término común

Son aquellos binomios que se encuentran en un producto y ambos tienen un término que se repite.

Regla:

- Se eleva al cuadrado el término común.
- Se suman algebraicamente los términos no comunes y se multiplican por el término en común.
- Se suma el producto algebraico de los dos términos no comunes.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo 1

El desarrollo de $(x + 8)(x + 5)$ es:

a) $x^2 + 40x + 13$ b) $x^2 + 13x + 40$ c) $x^2 + 40$ d) $x^2 + 13$

Solución:

$$(x + 8)(x + 5) = (x)^2 + (8 + 5)x + (8)(5) = x^2 + 13x + 40$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Desarrollando $(x + 9)(x - 10)$, se obtiene:

a) $x^2 + x - 90$ b) $x^2 - 90$ c) $x^2 - 1$ d) $x^2 - x - 90$

Solución:

$$(x + 9)(x - 10) = (x)^2 + (9 - 10)x + (9)(-10) = x^2 + (-1)x - 90 = x^2 - x - 90$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Al desarrollar $\left(3x - \frac{1}{2}\right)(2 + 3x)$ se obtiene:

a) $9x^2 - 1$ b) $3x^2 + \frac{9}{2}x - 1$ c) $9x^2 + \frac{9}{2}x - 1$ d) $9x^2 + 1$

Solución:

Se ordenan los binomios, dando prioridad a los términos que ambos binomios tienen en común:

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)(3x + 2)$$

Se realiza el producto con las reglas dadas:

$$\begin{aligned}\left(3x - \frac{1}{2}\right)(3x + 2) = (3x)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2\right)(3x) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2) &= 9x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)(3x) + \left(-\frac{2}{2}\right)\\ &= 9x^2 + \frac{9}{2}x + (-1)\\ &= 9x^2 + \frac{9}{2}x - 1\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

d) Binomio al cubo

Es de la forma:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Regla:

- El cubo del primer término.
- Más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo.
- Más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo.
- Más el cubo del segundo término.

Ejemplo 1

El desarrollo de $(a + 2)^3$ es:

a) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ c) $a^3 + 9a^2 + 12a + 8$

b) $a^3 - 9a^2 + 12a - 8$ d) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

Solución:

$$(a + 2)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(2) + 3(a)(2)^2 + (2)^3 = a^3 + 3a^2(2) + 3a(4) + (8) = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El desarrollo de $(x - 3)^3$ es:

a) $x^3 - 6x^2 + 18x - 27$ c) $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$

b) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

Solución:

$$(x - 3)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-3) + 3(x)(-3)^2 + (-3)^3 = x^3 + 3x^2(-3) + 3x(9) + (-27) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

e) Binomio de Newton

Dado $(a + b)^n$ su desarrollo es:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + b^n$$

Donde

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (r-1) \cdot r \qquad \rightarrow \qquad \text{(número factorial)}$$

<u>I – esimo término</u>

El i – esimo término se define:

$$i - \text{esimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}\,b^{i-1}$$

Ejemplo 1

Al desarrollar $(a + 1)^4$ se obtiene

a) $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ c) $a^4 + 1$

b) $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1$ d) $a^4 - 1$

Solución:

$$(a + 1)^4 = (a)^4 + 4(a)^{4-1}(1) + \frac{4(4-1)}{2!}(a)^{4-2}(1)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(a)^{4-3}(1)^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}(a)^{4-4}(1)^4$$

$$= a^4 + 4a^3 + \frac{4(3)}{2}a^2 + \frac{4(3)(2)}{3\cdot 2\cdot 1}a + \frac{4(3)(2)(1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^0$$

$$= a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Al desarrollar $(2x+y)^5$ se obtiene:

a) $32x^5 + y^5$

b) $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$

c) $32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

d) $32x^5 - y^5$

Solución:

$$(2x+y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^{5-1}(y) + \frac{5(5-1)}{2!}(2x)^{5-2}(y)^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2x)^{5-3}(y)^3 +$$

$$\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2x)^{5-4}(y)^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2x)^{5-5}(y)^5$$

$$= (2x)^5 + 5(2x)^4(y) + \frac{5(4)}{2\cdot 1}(2x)^3(y)^2 + \frac{5(4)(3)}{3\cdot 2\cdot 1}(2x)^2(y)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x)^1(y)^4 + \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x)^0(y)^5$$

$$= 32x^5 + 5(16x^4)y + 10(8x^3)y^2 + 10(4x^2)y^3 + 5(2x)y^4 + (1)(1)y^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El 4° término de $(3x^2 - y)^4$ es:

a) $-12x^3y^2$ b) $54x^4y^2$ c) y^4 d) $-12x^2y^3$

Solución:

$$i-\text{esimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}\,b^{\,i-1}$$

$$i-\text{esimo} = \frac{4(4-1)(4-2)}{(4-1)!}(3x^2)^{4-4+1}(-y)^{4-1} = \frac{4(3)(2)}{3!}(3x^2)^1(-y)^3 = \frac{4(3)(2)}{3\cdot 2\cdot 1}(3x^2)(-y^3)$$

$$= 4(3x^2)(-y^3)$$

$$= -12x^2y^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

El 6° término del desarrollo de $(x^2 + 2y^3)^8$ es:

a) $1792\,x^4y^{18}$ b) $1120\,x^8y^{12}$ c) $1792\,x^6y^{15}$ d) $64\,x^{12}y^6$

Solución:

$$i-\text{esimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}\,b^{\,i-1}$$

$$i-\text{esimo} = \frac{8(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)}{(6-1)!}(x^2)^{8-6+1}(2y^3)^{6-1} = \frac{8(7)(6)(5)(4)}{5!}(x^2)^3(2y^3)^5$$

$$= \frac{8(7)(6)(5)(4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x^6)(32y^{15})$$

$$= 56(x^6)(32y^{15})$$

$$= 1792\,x^6y^{15}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

2. Factorización

Es el proceso algebraico por medio del cual se transforma una suma o diferencia de términos algebraicos en un producto.

Factor común

Para obtener el factor común de un polinomio, se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes y la literal o literales con menor exponente que se repita en cada uno de los términos algebraicos del polinomio a factorizar.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $3x^2 + 6x$ es:

a) $3(x^2 + 6x)$ b) $3x(x + 2)$ c) $x(3x^2 + 6)$ d) $3x^2(1 + 2x)$

Solución:

- Se obtiene el M.C.D de los coeficientes 3 y 6, el cual es "3".
- La literal que se repite en los términos del polinomio de menor exponente es "x".
- El factor común es "3x".
- Se divide cada uno de los elementos del polinomio por el factor común: $\frac{3x^2}{3x} = x$; $\frac{6x}{3x} = 2$

La factorización es:

$$3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $2x + 4$ es:

a) $2(x + 4)$ b) $4(x + 1)$ c) $2(x + 2)$ d) $x(2 + 4x)$

Solución:

Se comprueban las multiplicaciones de cada inciso:

a) $2(x + 4) = 2x + 8$

b) $4(x + 1) = 4x + 4$

c) $2(x + 2) = 2x + 4$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Al factorizar $24m^3 + 16m^2 - 4m$ se obtiene:

a) $4m(6m^2 + 4m)$ b) $4m(6m^2 + 4m - 1)$ c) $4m(8m^2 + 8m - 4)$ d) $4m(6m^3 + 4m^2 - 1)$

Solución:

- Se obtiene el M.C.D. de los coeficientes 24, 16 y 4 , el cual es "4".
- La literal que se repite en cada uno de los términos del polinomio con menor exponente es "m".
- El factor común es "4m".

La factorización es:

$$24m^3 + 16m^2 - 4m = 4m(6m^2 + 4m - 1)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Factor común por agrupación

Los términos del polinomio a factorizar, se agrupan conforme aquellos que tengan un factor en común, de modo que la nueva expresión se pueda factorizar.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $m^2 + mp + mx + px$ es:

a) $m(m + p) + x(m + p)$ c) $m(m + p) + p(m + p)$

b) $m(m + x) + x(m + x)$ d) $p(m + p) + x(m + x)$

Solución:

Los términos del polinomio se agrupan:

$$m^2 + mp + mx + px = (m^2 + mp) + (mx + px)$$

Cada una de las nuevas expresiones se factorizan por factor común

$$m(m + p) + x(m + p)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $7x - 1 - 7xy + y$ es:

a) $(7x - 1)(1 + y)$ b) $(7x - 1)(1 - y)$ c) $(7x + 1)(1 + y)$ d) $(7x + y)(1 - y)$

Solución:

La expresión equivalente es: $(7x - 7xy) + (-1 + y) = 7x(1 - y) - 1(1 - y) = (1 - y)(7x - 1)$

La respuesta correcta es el inciso "b".

Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados tiene la forma $x^2 - y^2$ y su factorización es el producto de binomios conjugados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Ejemplo 1

La factorización de $4x^2 - 9$ es:

a) $(2x + 3)(2x + 3)$ b) $(2x - 3)(2x - 3)$ c) $(2x - 3)(2x + 3)$ d) $(3 - 2x)(2x + 3)$

Solución:

Se obtiene la raíz de cada uno de los elementos del binomio

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9} = 3$$

Se agrupan en forma de binomios conjugados

$$(2x + 3)(2x - 3)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $m^2 - \frac{n^2}{4}$ es:

a) $\left(m + \frac{n}{2}\right)\left(m + \frac{n}{2}\right)$ b) $\left(m - \frac{n}{2}\right)\left(m - \frac{n}{2}\right)$ c) $\left(m + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} - m\right)$ d) $\left(m + \frac{n}{2}\right)\left(m - \frac{n}{2}\right)$

Solución:

$$m^2 - \frac{n^2}{4} = \left(m + \frac{n}{2}\right)\left(m - \frac{n}{2}\right)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es el resultado del desarrollo de un binomio al cuadrado.

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

Ejemplo 1

Al factorizar $m^2 + 12m + 36$, se obtiene:

a) $(m + 18)^2$ b) $(m + 9)^2$ c) $(m + 6)^2$ d) $(m + 3)^2$

Solución:

Se ordenan los términos del trinomio en forma descendente con respecto a una de las literales, de manera que en los extremos se encuentren expresiones con raíz cuadrada exacta.

$$m^2 + 12m + 36$$

Se obtiene la raíz del 1er y 3er término:

$$\sqrt{m^2} = m \qquad y \qquad \sqrt{36} = 6$$

Se realiza el doble producto de las raíces obtenidas:

$$2(m)(6) = 12m$$

El resultado coincide con el término central del trinomio, entonces es un trinomio cuadrado perfecto, por último se agrupan las raíces en un binomio al cuadrado y se coloca el signo del término central (+).

$$(m + 6)^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor de "n", para que la expresión $x^2 + nx + 25$ sea trinomio cuadrado perfecto, es:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20

Solución:

Se obtienen las raíces de los extremos

$$\sqrt{x^2} = x \qquad y \qquad \sqrt{25} = 5$$

Para que sea trinomio cuadrado perfecto el término central es el doble producto de las raíces "x" y "5"

$$2(x)(5) = 10x$$

Por tanto n = 10 y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $m^2 + 81n^2 - 18mn$ es:

a) $(m + 9n)^2$ b) $(m - 9n)^2$ c) $(m - 6n)^2$ d) $(m + 3n)^2$

Solución:

- Se ordena el trinomio $m^2 - 18mn + 81n^2$.
- Se obtienen las raíces de los extremos y se multiplican por 2: $2(m)(9n) = 18mn$.
- La factorización de $m^2 - 18mn + 81n^2$ es $(m - 9n)^2$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, se obtiene al desarrollar el producto de dos binomios con término común.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $x^2 + 7x + 12$ es:

a) $(x - 4)(x - 3)$ b) $(x + 6)(x + 2)$ c) $(x + 12)(x + 1)$ d) $(x + 4)(x + 3)$

Solución:

Se ordenan los términos que forman el trinomio en forma descendente con respecto a los exponentes de una de las literales, de manera que el primer término tenga raíz cuadrada exacta.

$$x^2 + 7x + 12$$

Se obtiene la raíz cuadrada del término cuadrático, la cual se coloca en dos binomios:

$$x^2 + 7x + 12 = (x \quad)(x \quad)$$

El primer binomio lleva el signo del segundo término del trinomio (+) y el segundo binomio lleva el producto de los signos del segundo y el tercer término del trinomio (+)(+) = +

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Se buscan dos números cuyo producto sea igual al tercer término del trinomio (12) y su suma algebraica sea el coeficiente del segundo término (7): $(4)(3) = 12$ y $4 + 3 = 7$, los números son 4 y 3.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

NOTA: De los números encontrados se coloca el mayor en el primer binomio y el menor en el segundo .binomio

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $m^2 + 24 - 10m$ es:

a) $(m - 6)(m - 4)$ b) $(m + 6)(m - 4)$ c) $(m - 6)(m + 4)$ d) $(m + 6)(m + 4)$

Solución:

– Se ordena el trinomio a factorizar: $m^2 - 10m + 24$.

– Se determinan los signos de los binomios: $(m - \quad)(m - \quad)$.

– Se obtienen los números que multiplicados den 24 y sumados 10: $(m - 6)(m - 4)$.

la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al factorizar el trinomio $n^2 - n - 56$ se obtiene:

a) $(n - 8)(n - 7)$ b) $(n + 14)(n - 4)$ c) $(n + 28)(n - 2)$ d) $(n - 8)(n + 7)$

Solución:

$$n^2 - n - 56 = (n - \quad)(n + \quad) = (n - 8)(n + 7)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $2x^2 + 3x + 1$ es:

a) $(2x + 1)(x + 2)$ b) $(x + 1)(2x + 1)$ c) $(2x - 1)(x - 1)$ d) $(2x + 1)(x - 1)$

Solución:

Se multiplica y se divide la expresión por el coeficiente del término cuadrático:

$$2x^2 + 3x + 1 = \frac{2(2x^2 + 3x + 1)}{2}$$

Se multiplica sólo el 1er término y 3er término de la expresión:

$$\frac{4x^2 + 3(2x) + 2}{2}$$

Se realizan los pasos para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(2x + \quad)(2x + \quad)}{2} = \frac{(2x + 2)(2x + 1)}{2} = (x + 1)(2x + 1)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $6x^2 - 11x - 35$ es:

a) $(3x + 5)(2x - 7)$ b) $(3x - 5)(2x + 7)$ c) $(6x + 7)(x - 5)$ d) $(6x + 5)(x - 7)$

Solución:

$$6x^2 - 11x - 35 = \frac{6(6x^2 - 11x - 35)}{6} = \frac{36x^2 - 11(6x) - 210}{6} = \frac{(6x - 21)(6x + 10)}{6} = \frac{(6x - 21)(6x + 10)}{3 \cdot 2}$$

$$= (2x - 7)(3x + 5)$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Suma y diferencia de cubos

Son de la forma:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad ; \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo:

Una expresión equivalente a $(a^3 + 8)$ es:

a) $(a + 2)(a^2 + 2a + 4)$ b) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$ c) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$ d) $(a + 2)^3$

Solución:

Se obtienen las raíces cúbicas de cada uno de los términos

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad ; \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

Por tanto,

$$a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 2^2) = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

3. Teorema del residuo y del factor

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ y el binomio $bx + c$, entonces:

a) $bx + c$ es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = 0$

b) $bx + c$ no es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = k$, con $k \neq 0$, donde k es el residuo del cociente de $f(x)$ con $bx + c$

así mismo, $-\frac{c}{b}$ resulta de resolver la ecuación $bx + c = 0$

Ejemplo 1

¿Cuál de los siguientes binomios es factor del polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$?

a) $x + 2$ b) $x - 1$ c) $x + 1$ d) $x - 2$

Solución:

Se aplica el teorema del residuo.

– Para $x + 2$, $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 = -8 + 12 - 6 + 1 = -14 + 13 = -1$, no es factor.

– Para $x - 1$, $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$, no es factor.

– Para $x + 1$, $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = -4 + 4 = 0$, si es factor.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

¿Cuál de los siguientes binomios es factor de $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$?

a) $3x + 2$ b) $2x - 1$ c) $2x + 1$ d) $3x - 2$

Solución:

Se evalúa el polinomio para cada uno de los binomios.

– Para $3x + 2$, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 2\left(-\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{10}{3} + 2 = -\frac{16}{27} + \frac{4}{9} + \frac{10}{3} + 2$

$$= \frac{-16 + 12 + 90 + 54}{27} = \frac{140}{27}$$

$3x - 2$, no es factor del polinomio.

– Para $2x - 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 2\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{2} + 2 = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{2 + 2 - 20 + 16}{8}$

$$= \frac{20 - 20}{8} = 0$$

$2x - 1$, es factor del polinomio, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El residuo que se obtiene de dividir el polinomio $x^4 + 3x^2 + 5x - 2$ por $x + 1$ es:

a) 3 b) 2 c) -2 d) -3

Solución:

Se evalúa el polinomio $x^4 + 3x^2 + 5x - 2$ en $x = -1$

$$(-1)^4 + 3(-1)^2 + 5(-1) - 2 = (1) + 3(1) - 5 - 2 = 1 + 3 - 5 - 2 = 4 - 7 = -3$$

El residuo es -3, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

4. Simplificación de fracciones algebraicas

Dada una fracción algebraica expresarla en su forma más simple.

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $\frac{3x^4y^3}{6x^2y}$ se obtiene:

a) $2x^2y^2$ b) $\frac{1}{2}x^2y^2$ c) $2x^2y^3$ d) $\frac{y^2}{2x^2}$

Solución:

Por tratarse de monomios, se simplifican los coeficientes y las bases iguales, aplicando la ley de los exponentes para la división:

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{x^4}{x^2}=x^2 \quad ; \quad \frac{y^3}{y}=y^2$$

Los resultados parciales se multiplican.

$$\frac{1}{2}\left(x^2\right)\left(y^2\right)=\frac{1}{2}x^2y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La simplificación de $\frac{12m^5n^6p}{4m^5n^8}$ es:

a) $\frac{3p}{n^2}$ b) $3n^2p$ c) $\frac{3n^2}{p}$ d) $3np^2$

Solución:

Se realizan las divisiones entre los coeficientes y las literales iguales:

$$\frac{12}{4}=3 \quad ; \quad \frac{m^5}{m^5}=1 \quad ; \quad \frac{n^6}{n^8}=\frac{1}{n^2}$$

Aquella literal que no se simplifique permanece en su lugar, por tanto:

$$3(1)\left(\frac{1}{n^2}\right)(p)=\frac{3p}{n^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al simplificar $\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}$, se obtiene:

a) $\frac{x+3}{x+5}$ b) $\frac{x-3}{x-5}$ c) $\frac{x+3}{x-5}$ d) $\frac{x-3}{x+5}$

Solución:

La fracción se conforma de dos polinomios, estos se factorizan de acuerdo a sus características, para realizar la simplificación:

$$x^2-9=(x+3)(x-3) \quad ; \quad x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$$

Por tanto:

$$\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+5)(x+3)}=\frac{x-3}{x+5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

5. Operaciones con fracciones algebraicas

Suma y resta

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ o $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ es:

a) $\frac{3}{ab}$ b) $\frac{3}{a+b}$ c) $\frac{2b+a}{ab}$ d) $\frac{2ab}{ab}$

Solución:

Para obtener el común denominador se multiplican los denominadores y se procede a realizar la suma de fracciones:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2(b)+1(a)}{ab}=\frac{2b+a}{ab}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado de $\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{3x^3}-\frac{3}{2x^2}$ es:

a) $\frac{x}{6x^2}$ b) $\frac{1}{6x^2}$ c) $\frac{1}{6x}$ d) $6x^2$

Solución:

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los coeficientes de los denominadores y toman las literales que se repiten de mayor exponente así como las que no se repiten.

El común denominador de x^2, $3x^3$ y $2x^2$ es: $6x^3$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{3x^3}-\frac{3}{2x^2}=\frac{(6x)(1)+2(2x)-(3x)(3)}{6x^3}=\frac{6x+4x-9x}{6x^3}=\frac{x}{6x^3}=\frac{1}{6x^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El resultado de $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+5}{x+3}$ es:

a) $\frac{x+13}{(x+2)(x+3)}$ b) $\frac{-4}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x+13}{(x-2)(x+3)}$ d) $\frac{-7}{(x-2)(x+3)}$

Solución:

Para obtener el común denominador se multiplican los denominadores y se procede a realizar la suma de fracciones:

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+5}{x+3}=\frac{(x+3)(x+1)-(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)}=\frac{x^2+x+3x+3-(x^2+5x-2x-10)}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+x+3x+3-x^2-5x+2x+10}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{x+13}{(x-2)(x+3)}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Multiplicación

Se aplica la siguiente propiedad: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$, el resultado se simplifica si es posible.

Ejemplo 1

El resultado de $\left(\frac{3x^2y^3}{4x^4y^2}\right)\left(\frac{8x}{y^2}\right)$ es:

a) $6xy$ b) $\frac{6y}{x}$ c) $\frac{6x}{y}$ d) $\frac{6}{xy}$

Solución:

Se realiza la multiplicación de numeradores y denominadores.

$$\left(\frac{3x^2y^3}{4x^4y^2}\right)\left(\frac{8x}{y^2}\right)=\frac{(3x^2y^3)(8x)}{(4x^4y^2)(y^2)}=\frac{24x^3y^3}{4x^4y^4}$$

La fracción resultante se simplifica a su forma más simple:

$$\frac{24x^3y^3}{4x^4y^4}=\frac{6}{xy}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado de $\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}\right)$ es:

a) $\frac{x+1}{x+2}$ b) $\frac{x+2}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x-3}$ d) $\frac{x-3}{x+3}$

Solución:

Las fracciones se conforman de polinomios, los cuales se factorizan para poder simplificar la operación:

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

Por tanto:

$$\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}\right)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-3)(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+1)(x-3)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a+b}\right)$ es:

a) $a+b$ b) $\frac{1}{a+b}$ c) $a-b$ d) $\frac{1}{a-b}$

Solución:

Se resuelve cada paréntesis:

$$a-\frac{b^2}{a}=\frac{a(a)-b^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a} \quad ; \quad 1-\frac{b}{a+b}=\frac{1(a+b)-b}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

Por tanto:

$$\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a(a+b)(a-b)}{a(a+b)}=a-b$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

- **División**

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, la fracción resultante se simplifica de ser posible.

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{6a^4b^3}{a^2} \div \frac{12ab^5}{b}$, es:

a) $\frac{b}{2a}$ b) $\frac{a}{2b}$ c) $\frac{2a}{b}$ d) $\frac{2b}{a}$

Solución:

$$\frac{6a^4b^3}{a^2} \div \frac{12ab^5}{b} = \frac{(6a^4b^3)(b)}{(a^2)(12ab^5)} = \frac{6a^4b^4}{12a^3b^5} = \frac{a}{2b}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El resultado de la división $\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{x+1}{x^2-2x-3}\right)$ es:

a) $\frac{x-3}{x+2}$ b) $\frac{x-3}{x-2}$ c) $\frac{x+2}{x+3}$ d) $\frac{x-2}{x-3}$

Solución:

La fracciones se componen de polinomios los cuales, se factorizan para simplificar la expresión:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \quad ; \quad x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Por tanto:

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{x+1}{x^2-2x-3}\right) = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \div \frac{x+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de la división $\left(x - \frac{9}{x}\right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ es:

a) $x(x - 3)$ b) $x + 3$ c) $x - 3$ d) $x(x + 3)$

Solución:

Se resuelven cada uno de los paréntesis:

$$x - \frac{9}{x} = \frac{x(x) - 9}{x} = \frac{x^2 - 9}{x} \quad ; \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x-3}{x^2}$$

Por tanto:

$$\left(x - \frac{9}{x}\right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{x^2-9}{x} \div \frac{x-3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{x} \div \frac{x-3}{x^2} = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = x(x + 3)$$

El resultado correcto corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. El desarrollo de $(x-5)^2$ es:

a) x^2-25 b) $x^2-10x+25$ c) x^2+25 d) $x^2-2x+25$

2. El resultado de desarrollar $(3-2m)^2$ es:

a) $9-4m^2$ b) $9+4m^2$ c) $9-6m+2m^2$ d) $9-12m+4m^2$

3. El desarrollo de $(5-m)(m+5)$ es:

a) $m^2-10m+25$ b) m^2-25 c) $25-m^2$ d) m^2+10m

4. Al desarrollar $\left(3n-\frac{1}{2}\right)^2$, se obtiene como resultado:

a) $9n^2-\frac{1}{4}$ b) $6n^2+\frac{1}{4}$ c) $9n^2-3n+\frac{1}{4}$ d) $9n^2-6n+\frac{1}{2}$

5. El resultado de $(-5x-1)(5x-1)$ es:

a) $1-25x^2$ b) $25x^2-10x+1$ c) $25x^2-1$ d) $1-5x+25x^2$

6. Al desarrollar $(y^2-7)^2$, se obtiene:

a) y^4-49 b) $y^2-14y+49$ c) y^4+49 d) y^4-14y^2+49

7. Una expresión equivalente de $\left(m-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}+m\right)$, es:

a) $m^2-\frac{1}{25}$ b) $\frac{1}{25}-m^2$ c) $m^2-\frac{2}{5}m+\frac{1}{10}$ d) $m^2-\frac{1}{10}m+\frac{1}{25}$

8. Al desarrollar $(2m-1)(2m+5)$ se obtiene:

a) $4m^2-5$ b) $4m^2+8m-5$ c) $4m^2+4m-5$ d) $4m^2+2m-5$

9. El resultado de $(3m^3+2n^2)(3m^3-2n^2)$, es:

a) $6m^9-4n^4$ b) $9m^6-12m^3n^2+4n^4$ c) $9n^4-4m^6$ d) $9m^6-4n^4$

10. Desarrollando $(x-11)(x-3)$, se obtiene:

a) x^2+33 b) $x^2-14x+33$ c) x^2-33 d) $x^2+14x-33$

11. Una expresión equivalente de $(3m+1)\left(3m-\frac{1}{3}\right)$, es:

a) $9m^2-\frac{1}{3}$ b) $9m^2-m-\frac{1}{3}$ c) $9m^2+2m-\frac{1}{3}$ d) $6m^2-\frac{1}{6}$

12. El desarrollo de $(2n-1)^3$, es:

a) $8n^3-12n^2+6n-1$ b) $8n^3-1$ c) $6n^3-1$ d) $8n^3+4n^2+2n+1$

13. El 4° termino de $(m^2-5)^4$, es:

a) $-500m^2$ b) $150m^4$ c) $500m^4$ d) $-125m^3$

14. Al desarrollar $(2 - x^2)^3$, se obtiene:

a) $8 - x^6$ b) $8 - 12x^2 + 6x^4 - x^6$ c) $8 - 4x^2 - 2x^4 - x^6$ d) $6 - x^5$

15. Al factorizar $30x^3 - 45x^2$, se obtiene:

a) $15x^2(2x - 3)$ b) $3x(10x^2 - 15)$ c) $5x^3(6x - 9)$ d) $15x(2x - 3)$

16. Al factorizar $w^2 + 64 - 16w$, se obtiene:

a) $(w - 4)^2$ b) $(w - 8)^2$ c) $(w + 4)(w - 4)$ d) $(w - 8)(w + 8)$

17. Una expresión equivalente a $6m - n - 3mn + 2$, es:

a) $(n - 2)(3m + 1)$ b) $(n - 2)(3m - 1)$ c) $(2 - m)(3n + 1)$ d) $(3m + 1)(2 - n)$

18. ¿Cuál debe ser el valor de "a", para que la expresión $36m^2 - am + 9$, sea un trinomio cuadrado perfecto?

a) -6 b) 9 c) 18 d) 36

19. Al factorizar la expresión $m^2 - 16m + 63$, se obtiene:

a) $(m - 9)(m + 7)$ b) $(m + 9)(m - 7)$ c) $(m - 9)(m - 7)$ d) $(m + 9)(m + 7)$

20. Una expresión equivalente de $4m^2 - \frac{1}{4}$, es:

a) $\frac{1}{4}(16m - 1)$ b) $\left(2m - \frac{1}{2}\right)\left(2m + \frac{1}{2}\right)$ c) $\left(2m + \frac{1}{2}\right)\left(2m + \frac{1}{2}\right)$ d) $\left(2m - \frac{1}{2}\right)\left(2m - \frac{1}{2}\right)$

21. Al factorizar $n^2 - 13n + 36$, se obtiene:

a) $(n - 6)^2$ b) $(n - 9)(n - 4)$ c) $(n - 9)(n + 4)$ d) $(n + 6)^2$

22. Una expresión equivalente de $p^2 + 24p + 144$, es:

a) $(p + 72)(p + 2)$ b) $(p + 36)(p + 4)$ c) $(p + 12)^2$ d) $(p + 18)(p + 8)$

23. Si se factoriza la expresión $12x^3 + 20x - 16x^2$, se obtiene:

a) $4x(3x^2 - 4x + 5)$ b) $2x(6x^2 + 10x - 8)$ c) $x(12x^2 - 20 + 16x)$ d) $2x(6x^2 + 8x - 10)$

24. Si se factoriza la expresión $4x^2 + 11x - 3$, se obtiene:

a) $(2x - 3)(2x + 1)$ b) $(4x - 1)(x + 3)$ c) $(2x + 3)(2x - 1)$ d) $(4x + 1)(x - 3)$

25. Una expresión equivalente de $m^6 - 27$, es:

a) $(m^2 - 3)(m^4 + 3m^2 + 9)$ b) $(m^3 - 9)(m^3 + 3)$ c) $(m^3 - 9)(m^3 - 3)$ d) $(m^2 + 3)(m^4 - 3m^2 + 9)$

26. Al factorizar la expresión $w^2 + xy - wy - xw$, se obtiene:

a) $(w + y)(w - x)$ b) $(w - x)(w - y)$ c) $(w + y)(w + x)$ d) $(w - y)(w + x)$

27. Si se factoriza el polinomio $12n^2 + 31n + 20$, se obtiene:

a) $(4n + 5)(3n + 4)$ b) $(3n + 2)(4n + 10)$ c) $(6n + 1)(2n + 20)$ d) $(3n + 5)(4n + 4)$

28. Si se $m^3 + 64$, se obtiene:

a) $(m^2 - 8)(m - 8)$ b) $(m + 4)(m^2 - 4m + 16)$ c) $(m + 4)^3$ d) $(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$

29. ¿Cuál de los siguientes binomios, es factor del polinomio $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

a) $x + 3$ b) $x - 2$ c) $x - 3$ d) $x + 4$

30. El residuo que se obtiene de dividir el polinomio $x^3 - 7x + 9$ por $x + 3$, es:

a) -3 b) 3 c) 2 d) 1

31. Dado el polinomio $f(x) = 2y^3 + y^2 - 7y - 6$, ¿cuál de los siguientes binomios es factor de él?

a) $2y + 1$ b) $y + 2$ c) $2y + 3$ d) $y - 1$

32. Si se simplifica la fracción $\frac{x^2 + 2x - 48}{x^2 - 36}$, se obtiene la expresión:

a) $\frac{x-6}{x+6}$ b) $\frac{x+8}{x+6}$ c) $\frac{x+6}{x-6}$ d) $\frac{x-8}{x-6}$

33. El residuo que se obtiene de dividir el polinomio $x^3 - 2x^2 - 33x + 88$ por $x - 5$, es:

a) -2 b) 2 c) 5 d) -6

34. Al simplificar la expresión $\frac{49m^3n^4}{63m^3n}$, se obtiene:

a) $\frac{7}{9n^3}$ b) $\frac{7n^3}{9}$ c) $\frac{49mn^2}{63}$ d) $\frac{9n^4}{7}$

35. Si se simplifica la fracción $\frac{2x^2 - 7x - 4}{2x^2 - 11x + 12}$, se obtiene:

a) $\frac{2x-1}{2x+3}$ b) $\frac{x-4}{2x-3}$ c) $\frac{2x+1}{x-4}$ d) $\frac{2x+1}{2x-3}$

36. El resultado de $\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 7x + 12}\right)\left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}\right)$, es:

a) $\frac{x-2}{x+4}$ b) $\frac{x+3}{x-2}$ c) $\frac{x+2}{x+4}$ d) $\frac{x-3}{x-4}$

37. Al realizar $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$, se obtiene:

a) $\frac{x}{x-1}$ b) $x - 1$ c) $\frac{x+1}{x}$ d) $\frac{1}{x-1}$

38. El resultado de $\frac{x+6}{x-1} + \frac{1-x}{x+3}$, es:

a) $\frac{2x^2 + 7x + 19}{(x-1)(x+3)}$ b) $\frac{11x + 17}{(x+3)(x-1)}$ c) $\frac{2x^2 - 5x - 17}{(x-3)(x+1)}$ d) $\frac{17 - 11x}{(x-3)(x+1)}$

39. Al realizar $\frac{2x}{x^2 - 9} - \frac{1}{x-3}$, se obtiene:

a) $\frac{1}{x+3}$ b) $\frac{2x+3}{x-3}$ c) $\frac{x}{x-3}$ d) $-\frac{1}{x+3}$

40. El resultado de $\left(\frac{x}{x^2 + 5x + 6}\right) \div \left(\frac{x^2 - 3x}{x+2}\right)$, es:

a) $x^2 - 9$ b) $\frac{1}{x^2 - 9}$ c) $\frac{x+2}{x-3}$ d) $\frac{x+2}{x+3}$

Lección 3

Ecuaciones

1. Despejes

Dada una fórmula o expresión algebraica, despejar una incógnita es representarla en términos de los demás elementos mediante operaciones inversas.

Ejemplo 1

Al despejar "h" de la fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, se obtiene:

a) $\frac{3\pi V}{r^2}$ b) $\frac{3V}{\pi r^2}$ c) $\frac{\pi r^2}{3V}$ d) $\frac{\pi V}{3r^2}$

Solución:

En el segundo miembro el término $\frac{\pi r^2}{3}$ se encuentra multiplicando a "h", por tanto, en el primer miembro efectuará una división, entonces

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{V}{\frac{\pi r^2}{3}} = h \quad \rightarrow \quad h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al despejar "a" de la fórmula $V_f^2 = V_o^2 + 2ad$, se obtiene:

a) $\frac{V_o^2 - V_f^2}{2d}$ b) $\frac{-V_f^2 - V_o^2}{2d}$ c) $\frac{V_f^2 - V_o^2}{2d}$ d) $\frac{V_f^2 + V_o^2}{2d}$

Solución:

Los elementos que no contengan "a" se transponen al primer miembro con signo contrario.

$$V_f^2 = V_o^2 + 2ad$$

$$V_f^2 - V_o^2 = 2ad$$

Por último, aquellos que la multiplican efectuarán una división en el primer miembro.

$$\frac{V_f^2 - V_o^2}{2d} = a$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Dada la fórmula $A = \pi r^2$, el despeje de "r" es:

a) $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ b) $\sqrt{\frac{\pi}{A}}$ c) $\sqrt{\pi A}$ d) $\frac{A}{\pi}$

Solución:

$$A = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = \frac{A}{\pi} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado es una igualdad entre dos expresiones que involucran constantes y una incógnita cuyo grado es 1 y está formada por dos miembros:

1er miembro = 2do miembro

Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se obtiene el valor de la incógnita que cumple con la igualdad dada.

a) Enteras

Ejemplo 1

El valor de "x" que cumple con la igualdad $6x - 7 = 3x + 2$ es:

a) $x = 1$ b) $x = -3$ c) $x = 3$ d) $x = -1$

Solución:

Se agrupan los términos que contienen a la incógnita en alguno de los miembros y los términos independientes en el otro miembro.

$$6x - 7 = 3x + 2 \quad \rightarrow \quad 6x - 3x = 2 + 7$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al resolver la ecuación $7 - 4x + 2x = 9 + 3x + 8$, el valor de "x" es:

a) $x = -1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$ d) $x = 1$

Solución:

$$7 - 4x + 2x = 9 + 3x + 8 \quad \rightarrow \quad -4x + 2x - 3x = 9 + 8 - 7$$
$$-5x = 10$$
$$x = \frac{10}{-5}$$
$$x = -2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

La solución de $4x - (3 + 5x) = 2(x - 1) + 1$ es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

Solución:

Se eliminan los signos de agrupación y se despeja la incógnita

$$4x - (3 + 5x) = 2(x - 1) + 1 \quad \rightarrow \quad 4x - 3 - 5x = 2x - 2 + 1$$
$$4x - 5x - 2x = -2 + 1 + 3$$
$$-3x = 2$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Fraccionarias

Ejemplo 1

El valor de "x" en $\frac{x}{4}+\frac{2}{3}=x-\frac{1}{6}$

a) $-\frac{10}{9}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{10}{9}$ d) $-\frac{9}{10}$

Solución:

Cada miembro de la igualdad se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\text{m.c.m}(4, 3, 6) = 12$$

$$\frac{x}{4}+\frac{2}{3}=x-\frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad (12)\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\right)=(12)\left(x-\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{12x}{4}+\frac{24}{3}=12x-\frac{12}{6}$$

Se convierte en una ecuación de primer grado entera.

$$3x + 8 = 12x - 2$$

$$3x - 12x = -2 - 8$$

$$-9x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-9} = \frac{10}{9}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{5}{2x}+3=\frac{6}{x}-2$ es:

a) $x=-\frac{7}{10}$ b) $x=\frac{10}{7}$ c) $x=-\frac{10}{7}$ d) $x=\frac{7}{10}$

Solución:

Se multiplica la ecuación por el mínimo común múltiplo.

$$\frac{5}{2x}+3=\frac{6}{x}-2 \quad \rightarrow \quad (2x)\left(\frac{5}{2x}+3\right)=(2x)\left(\frac{6}{x}-2\right)$$

$$\frac{10x}{2x}+6x=\frac{12x}{x}-4x$$

$$5 + 6x = 12 - 4x$$

$$6x + 4x = 12 - 5$$

$$10x = 7$$

$$x = \frac{7}{10}$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

c) Problemas que se resuelven planteando una ecuación de primer grado

Para resolver este tipo de problemas, se plantea transformando el enunciado a lenguaje algebraico obteniendo así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo 1

El modelo matemático que resuelve el problema: "La suma de dos números es 47, el mayor excede al menor en 7" es:

a) $x + (x - 7) = 47$ b) $x + (7 - x) = 47$ c) $x + (47 + x) = 7$ d) $x + (47 - x) = 7$

Solución:

Se establecen los números con una sola incógnita:

Número mayor: x Número menor: $x - 7$

Se plantea la ecuación que resuelva el problema

$$\text{Número mayor} + \text{Número menor} = 47$$

$$x + (x - 7) = 47$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Si tres números consecutivos suman 78, entonces el mayor de ellos es:

a) 28   b) 25   c) 26   d) 27

Solución:

Se establecen los números con una sola incógnita:

Número mayor: x Número intermedio: $x - 1$ Número menor: $x - 2$

Se plantea la ecuación que resuelva el problema

$$\text{mayor} + \text{intermedio} + \text{menor} = 78$$

$$x + (x - 1) + (x - 2) = 78$$

$$3x - 3 = 78$$

$$3x = 81$$

$$x = 27$$

El número mayor es $x = 27$, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Tábata tiene 13 años y Tania tiene 36 años. ¿Dentro de cuantos años, Tania tendrá el doble de años que Tábata? un posible planteamiento que resuelva el problema es:

a) $36 + x = 2(13 + x)$ b) $2(36 + x) = 13 + x$ c) $36 - x = 13 - 2x$ d) $36 - 2x = 13 + x$

Solución:

	Edad actual	Dentro de "x" años
Tabata	13	$13 + x$
Tania	36	$36 + x$

Se establece la ecuación que resuelva el problema:

$$\text{Edad de Tania} = 2(\text{Edad de Tábata})$$

$$36 + x = 2(13 + x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

3. Ecuaciones de 2do grado

Una ecuación de 2do grado tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$.

– Clasificación

$$\text{Ecuación de 2do grado}\begin{cases}\text{Completa} \quad ax^2+bx+c \\ \text{Incompleta}\begin{cases}\text{Mixta}: ax^2+bx=0,\ c=0 \\ \text{Pura}: ax^2+c=0,\ b=0\end{cases}\end{cases}$$

– Métodos de solución

- Fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Factorización.
- Completando trinomio cuadrado perfecto.

– Propiedades del discriminante de la fórmula general

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son imaginarias.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales.

Fórmula general

Ejemplo 1

Una solución de la ecuación $6x^2 + 11x - 10 = 0$ es:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

Solución:

Se identifican los valores de a, b y c en la ecuación y se sustituyen en la fórmula general:

$$a = 6,\ b = 11 \ \text{y}\ c = -10$$

Entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(6)(-10)}}{2(6)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+240}}{12} = \frac{-11 \pm \sqrt{361}}{12} = \frac{-11 \pm 19}{12}$$

Las raíces de la ecuación están dadas por:

$$x_1 = \frac{-11+19}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{-11-19}{12} = \frac{-30}{12} = -\frac{5}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Una solución de $3x^2 - 9x = 0$ es:

a) 3 b) -3 c) 6 d) -6

Solución:

Se determinan los valores de a, b y c

$$a = 3,\ b = -9 \ \text{ y } \ c = 0$$

Se sustituyen en la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(0)}}{2(3)} = \frac{9 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{9 \pm 9}{6}$$

Las raíces o soluciones están dadas por:

$$x_1 = \frac{9+9}{6} = \frac{18}{6} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{9-9}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

<u>Factorización y despeje</u>

Ejemplo 1

Las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ son:

a) $-5, 4$ b) $4, 5$ c) $-5, -4$ d) $-4, 5$

Solución:

Se factoriza el trinomio:

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)(x-4) = 0$$
$$x - 5 = 0,\ x - 4 = 0$$
$$x = 5,\ x = 4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una solución de la ecuación $3x^2 - 4x = 0$ es:

a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

Solución:

Se factoriza la expresión:

$$3x^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x(3x-4) = 0$$
$$x = 0,\ \ 3x - 4 = 0$$
$$x = 0,\ x = \frac{4}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Las soluciones de la ecuación $4x^2 - 9 = 0$

a) $\pm\frac{2}{3}$ b) $\pm\frac{3}{2}$ c) $\pm\frac{9}{4}$ d) $\pm\frac{5}{2}$

Solución:

La ecuación a resolver es cuadrática pura, por tanto, se despeja "x".

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$x = \pm\frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Completando trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo 1

Una de las soluciones de la ecuación $m^2 - 8m - 20 = 0$ es:

a) -10 b) 6 c) -2 d) 4

Solución:

Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$m^2 - 8m - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 8m = 20 \quad \rightarrow \quad m^2 - 8m + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$m^2 - 8m + 16 = 20 + 16$$

$$(m-4)^2 = 36$$

$$m - 4 = \pm\sqrt{36}$$

$$m - 4 = \pm 6$$

De esta expresión se obtienen las soluciones de la ecuación:

$$m - 4 = 6 \qquad ; \qquad m - 4 = -6$$

$$m = 6 + 4 \qquad\qquad m = -6 + 4$$

$$m = 10 \qquad\qquad m = -2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 + 6x + 5 = 0$ se obtiene:

a) $(x-3)^2 = 4$ b) $(x+6)^2 = 31$ c) $(x-6)^2 = 31$ d) $(x+3)^2 = 4$

Solución:

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x = -5 \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -5 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

$$(x+3)^2 = -5 + 9$$

$$(x+3)^2 = 4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Una expresión que permite encontrar las raíces de $x^2 + 3x - 10 = 0$ es:

a) $(x-5)(x+2) = 0$ b) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ d) $(x+10)(x-1) = 0$

Solución:

Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x = 10 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

– Dadas las raíces, hallar la ecuación

Si las raíces o soluciones de una ecuación de 2do grado son:

$$x_1 = a \ \ y \ \ x_2 = b$$

La ecuación es:

$$(x - a)(x - b) = 0 \qquad o \qquad x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

Ejemplo 1

La ecuación cuyas raíces son: $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x^2 + 7x + 10 = 0$ c) $x^2 - 7x - 10 = 0$ d) $x^2 + 7x - 10 = 0$

Solución:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - (2 + 5)x + (2)(5) = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La ecuación cuyas raíces son $x_1 = 3$ y $x_2 = -7$, es:

a) $(x + 3)(x - 7) = 0$ b) $(x + 3)(x + 7) = 0$ c) $(x - 3)(x - 7) = 0$ d) $(x - 3)(x + 7) = 0$

Solución:

$$(x - a)(x - b) = 0 \quad \rightarrow \quad (x - (3))(x - (-7)) = 0$$

$$(x - 3)(x + 7) = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La ecuación cuyas raíces son $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, es:

a) $6x^2 - x - 1 = 0$ b) $6x^2 + x + 1 = 0$ c) $6x^2 - x + 1 = 0$ d) $6x^2 + x - 1 = 0$

Solución:

La ecuación resulta de:

$$\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$$

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = 6(0)$$

$$6x^2 + 3x - 2x - 1 = 0$$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

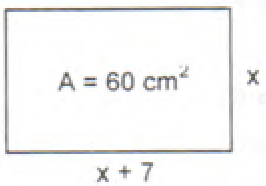
– Problemas que se resuelven con ecuaciones de 2do grado

Ejemplo 1

Un rectángulo tiene un área de 60 cm^2. Si el largo excede en 7 cm a su ancho, ¿cuál es la longitud del largo del rectángulo?

a) 5 cm b) 12 cm c) 10 cm d) 20 cm

Solución:



Planteamiento

$$\text{Área} = (\text{ancho})(\text{largo})$$

$$60 = x(x+7) \rightarrow 60 = x^2 + 7x$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$(x+12)(x-5) = 0$$

$$x = -12,\ x = 5$$

Se toma la cantidad positiva, entonces:

largo: $x + 7 = 5 + 7 = 12$ cm ; ancho: $x = 5$ cm

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

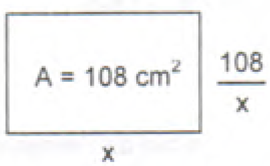
Ejemplo 2

Un rectángulo tiene un área de 108 cm^2, si el largo se disminuye en 6 cm y el ancho se aumenta en 9 cm el área no cambia. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?

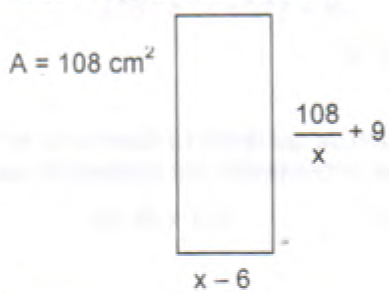
a) 2 x 54 cm b) 12 x 9 cm c) 6 x 18 cm d) 4 x 27 cm

Solución:

El rectángulo original es:



Si el largo se disminuye en 6 cm y el ancho se aumenta en 9 cm, el nuevo rectángulo tiene de área 108 cm^2:



Planteamiento:

$$\text{Área} = (\text{largo})(\text{ancho})$$

$$108 = (x-6)\left(\frac{108}{x} + 9\right)$$

$$108 = 108 + 9x - \frac{648}{x} - 54 \qquad \text{Multiplicando por "x",}$$

$$108x = 108x + 9x^2 - 648 - 54x \qquad \text{la cual se reduce a la ecuación:}$$

$$9x^2 - 54x - 648 = 0 \qquad \text{dividiendo por 9.}$$

$$x^2 - 6x - 72 = 0 \rightarrow (x-12)(x+6) = 0 \rightarrow x = 12,\ x = -6$$

Por tanto las dimensiones del nuevo rectángulo son:

largo: $\frac{108}{x} + 9 = \frac{108}{12} + 9 = 9 + 9 = 18$ cm ; ancho: $x - 6 = 12 - 6 = 6$ cm

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Álvaro excede en 3 años a María Elena y la suma de los cuadrados de sus edades es 65. ¿Qué edad tiene Álvaro?

a) 7 años   b) 4 años   c) 6 años   d) 3 años

Solución:

Se establecen las edades con una sola variable:

edad de Álvaro = x ; edad de María Elena = $x - 3$

Se plantea la ecuación que resuelva el problema:

$$x^2 + (x-3)^2 = 65 \quad \rightarrow \quad x^2 + x^2 - 6x + 9 = 65$$

$$2x^2 - 6x + 9 - 65 = 0$$

$$2x^2 - 6x - 56 = 0$$

$$\text{dividiendo por 2} \quad x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$(x-7)(x+4) = 0$$

$$x = 7, \; x = -4$$

La edad de Álvaro es: $x = 7$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

La edad de Herman excede en 11 años a la edad de Fernando, si la suma de los cuadrados de sus edades es 1573, un posible planteamiento que resuelva el problema es:

a) $(x+11)^2 - x^2 = 1573$ c) $(x-11)^2 - x^2 = 1573$

b) $(11-x)^2 + x^2 = 1573$ d) $(x+11)^2 + x^2 = 1573$

Solución:

Se establecen las edades con una sola incógnita

edad de Herman = $x + 11$ edad de Fernando = x

Se plantea la ecuación

$$(x+11)^2 + x^2 = 1573$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

Se tiene un cuadrado de área 196 cm^2, si uno de los lados se disminuye en 7 cm y el otro se aumenta en 14 cm, el área no se altera. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo resultante?

a) 14 x 14 cm   b) 2 x 98 cm   c) 7 x 28 cm   d) 4 x 49 cm

Solución:

Sea "x" el lado del cuadrado, entonces, si uno de los lados se disminuye en 7 cm y el otro se aumenta en 14 cm, el área es 196 cm^2.

$$(x-7)(x+14) = 196 \quad \rightarrow \quad x^2 + 7x - 98 = 196$$

$$x^2 + 7x - 98 - 196 = 0$$

$$x^2 + 7x - 294 = 0$$

$$(x+21)(x-14) = 0$$

$$x = -21, \; x = 14$$

Por tanto las dimensiones del rectángulo resultante son:

largo: $x + 14 = 14 + 14 = 28$ cm ; ancho: $x - 7 = 14 - 7 = 7$ cm

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejercicios

1. El valor de "x" que cumple con la igualdad $10x - 5 = 8x + 7$ es:

a) 6 b) -6 c) 10 d) -10

2. Al resolver la ecuación $12 - 3x + 4x = 9 + 10x + 8$, el valor de "x" es:

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $-\frac{9}{5}$ d) $-\frac{5}{9}$

3. La solución de $6x + (4 + 2x) = 2x - (7x - 4) + 5$ es:

a) $x = \frac{3}{5}$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{13}$ d) $x = \frac{2}{3}$

4. El valor de "x" en $\frac{x}{4} + \frac{2}{5} = \frac{x}{2} - 1$

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{28}{5}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{8}$

5. El valor de "x" que cumple con la ecuación $3 + \frac{2}{3x} = \frac{6}{x}$ es:

a) $\frac{9}{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{5}{6}$

6. Al resolver la siguiente ecuación $x - 8 = 4x + 10$ se obtiene:

a) $x = 6$ b) $x = 3$ c) $x = -3$ d) $x = -6$

7. Al resolver la ecuación $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} - \frac{x}{2}$ se obtiene:

a) $x = 13$ b) -13 c) $x = 12$ d) -12

8. Al resolver la ecuación $\frac{1}{x} - \frac{5}{2} = \frac{4}{x}$ para $x \neq 0$ se obtiene:

a) $x = \frac{6}{5}$ b) $x = -\frac{6}{5}$ c) $x = -\frac{5}{6}$ d) $x = \frac{5}{6}$

9. El valor de "x" que cumple con la igualdad $12x - 8 + 2x = 20x - 10$ es:

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 3 d) -3

10. Al resolver la ecuación $2y - 3 + 5y = 9y + 1 + 8y$, el valor de "y" es:

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $-\frac{5}{2}$

11. La solución de $3(x - 4) - 2(3x - 6) = 2x - (7x - 1)$ es:

a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) -2

12. El valor de "z" en $\frac{2}{z-1}+\frac{2}{5}=\frac{4}{z-1}$

a) 6 b) –3 c) 6 d) –6

13. El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{1}{3-x}=2-\frac{5}{3-x}$ es:

a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 0 d) 3

14. Al resolver la siguiente ecuación $10x - 8 = 4x + 10$ se obtiene:

a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = 3$ c) $x = -\frac{1}{3}$ d) $x = -3$

15. Al resolver la ecuación $2+\frac{3}{x+2}=\frac{2}{3}-\frac{4}{x+2}$ se obtiene:

a) $x = \frac{29}{4}$ b) $-\frac{29}{4}$ c) $x = \frac{4}{29}$ d) $x = -\frac{4}{29}$

16. Al resolver la ecuación $\frac{1}{3x}-\frac{5}{2}=\frac{7}{2x}-\frac{2}{3}$ para $x \neq 0$ se obtiene:

a) $x = \frac{19}{11}$ b) $x = -\frac{11}{19}$ c) $x = \frac{11}{9}$ d) $x = -\frac{19}{11}$

17. El valor de "z" en $\frac{4}{z+3}=4-\frac{1}{z+3}$

a) $-\frac{4}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $-\frac{7}{4}$ d) $\frac{7}{4}$

18. El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{3}{x+5}-10=\frac{2}{x+5}$ es:

a) $-\frac{49}{10}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{3}{10}$

19. Al resolver la siguiente ecuación $4(x - 2) = 6(x - 2) + 10$ se obtiene:

a) $x = 3$ b) -3 c) 6 d) -6

20. Al resolver la ecuación $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{3}$ se obtiene:

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{2}{19}$ d) $\frac{1}{19}$

21. Al resolver la ecuación $\frac{3}{4x}-\frac{1}{20}-\frac{2}{5x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4x}$ para $x \neq 0$ se obtiene:

a) $x = \frac{31}{12}$ b) $x = -\frac{31}{12}$ c) $x = -\frac{12}{31}$ d) $x = \frac{12}{31}$

22. La suma de tres números enteros consecutivos, es igual a 66. ¿Cuál es el número mayor?

a) 23 b) 13 c) 43 d) 33

23. La suma de dos números es 8, si el mayor es el triple del número menor. ¿Cuál es el mayor?

a) 8 b) -6 c) 4 d) 6

24. Manuel tiene el doble de la edad de Fabián, si dentro de doce años Fabián tendrá nueve años menos que Manuel. ¿Cuántos años tiene Manuel?

a) 9 b) 8 c) 16 d) 18

25. El modelo matemático que resuelve el problema " La suma de dos números es 25, si el mayor supera en cuatro al doble del menor, hallar los números si "x" es el número mayor".

a) $x = 2(25 - x) - 4$ b) $25 - x = x + 4$ c) $x = 2(25 - x) + 4$ d) $x - 4 = 25 + x$

26. Una solución de la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$ es:

a) -5 b) 5 c) -2 d) -4

27. Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 - 5x + 6 = 0$ se obtiene:

a) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ b) $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ c) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{25}$ d) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{25}$

28. Al resolver la ecuación $3x^2 - x = 2$ se obtiene:

a) $x = 3, x = -2$ b) $x = -1, x = \frac{2}{3}$ c) $x = -2, x = -3$ d) $x = 1, x = -\frac{2}{3}$

29. Las raíces de la ecuación $x^2 - 16 = 0$ son:

a) -16 y 16 b) -4 y 4 c) -8 y 8 d) $-4i$ y $4i$

30. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $y^3 + 5y^2 - 6y = 0$?

a) $0, 5, -6$ b) $0, -5, 6$ c) $0, 1, 6$ d) $0, 1, -6$

31. La ecuación cuyas raíces son: $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$

a) $x^2 + 5x - 4 = 0$ b) $x^2 - 5x - 4 = 0$ c) $x^2 - 5x + 4 = 0$ d) $x^2 + 5x + 4 = 0$

32. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, es:

a) $8x^2 - 10x - 3 = 0$ b) $8x^2 + 10x + 3 = 0$ c) $8x^2 + 10x - 3 = 0$ d) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

33. Una solución de la ecuación $5x^2 + 21x + 4 = 0$ es:

a) 4 b) 5 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{5}$

34. Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 = -10x - 16$ se obtiene:

a) $(x + 5)^2 = 9$ b) $(x - 5)^2 = 9$ c) $(x - 13)^2 = 36$ d) $(x + 13)^2 = 36$

35. Al resolver la ecuación $6x^2 - 7x = 3$ se obtiene:

a) $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{3}$ c) $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$ d) $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{3}$

36. Las raíces de la ecuación $16x^2 - 25 = 0$ son:

a) -5 y 5 b) -4 y 4 c) $-\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{4}$ d) $-\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{5}$

37. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^3 + 9x^2 + 14x = 0$?

a) $x = 0, x = 7, x = 2$ b) $x = 0, x = -7, x = -2$ c) $x = 0, x = 7, x = -2$ d) $x = 0, x = 7, x = -2$

38. La ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = -7$

a) $x^2 - 11x - 28 = 0$ b) $x^2 + 11x + 28 = 0$ c) $x^2 - 11x + 28 = 0$ d) $x^2 + 11x - 28 = 0$

39. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, es:

a) $10x^2 - 3x - 4 = 0$ b) $10x^2 - 3x + 4 = 0$ c) $10x^2 + 3x + 4 = 0$ d) $10x^2 + 3x - 4 = 0$

40. Una solución de la ecuación $6x^2 + x - 2 = 0$ es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

41. Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 - x - 20 = 0$ se obtiene:

a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$ b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$ c) $(x-1)^2 = 20$ d) $(x+1)^2 = 20$

42. Al resolver la ecuación $8x^2 - 2x = 3$ se obtiene:

a) $x = \frac{3}{4}$ y $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{3}{4}$ y $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = -\frac{3}{4}$ y $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = -\frac{3}{4}$ y $x = \frac{1}{2}$

43. Las raíces de la ecuación $5x^2 - 10x = 0$ son:

a) 0, 2 b) 5, – 10 c) 5, 10 d) 2, – 2

44. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $y^3 - 11y^2 + 18y = 0$?

a) 0, – 9, – 2 b) 0, – 9, 2 c) 0, 9, – 2 d) 0, 9, 2

45. La ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 3$

a) $(x-4)(x+3) = 0$ b) $(x+4)(x-3) = 0$ c) $(x+4)(x+3) = 0$ d) $(x-4)(x-3) = 0$

46. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 2$, es:

a) $4x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $4x^2 + 5x + 6 = 0$ c) $4x^2 - 5x - 6 = 0$ d) $4x^2 + 5x - 6 = 0$

47. Una solución de la ecuación $3x^2 + 10x - 8 = 0$ es:

a) $x = 4$ b) $x = 8$ c) $x = -4$ d) $x = -8$

48. Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 + 4x - 12 = 0$ se obtiene:

a) $(x-12)^2 = 4$ b) $(x-4)^2 = 16$ c) $(x+12)^2 = 4$ d) $(x+2)^2 = 16$

49. Al resolver la ecuación $10x^2 - 23x = 5$ se obtiene:

a) $x = \frac{5}{2}, x = \frac{1}{5}$ b) $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{5}$ c) $x = -\frac{5}{2}, x = \frac{1}{5}$ d) $x = -\frac{5}{2}, x = -\frac{1}{5}$

50. Las raíces de la ecuación $4x^2 - 81 = 0$ son:

a) – 9, 9 b) –4, 4 c) $-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}$ d) $-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}$

51. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 - 24x = 0$?

a) $x = 0, x = 6, x = 4$ b) $x = 0, x = -6, x = -4$ c) $x = 0, x = -6, x = 4$ d) $x = 0, x = 6, x = -4$

52. La ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -6$ y $x_2 = 8$

a) $(x-6)(x+8) = 0$ b) $(x-6)(x-8) = 0$ c) $(x+6)(x-8) = 0$ d) $(x-6)(x-8) = 0$

53. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, es:

a) $15x^2 + 23x - 4 = 0$ b) $15x^2 - 23x + 4 = 0$ c) $15x^2 - 23x + 4 = 0$ d) $15x^2 + 23x + 4 = 0$

54. Una solución de la ecuación $x^2 + 11x + 10 = 0$ es:

a) -10 b) 10 c) 11 d) -11

55. Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 - 4x - 32 = 0$ se obtiene:

a) $(x-2)^2 = 36$ b) $(x+2)^2 = 36$ c) $(x-36)^2 = 4$ d) $(x+36)^2 = 4$

56. Al resolver la ecuación $x^2 - x = 0$ se obtiene:

a) $x = 1, x = 0$ b) $x = -1, x = 0$ c) $x = 2, x = 0$ d) $x = -2, x = 0$

57. Las raíces de la ecuación $3x^2 - 48 = 0$ son:

a) $x = -48, x = 48$ b) $x = 3, x = -3$ c) $x = 16, x = -16$ d) $x = 4, x = -4$

58. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^3 - x^2 - 20x = 0$?

a) $x = 0, x = -5, x = 4$ b) $x = 0, x = -5, x = -4$ c) $x = 0, x = 5, x = 4$ d) $x = 0, x = 5, x = -4$

59. La ecuación cuyas raíces son: $x_1 = 10$ y $x_2 = -9$

a) $(x-10)(x+9) = 0$ b) $(x-10)(x-9) = 0$ c) $(x+10)(x-9) = 0$ d) $(x+10)(x+9) = 0$

60. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 4$, es:

a) $6x^2 - 25x - 4 = 0$ b) $6x^2 - 25x + 4 = 0$ c) $6x^2 + 25x + 4 = 0$ d) $6x^2 + 25x - 4 = 0$

61. Una solución de la ecuación $6x^2 - 5x + 1 = 0$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 2 d) $-\frac{1}{2}$

62. Al completar el trinomio cuadrado perfecto en $x^2 - 12x + 20 = 0$ se obtiene:

a) $(x+6)^2 = 16$ b) $(x-12)^2 = 20$ c) $(x+12)^2 = 20$ d) $(x-6)^2 = 16$

63. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $y^3 + y^2 - 42y = 0$?

a) $y = 0, y = 7, y = 6$ b) $y = 0, y = -7, y = -6$ c) $y = 0, y = -7, y = 6$ d) $y = 0, y = 7, y = -6$

64. La suma de dos números es 7 y la de sus cuadrados es 29. ¿Cuál es el número mayor?

a) 5 b) 7 c) 29 d) 25

65. El largo de un rectángulo mide el doble que su ancho. Si se aumentan dos metros a cada lado el área aumenta en 34 m^2. ¿Cuánto mide el largo?

a) 7 b) 10 c) 12 d) 5

66. El ancho de un rectángulo mide diez unidades menos que su largo. Si su área es de 96 unidades cuadradas. ¿Cuánto mide el ancho?

a) 16 b) 10 c) 6 d) 8

67. ¿Cuánto mide el lado de una cuadrado si su área es de 18 m^2?

a) 9 m b) 18 m c) $\sqrt{2}$ m d) $3\sqrt{2}$ m

68. Si se aumentan 4 metros a los lados de un cuadrado el área aumenta en 80 m^2. ¿Cuál es el modelo matemático para encontrar la medida de lado del cuadrado?

a) $(x+4)^2 + x^2 = 80$ b) $(x-4)^2 - x^2 = 80$ c) $(x+4)^2 - x^2 = 80$ d) $(x-4)^2 + x^2 = 80$

Lección 4

Desigualdades

1. Desigualdades de primer grado en una variable y sus propiedades

– Desigualdad

Determina el orden de dos cantidades diferentes y los símbolos que utiliza son: $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$.

Ejemplos:

1) $4 < 6$, se lee "cuatro es menor que seis".

2) $-3 > -5$, se lee "menos tres es mayor que menos cinco".

3) $x \leq 2$, se lee "x es menor o igual a dos".

4) $-6 \leq x$, se lee "x es mayor o igual a menos 6".

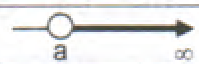
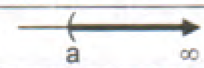
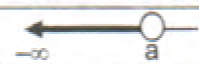
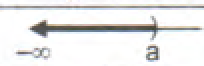
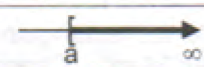
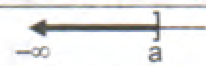
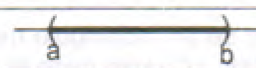
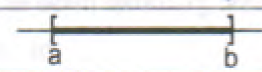
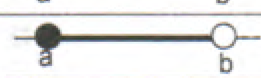
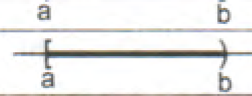
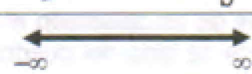
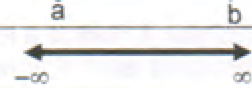
5) $3 < x < 7$, se lee "x es mayor que tres y menor que 7".

a) Propiedades de las desigualdades

Sean $a, b, c \in R$

1) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2) Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.
3) Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
4) Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

b) Tabla de desigualdades

Desigualdad	Intervalo	Gráfica 1	Gráfica 2
$x > a$	(a, ∞)		
$x < a$	$(-\infty, a)$		
$x \geq a$	$[a, \infty)$		
$x \leq a$	$(-\infty, a]$		
$a < x < b$	(a, b)		
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$		
$a < x \leq b$	$(a, b]$		
$a \leq x < b$	$[a, b)$		
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$		

Nota: (a, b) se le llama intervalo abierto y $[a, b]$ intervalo cerrado.

– Desigualdades de primer grado en una variable

El conjunto solución de una desigualdad, son los valores para los cuales se cumple la desigualdad, este se representa como una desigualdad, un intervalo o una gráfica.

Ejemplo 1

El conjunto solución de $3x - 4 \geq 8$ es:

Solución:

Se despeja la variable "x".

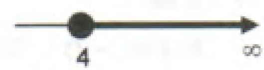
$$3x - 4 \geq 8 \quad \rightarrow \quad 3x \geq 8 + 4 \quad \rightarrow \quad 3x \geq 12$$

$$x \geq \frac{12}{3}$$

$$x \geq 4$$

Por tanto, el conjunto solución queda representado de las siguientes maneras:

$x \geq 4$; $x \in [4, \infty)$;



Ejemplo 2

El conjunto solución de $3x + 5 > 2x + 7$ es:

a) $x > 2$ b) $x < 2$ c) $x < -2$ d) $x > -2$

Solución

Se despeja la variable "x" tomando en cuenta las propiedades de las desigualdades:

$$3x + 5 > 2x + 7 \quad \rightarrow \quad 3x - 2x > 7 - 5$$

$$x > 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El intervalo solución de $\frac{x-1}{2} < \frac{3x+4}{3}$ es:

a) $\left(-\frac{11}{3}, \infty\right)$ b) $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$ c) $\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right)$ d) $\left[-\frac{11}{3}, \infty\right)$

Solución:

Se multiplica por el mínimo común múltiplo para eliminar denominadores:

$$6\left(\frac{x-1}{2}\right) < 6\left(\frac{3x+4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad 3(x-1) < 2(3x+4) \quad \rightarrow \quad 3x - 3 < 6x + 8$$

$$3x - 6x < 8 + 3$$

$$-3x < 11$$

Si se multiplica o divide por un número negativo el sentido de la desigualdad cambia.

$$x > \frac{11}{-3}$$

Por tanto, el intervalo solución es: $\left(-\frac{11}{3}, \infty\right)$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

Un modelo matemático que satisface el siguiente enunciado: "A lo más tengo \$ 300"

a) $x < 300$ b) $x \leq 300$ c) $x \geq 300$ d) $x > 300$

Solución:

" A lo más", representa que la máxima cantidad de dinero que se tiene es trescientos, pero se puede tener menos, entonces la expresión es $x \leq 300$, la respuesta correcta corresponde al inciso"b".

2. Desigualdades de segundo grado en una variable

Sean x_1, x_2 las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, con a positivo y $x_1 < x_2$, entonces,

	Solución: Intervalo	Desigualdad
1) Si $ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$	$x < x_1$ ó $x > x_2$
2) Si $ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	$x_1 < x < x_2$
3) Si $ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$	$x \leq x_1$ ó $x \geq x_2$
4) Si $ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1, x_2]$	$x_1 \leq x \leq x_2$

Ejemplo 1

El conjunto solución de $x^2 - 4 > 0$ es:

a) $(-\infty, -2] \cup [2,\infty)$ b) $(-\infty, -2) \cup (2,\infty)$ c) $(-2, 2)$ d) $[-2, 2]$

Solución:

Se obtienen las raíces de $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

La desigualdad $x^2 - 4 > 0$ tiene la forma 1), por tanto, el conjunto solución es:

$$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \quad \rightarrow \quad (-\infty, -2) \cup (2,\infty)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El conjunto solución de $x^2 + 11x \leq 12$ es:

a) $(-\infty, -12] \cup [1, \infty)$ b) $(-12, 1)$ c) $(-\infty, -12) \cup (1, \infty)$ d) $[-12, 1]$

Solución:

La desigualdad es equivalente a $x^2 + 11x - 12 \leq 0$, se obtienen las raíces de $x^2 + 11x - 12 = 0$

$$x^2 + 11x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad (x + 12)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -12,\ x_2 = 1$$

La desigualdad $x^2 + 11x \leq 12$ tiene la forma 4), por tanto, el conjunto solución es:

$$[-12, 1]$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El conjunto solución de $9 - x^2 \geq 0$ es:

a) $-3 \leq x$ b) $3 \leq x \leq -3$ c) $-3 \leq x \leq 3$ d) $x \leq 3$

Solución:

Se multiplica por (-1) la desigualdad para transformar el término cuadrático en positivo y aplicar las soluciones de una desigualdad cuadrática, entonces,

$$x^2 - 9 \leq 0$$

Se obtienen las soluciones de $x^2 - 9 = 0$, que son $x = -3$ y $x = 3$, por tanto el conjunto solución es:

$$-3 \leq x \leq 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejercicios

1. El conjunto solución de $10x - 8 > 12x - 2$ es:

a) $x < -3$ b) $x > -3$ c) $x < 3$ d) $x > 3$

2. El intervalo solución de $8x - 3 + 4x < 6x + 21$ es:

a) $(-\infty, 4]$ b) $(-\infty, 4)$ c) $(4, \infty)$ d) $[4, \infty)$

3. El intervalo que satisface a $\frac{2x}{3} - \frac{5}{2} > \frac{3x}{2} - \frac{7}{3}$ es:

a) $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right]$ b) $\left[-\infty, -\frac{1}{5}\right)$ c) $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$ d) $\left[-\infty, -\frac{1}{5}\right]$

4. El conjunto solución de $3x - 10 + 6x \geq 12x + 8$ es:

a) $x \geq -6$ b) $x \leq -6$ c) $x \leq 6$ d) $x \geq 6$

5. El intervalo solución de $\frac{2x}{5} - \frac{7}{4} \leq \frac{x}{4} - \frac{3}{5}$ es:

a) $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$ b) $\left[\frac{23}{3}, \infty\right)$ c) $\left[\frac{23}{3}, \infty\right]$ d) $\left(\infty, \frac{23}{3}\right)$

6. El intervalo solución de $\frac{2x-4}{4} - \frac{1}{2} \leq \frac{3x-5}{2}$ es:

a) $(-\infty, 1]$ b) $[1, 1]$ c) $[1, \infty)$ d) $(1, \infty)$

7. El intervalo solución de $\frac{x}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5x}{3} \geq \frac{x}{6} + \frac{7}{12}$ es:

a) $\left(-\frac{16}{19}, \infty\right)$ b) $\left(-\infty, -\frac{16}{19}\right)$ c) $\left[\frac{16}{19}, \infty\right)$ d) $\left(-\infty, -\frac{16}{19}\right]$

8. El intervalo que satisface $7x - 8 - 9x > 2x - 4 + x$ es:

a) $\left(\frac{4}{5}, \infty\right)$ b) $\left(-\frac{4}{5}, \infty\right)$ c) $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$ d) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right)$

9. El conjunto solución de $x - 7 + 2x \leq 10x - 8$ es:

a) $x \leq -\frac{1}{7}$ b) $x \leq \frac{1}{7}$ c) $x \geq -\frac{1}{7}$ d) $x \geq \frac{1}{7}$

10. El conjunto solución de $\frac{2x}{3} - \frac{7}{2} > \frac{x}{3} - \frac{3}{2}$ es:

a) $(-6, \infty)$ b) $[-6, \infty)$ c) $(6, \infty)$ d) $[-\infty, 6)$

11. El intervalo que satisface $x^2 - 5x - 6 > 0$ es:

a) $(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$ b) $(-\infty, 6) \cup (1, \infty)$ c) $(-1, 6)$ d) $(6, -1)$

12. El intervalo solución de $3x^2 - x - 2 \leq 0$ es:

a) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, \infty)$ b) $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$ c) $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ d) $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$

13. El intervalo que satisface a $x^2 - 36 \geq 0$ es:

a) $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$ b) $(-\infty, -6] \cup [6, \infty)$ c) $(-6, 6)$ d) $[-6, 6]$

14. El intervalo solución de $x^2 + 5x < 0$ es:

a) $(0, 5]$ b) $(5, 0]$ c) $[-5, 0]$ d) $(-5, 0)$

15. El intervalo solución de $x^2 + x - 12 \leq 0$ es:

a) $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ b) $(-\infty, -4] \cup [3, \infty)$ c) $[-4, 3]$ d) $(-4, 3)$

16. La expresión matemática que representa la frase " A lo mas tengo 100" es:

a) $x < 100$ b) $x \leq 100$ c) $x > 100$ d) $x \geq 100$

17. La expresión matemática que representa la frase " Al menos tengo 200" es:

a) $x > 200$ b) $x < 200$ c) $x \geq 200$ d) $x \leq 200$

18. La expresión matemática que representa la frase " A lo mas tengo 18" es:

a) $x > 18$ b) $x \geq 18$ c) $x < 18$ d) $x \leq 18$

19. El intervalo solución de $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ es:

a) $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$ b) $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$ c) $[2, 5]$ d) $(2, 5)$

20. El intervalo solución de $x^2 + 6x < 0$ es:

a) $(-\infty, 0)$ b) $(-6, 0)$ c) $(0, 6)$ d) $(6, \infty)$

21. El conjunto solución de $x^2 - 16 \geq 0$ es:

a) $x \leq -4$ o $x \geq 4$ b) $-4 \leq x \leq 4$ c) $-4 < x < 4$ d) $x > 4$ y $x < -4$

22. La expresión matemática que representa la frase "Cuando mucho tengo \$ 600" es:

a) $x > 600$ b) $x < 600$ c) $x \leq 600$ d) $x \geq 600$

23. La expresión matemática que representa la frase "la temperatura está entre 20° C y 30° C" es:

a) $x > 30$ b) $x < 20$ c) $10 < x < 20$ d) $20 < x < 30$

Lección 5

Sistemas de ecuaciones

1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$$

La solución de este sistema es el punto P(x, y) que satisface ambas ecuaciones.

– Soluciones en un sistema de ecuaciones de 2 x 2

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden obtener los siguientes resultados:

a) Una solución, la cual representa el punto de intersección de las rectas y se dice que las rectas son oblicuas y compatibles.

Ejemplo:

La solución del sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ x + y = 9 \end{cases}$ es el punto (4, 5) ya que al sustituirlo en ambas ecuaciones se cumplen las igualdades:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ 2(4) + 3(5) &= 23 \\ 8 + 15 &= 23 \\ 23 &= 23 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 9 \\ 4 + 5 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

b) Soluciones infinitas, si las ecuaciones son equivalentes, esto es, representan la misma recta. A este tipo de ecuaciones se les conoce también como rectas coincidentes.

Ejemplo:

En el sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$ las ecuaciones representan la misma recta, si al multiplicar o dividir una ecuación por un número k se obtiene la otra ecuación, en este caso se comprueba, dividiendo la segunda ecuación por 2,

$$\frac{4x + 2y}{2} = \frac{6}{2} \qquad \rightarrow \qquad 2x + y = 3$$

Por tanto, tiene soluciones infinitas.

c) No hay solución, si las rectas son paralelas, esto es, las rectas nunca se cortan y se dice que son incompatibles, si y solo si:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = k \ \text{ y } \ \frac{C}{C'} \neq k$$

Ejemplo:

El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -6x - 8y = 4 \end{cases}$ se conforma de dos rectas paralelas, porque los coeficientes tanto de "x" como de "y" son proporcionales, esto es:

$$\frac{3}{-6} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, no existe solución.

a) Métodos de solución

– Regla de Cramer o determinantes

Un determinante de 2 x 2 se representa como un arreglo de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Dado un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$$

Se resuelve por determinantes o regla de Cramer, donde los valores de las incógnitas están dados por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \frac{CB' - C'B}{AB' - A'B} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}$$

Donde $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ representa el determinante del sistema.

Ejemplo 1

La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$ está dado por:

a) $x = 1,\ y = 1$ b) $x = 1,\ y = -2$ c) $x = -2,\ y = 1$ d) $x = 2,\ y = -1$

Solución:

Se sustituyen ~~en la regla~~ los coeficientes de las variables y los términos independientes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(7)(1) - (3)(-2)}{(3)(1) - (5)(-2)} = \frac{7 + 6}{3 + 10} = \frac{13}{13} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(3) - (5)(7)}{(3)(1) - (5)(-2)} = \frac{9 - 35}{3 + 10} = \frac{-26}{13} = -2$$

La respuesta correcta correctamente al inciso "b".

Ejemplo 2

El valor de "y" en el sistema $\begin{cases} 7x + 2y = -9 \\ x - y = 0 \end{cases}$

a) 2 b) 1 c) 0 d) –1

Solución:

Se emplea la regla de Cramer para "y".

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(7)(0) - (1)(-9)}{(7)(-1) - (1)(2)} = \frac{0 + 9}{-7 - 2} = \frac{9}{-9} = -1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

En el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ el valor de "x" es:

a) $\dfrac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$ b) $\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$ c) $\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$ d) $\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$

Solución:

Se aplica la regla de Cramer para "x".

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

– **Reducción (Suma y resta)**

Este método consiste en eliminar una de las incógnitas al sumar las dos ecuaciones y obtener una ecuación de primer grado.

Ejemplo 1

La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ x + y = -1 \end{cases}$ está dada por:

a) $x = 2,\ y = -1$ b) $x = 2,\ y = 1$ c) $x = -2,\ y = 1$ d) $x = -2,\ y = -1$

Solución:

Se elige la incógnita a eliminar, en este caso "y", la primera ecuación se multiplica por 1 y la segunda ecuación se multiplica por 2:

$$\begin{array}{l} 1(3x - 2y = -8) \\ 2(\ x + \ y = -1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x - 2y = -8 \\ \underline{2x + 2y = -2} \\ 5x \qquad = -10 \end{array}$$

$$x = \frac{-10}{5}$$

$$x = -2$$

El valor de "x = – 2" se evalúa en cualquiera de las ecuaciones y se despeja la otra incógnita:

$$x + y = -1 \qquad \rightarrow \qquad -2 + y = -1 \qquad \rightarrow \qquad y = -1 + 2 = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

En el sistema $\begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ el valor de "x" es:

a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

Solución:

Para determinar el valor de "x" se elimina la variable "y", entonces:

$$\begin{array}{l} -2(5x + 2y = 23) \\ \ \ 1(3x + 4y = 25) \end{array} \qquad \begin{array}{l} -10x - 4y = -46 \\ \underline{\ \ \ 3x + 4y = \ \ 25} \\ -7x \qquad = -21 \end{array}$$

$$x = \frac{-21}{-7}$$

$$x = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El valor de "y" en el sistema $\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = x + 7 \end{cases}$ es:

a) 1 b) – 1 c) – 8 d) 8

Solución:

Un sistema equivalente es $\begin{cases} -5x + y = 3 \\ -x + y = 7 \end{cases}$, para determinar el valor de "y" se elimina "x".

$$1(-5x + y = 3)$$
$$-5(-x + y = 7)$$

$$\begin{array}{r} -5x + y = 3 \\ \underline{5x - 5y = -35} \\ -4y = -32 \\ y = \dfrac{-32}{-4} \\ y = 8 \end{array}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

Una característica del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$ es:

a) Se cortan en el punto (1, 1).

b) Son rectas coincidentes.

c) Son rectas paralelas.

d) Son rectas oblicuas.

Solución:

Se comprueban los incisos para el sistema.

a) Si se cortan en el punto (1, 1), este satisface ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} x + 3y = 4 \\ 1 + 3(1) = 4 \\ 1 + 3 = 4 \\ 4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x + 6y = 5 \\ 2(1) + 6(1) = 5 \\ 2 + 6 = 5 \\ 8 \neq 5 \end{array}$$

No se cumple la condición.

b) Dos rectas son coincidentes si al multiplicar o dividir por un número una de las ecuaciones se obtiene la otra

El sistema es $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$, se elige la ecuación $x + 3y = 4$, la cual se multiplica por 2.

$$2(x + 3y = 4) \quad \rightarrow \quad 2x + 6y = 8$$

Sólo coinciden los coeficientes en "x" y "y", por tanto, no se cumpla la condición.

c) Dos rectas son, paralelas si al dividir los coeficientes de "x" y los coeficientes de "y" se obtiene el mismo número, si y solo si, es diferente de la división de los términos independientes.

El sistema es $\begin{matrix} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 5 \end{matrix}$ por tanto: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ se cumple la condición y además es diferente de $\frac{4}{5}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

b) Problemas de aplicación

Ejemplo 1

Los números que cumplen con la oración: "La suma de dos números es 55 y su diferencia es 15", son:

a) 30 y 25 b) 40 y 15 c) 35 y 20 d) 10 y 45

Solución:

Los números se representan por "x" y "y", el planteamiento es:

$$\begin{array}{l} x + y = 55 \\ \underline{x - y = 15} \end{array}$$

Se aplica cualquier método para la resolución, en este caso suma y resta:

$$\begin{array}{l} x + y = 55 \\ \underline{x - y = 15} \\ 2x \quad = 70 \end{array}$$

$$x = \frac{70}{2} = 35$$

Se sustituye el valor de "x" para obtener "y" en cualquiera de las ecuaciones:

$$x + y = 55 \quad \rightarrow \quad 35 + y = 55 \quad \rightarrow \quad y = 20$$

Los números son: 35 y 20, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

"Se desean enllantar 52 vehículos entre autos y motocicletas, si se necesitan 176 llantas en total, ¿cuántos autos y motocicletas se van a enllantar?". Un planteamiento que resuelva el problema es:

a) $\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 4x - 2y = 176 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x + y = 52 \\ 4x + 2y = 176 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 4x + 2y = 52 \\ x + y = 176 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} x - y = 52 \\ 4x + 2y = 176 \end{array}$

Solución:

Sean

x = número de autos ; y = número de motocicletas

Planteamiento

– Se desean enllantar 52 vehículos $\rightarrow$ $x + y = 52$

– Se necesitan 176 llantas, 4 para cada auto y 2 para cada motocicleta $\rightarrow$ $4x + 2y = 176$

la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

"Un libro de matemáticas y un libro de física cuestan $ 400, si el libro de matemáticas cuesta $ 40 pesos más que el de física, ¿cuánto cuesta cada libro?". Un planteamiento que resuelva el problema es:

a) $\begin{array}{l} x + y = 400 \\ x = y + 40 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x - y = 40 \\ y = x + 400 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x + y = 40 \\ x - y = 400 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} x - y = 400 \\ x = 40 - y \end{array}$

Solución:

Sean

x = costo del libro de matemáticas ; y = costo del libro de física

Planteamiento

– Un libro de matemáticas y un libro de física cuestan $ 400 $\rightarrow$ $x + y = 400$

– El libro de matemáticas cuesta $ 40 pesos más que el de física $\rightarrow$ $x = y + 40$

la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

En una tienda de abarrotes se compran 2kg de queso y 1 Kg de jamón y se paga \$ 140, si se compran 3 Kg de jamón y 1 Kg de queso se paga \$ 270. ¿Cuánto cuesta un kilo de jamón?

a)\$ 30 b) \$ 40 c) \$ 70 d) \$ 80

Solución:

Sean

x = costo de un Kg. de jamón y = costo de un Kg de queso

Planteamiento

– Se compran 2Kg de queso y 1Kg de jamón y se paga \$ 140 → $2y + x = 140$

– Se compran 3Kg de jamón y 1Kg de queso se paga \$ 270 → $3x + y = 270$

Se desea conocer el valor de "x", se elimina "y"

$$-1(x + 2y = 140) \qquad \begin{array}{l} -x - 2y = -140 \\ \underline{6x + 2y = \ \ 540} \\ 5x \qquad = 400 \end{array}$$
$$2(3x + y = 270)$$

$$x = \frac{400}{5} = 80$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

En un parque de diversiones, 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$ 820 y 4 entradas de adulto y 5 de niño cuestan \$ 530. ¿Cuál es el precio de entrada de un adulto?

a) \$ 80 b) \$ 90 c) \$ 70 d) \$ 60

Solución:

Sean

x = precio de entrada de un niño ; y = precio de entrada de un adulto

Planteamiento

6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$ 820 → $6y + 8x = 820$

4 entradas de adulto y 5 de niño cuestan \$ 530 → $4y + 5x = 530$

Se desea conocer el valor de "y", se aplica el método de reducción (suma y resta) para eliminar "x"

$$5(6y + 8x = 820) \qquad 30y + 40x = \ \ 4100$$
$$-8(4y + 5x = 530) \qquad \begin{array}{l} \underline{-32y - 40x = -4240} \\ -2y \qquad = -140 \end{array}$$

$$y = \frac{-140}{-2} = 70$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 6

Un planteamiento que resuelva el siguiente problema: "Un granjero posee cierta cantidad de animales entre pollos y borregos de tal manera que al sumar el número de cabezas el resultado es 44, y la suma de las patas es 126, ¿Cuántos pollos y cuántos borregos tiene el granjero?" es:

a) $\begin{array}{l} x + y = 44 \\ 2x + 4y = 126 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x - y = 44 \\ 2x + 4y = 126 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x + y = 126 \\ 2x + 4y = 44 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} x + y = 44 \\ 2x - 4y = 126 \end{array}$

Solución:

Sea "x" el número de pollos y "y" el número de borregos, entonces el sistema de ecuaciones es:

$$x + y = 44$$
$$2x + 4y = 126$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

2. Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

La solución de este sistema esta dado por:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad ; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Donde:

Δ : Determinante del sistema. Δx : Determinante de "x".

Δy : Determinante de "y". Δz : Determinante de "z".

Los cuales se definen por:

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \Delta x = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \Delta y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & i & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \Delta z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & i \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 1

El valor de "x" en el sistema $\begin{cases} 2x + y - 3z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 8 \end{cases}$ es:

a) 2 b) – 2 c) – 1 d) 1

Solución:

Se encuentra Δ y Δx

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(-1)(-1) + (1)(-2)(-3) + (3)(1)(1) - (1)(1)(-1) - (2)(-2)(1) - (3)(-1)(-3) = 2+6+3+1+4-9 = 7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(-1)(-1) + (2)(-2)(-3) + (8)(1)(1) - (2)(1)(-1) - (3)(-2)(1) - (8)(-1)(-3) = 3+12+8+2+6-24 = 7$$

El valor de $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "y" es:

a) 2 b) − 2 c) 1 d) − 13

2. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 3y = -13 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "x" es:

a) 3 b) 3 c) 2 d) − 2

3. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} x - 6y = -16 \\ 3x + 4y = -4 \end{cases}$

a) x = 4, y = 2 b) x = 4, y = −2 c) x = − 4, y = 2 d) x = − 4, y = − 2

4. ¿Cuál es el sistema de determinantes para encontrar el valor de "x"? $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + y = -3 \end{cases}$

a) $\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ b) $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ c) $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ d) $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$

5. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6x + y = -9 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "y" es:

a) − 1 b) − 3 c) 1 d) 3

6. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 5y = -29 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "x" es:

a) 5 b) − 5 c) 2 d) − 2

7. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 3x - y = 15 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

a) x = 4, y = −3 b) x = 4, y = 3 c) x = − 3, y = 4 d) x = 3, y = − 4

8. ¿Cuál es el sistema de determinantes para encontrar el valor de "y"? $\begin{cases} 3x - 4y = 9 \\ x + y = -4 \end{cases}$

a) $\dfrac{\begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ b) $\dfrac{\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ c) $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$ d) $\dfrac{\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$

9. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5x + 2y = -7 \\ 3x - 4y = -25 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "y" es:

a) 3 b) − 4 c) − 3 d) 4

10. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x + 5y = -3 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "x" es:

a) -1 b) -4 c) 1 d) 4

11. ¿Cuál es la determinante principal del sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 3x-4y=-5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

12. ¿Cuál es el determinante principal del sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$

13. La solución al sistema $\begin{cases} x+y-2z=-1 \\ 3x-y+4z=-1 \\ 2x-3y-z=-9 \end{cases}$ es:

a) $x=-1,\ y=2,\ z=1$ b) $x=-1,\ y=-2,\ z=1$ c) $x=-1,\ y=2,\ z=-1$ d) $x=1,\ y=2,\ z=1$

14. La solución al sistema $\begin{cases} 2x-4y+3z=3 \\ 4x+2y-z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{cases}$ es:

a) $x=-1,\ y=-2,\ z=3$ b) $x=-1,\ y=-2,\ z=3$ c) $x=1,\ y=-2,\ z=3$ d) $x=1,\ y=2,\ z=3$

15. La solución del sistema $\begin{cases} x-2z=-1 \\ 2x-3y=14 \\ 4y-2z=-18 \end{cases}$ es:

a) $x=-1,\ y=4,\ z=-1$ b) $x=1,\ y=-4,\ z=-1$ c) $x=1,\ y=-4,\ z=1$ d) $x=1,\ y=4,\ z=1$

16. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=-12 \\ 4x-3z=-5 \\ y+z=2 \end{cases}$ es:

a) $x=2.\ y=-3,\ z=1$ b) $x=-2.\ y=3,\ z=-1$ c) $x=2,\ y=-3,\ z=-1$ d) $x=2,\ y=3,\ z=-1$

17. Un granjero tiene 22 animales, entre cerdos y gallinas. Si el número de patas es de 64. ¿Cuántos cerdos tiene el granjero?

a) 24 b) 64 c) 22 d) 10

18. En una granja hay 50 cabezas y 140 patas entre patos y borregos. ¿Cuántos patos hay?

a) 50 b) 30 c) 70 d) 20

19. En una feria un grupo de 10 personas paga \$210 en total. Si el precio del boleto para los adultos es de \$30 y el de niños es de \$15. ¿Cuántos adultos son?

a) 6 b) 10 c) 4 d) 15

20. Patricia compró 3 blusas y 2 pantalones por \$1250 mientras que Norma compró 2 blusas y 3 pantalones por \$1500. ¿Cuál es el precio de cada pantalón?

a) \$ 500 b) \$ 400 c) \$ 350 d) \$300

Lección 6

Funciones algebraicas

1. Dominio, contra dominio, rango o imagen, regla de correspondencia y representación gráfica

a) Función

Es el conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) en los que el primer elemento es diferente en todos y cada uno de los pares ordenados.

Ejemplos:

1) $A = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$ representa una función ya que el primer elemento de cada par ordenado es diferente a los otros.

2) $B = \{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2)\}$ no representa una función ya que se repite el primer elemento en ciertos pares ordenados.

b) Regla de correspondencia

Es la expresión que relaciona la variable dependiente con la variable independiente y se denota por:

$y = f(x)$, se lee (y es igual a f de x)

Donde:

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

f(x): regla de correspondencia.

Ejemplos:

1) $f(x) = 2x + 1$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 3) $y = 1 - x^2$ 4) $y = \sqrt{x+1}$

c) Valor de una función

Se obtiene al sustituir un cierto valor de x en la función f(x)

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - 3$, el valor de f(3) es igual a:

a) 3 b) 0 c) 9 d) 6

Solución:

$$f(3) = (3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, el valor de $f(-2)$ es:

a) -3 b) $\dfrac{1}{3}$ c) 3 d) $-\dfrac{1}{3}$

Solución:

$$f(-2) = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

d) Dominio de una función

Es el conjunto de todos los valores de "x" admisibles para una función.

e) Contra dominio

Es el conjunto de todos los valores de "y" admisibles para una función.

f) Rango o imagen

Es el conjunto de todos los valores resultantes de "y" al sustituir cada uno de los elementos del dominio en la función.

Ejemplo:

Si f: D → C con D = {1, 3} y C = {2, 4, 6}, si f(x) = x + 1. ¿Qué conjunto representa el rango de la función?

a) R = {2, 4} b) R = {2} c) R = {2, 4, 6} d) R = {4}

Solución:

El dominio de la función es el conjunto D y el contradominio es el conjunto C.

El rango se conforma de los elementos del contradominio que se obtienen al sustituir los elementos del dominio en la función f(x) = x + 1

$$f(1) = 1 + 1 = 2 \quad ; \quad f(3) = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, el rango es el conjunto R = {2, 4}, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

g) Función algebraica

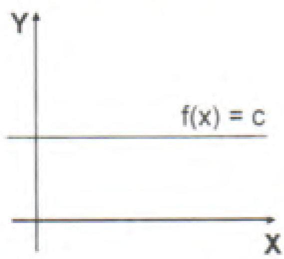
Es aquella función formada por operaciones algebraicas sobre la variable "x". Estas operaciones son: adición, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación.

Clasificación de las funciones algebraicas

- **Función constante**

Es de la forma f(x) = c, y representa todos los puntos (x, c), su dominio son los reales y su rango es {c}.

Gráfica:



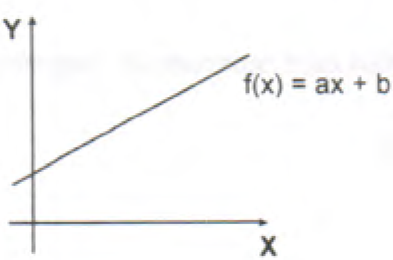
Dominio = $(-\infty, \infty)$

Rango = {c}

- **Función lineal**

Es de la forma f(x) = ax + b, su gráfica es una línea recta inclinada, el exponente de "x" es la unidad.

Gráfica:



Dominio = $(-\infty, \infty)$

Rango = $(-\infty, \infty)$

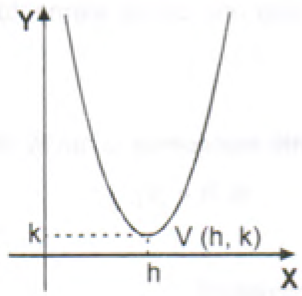
Función cuadrática

Es una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Y su gráfica representa parábolas verticales en el plano, el punto a partir del cual las parábolas abren se denomina vértice y sus coordenadas son V(h, k).

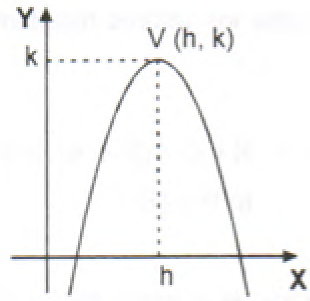
Si $a > 0$



Dominio = R

Rango = $[\,k,\ \infty\,)$

Si $a < 0$



Dominio = R

Rango = $(-\infty\,,\ k]$

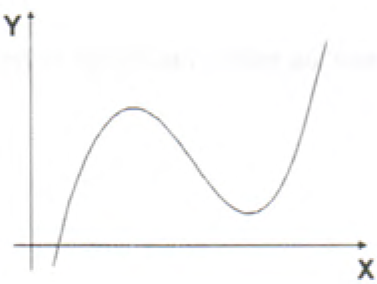
Para obtener los valores de (h, k) se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a}\,, \qquad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Función cúbica

Es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Gráfica:



Dominio = $(-\infty, \infty) = R$

Rango = $(-\infty, \infty) = R$

Ejemplo 1

Los puntos que pertenecen a la función $f(x) = 3$, son:

a) {(3, 2), (3, 3), (3,4)}

b) {(1, 3), (2, 3), (3, 3)}

c) {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}

d) {(–3, 1), (–2, 3), (–1, 4)}

Solución:

Los puntos que pertenecen a la función $f(x) = 3$, son todos aquellos cuya ordenada es 3 significa que son de la forma (x, 3) para cualquier valor de "x", entonces, el conjunto es:

{(1, 3), (2, 3), (3, 3)}

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Representa una función constante:

a) $f(x) = \pi$ b) $f(x) = x + 2$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución:

Una función constante es aquella regla de correspondencia que a cualquier valor de "x" le asigna el mismo valor, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Representa una función lineal.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ d) $f(x) = 3^x$

Solución:

Una función lineal es de la forma $f(x) = ax + b$, donde el exponente de "x" es la unidad y sólo se encuentra como numerador, por tanto la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

El vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 4x + 8$, es:

a) $V(2,-4)$ b) $V(-2,4)$ c) $V(4,-2)$ d) $V(4,\ 2)$

Solución:

El vértice de una parábola se define $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ y los valores son: $a = 1$, $b = 4$ y $c = 8$

Por tanto:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{4}{2(1)}, \frac{4(1)(8)-(4)^2}{4(1)}\right) = V\left(-\frac{4}{2}, \frac{32-16}{4}\right) = V(-2,4)$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

El rango de la función $f(x) = -x^2 + x - 6$ es:

a) $\left[-\frac{23}{4}, -\infty\right)$ b) $(-\infty, \infty)$ c) $\left(-\infty, -\frac{23}{4}\right)$ d) $\left(-\infty, -\frac{23}{4}\right]$

Solución:

El coeficiente de x^2 es negativo, la parábola abre hacia abajo y su rango está dado por:

$$(-\infty, k] \quad \text{con } k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Se obtiene el valor de k:

$$k = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-6)-(1)^2}{4(-1)} = \frac{24-1}{-4} = \frac{23}{-4} = -\frac{23}{4}$$

Por tanto el rango es el intervalo:

$$(-\infty, k] = \left(-\infty, -\frac{23}{4}\right]$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Función racional

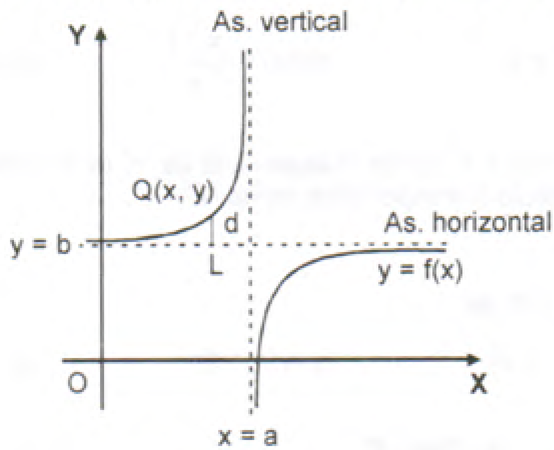
Son de la forma $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$, si $x_1, x_2, \ldots x_n$ son los valores para los cuales $g(x_1) = g(x_2) = \ldots = g(x_n) = 0$, entonces el dominio de $f(x)$ se define como:

$$D_f = \{x \in R \,/\, x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Donde: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les denomina asíntotas verticales.

– Asíntota

Es una recta o curva cuya distancia a la función $y = f(x)$ se aproxima a cero, esto es, la asíntota se acerca a la función pero nunca la toca.



Ejemplo 1

La asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ son:

a) $x = -2$ b) $x = 1$ c) $x = -1$ d) $x = 2$

Solución:

Se iguala el denominador con cero y se despeja a la variable "x" para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales.

$$x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

La función solo tiene una asíntota vertical en $x = 1$, la respuesta correcta corresponde al inciso "b"

Ejemplo 2

El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$ es:

a) $D_f = \{x \in R \,/\, x \neq -3, -2\}$ c) $D_f = \{x \in R \,/\, x \neq -3, 2\}$

b) $D_f = \{x \in R \,/\, x \neq -6, -1\}$ d) $D_f = \{x \in R \,/\, x \neq -1, 6\}$

Solución:

El dominio de la función se obtiene a partir de sus asíntotas verticales, entonces:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+3)(x+2) = 0$$

$$x + 3 = 0,\; x + 2 = 0$$

$$x = -3, \quad x = -2$$

Por tanto, el dominio es:

$$D_f = \{x \in R \,/\, x \neq -3, -2\}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Función raíz cuadrada

Es de la forma $f(x) = \sqrt{g(x)}$, y su dominio es $D_f = \{x \in R \,/\, g(x) \geq 0\}$.

La resolución de una desigualdad se desarrolla en el capítulo 4.

Ejemplo 1

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ es:

a) $D_f = \{x \in R \,/\, x < 2\}$ b) $D_f = \{x \in R \,/\, x \geq 2\}$ c) $D_f = \{x \in R \,/\, x > 2\}$ d) $D_f = \{x \in R \,/\, x \leq 2\}$

Solución:

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x - 2 \geq 0$

$$x - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 2$$

Por tanto:

$$D_f = \{x \in R \,/\, x \geq 2\}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$ es:

a) $[-5, 2]$ b) $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$ c) $(-5, 2)$ d) $(-\infty, -5] \cup [2, \infty)$

Solución:

Se resuelva la desigualdad $x^2 + 3x - 10 \geq 0$, obteniendo las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+5)(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -5,\ x = 2$$

La solución es:

$$x \leq -5 \quad \text{ó} \quad x \geq 2 \qquad \text{es equivalente a } (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$ es:

a) $D_f = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \geq x \ \text{ ó } \ x \leq \frac{3}{2}\right\}$ c) $D_f = \left\{x \in R \,/\, x \leq \frac{3}{2}\right\}$

b) $D_f = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \leq x\right\}$ d) $D_f = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$

Solución:

Se resuelve la desigualdad $9 - 4x^2 \geq 0$, la cual se multiplica por (-1) para convertir en positivo el término cuadrático.

$$4x^2 - 9 \leq 0$$

Se obtienen las raíces de $4x^2 - 9 = 0$,

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Que son $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{3}{2}$, por tanto el dominio es:

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \qquad \text{ó} \qquad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Funciones implícitas y explícitas

– Se llama función explícita a aquélla en la que una variable se escribe en términos de la otra.

Ejemplos:

1) $y = -3x + 5$ 2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 3) $x = y^2 + 3y$

– Una función implícita es aquella relación que se expresa en términos de "x" y "y".

Ejemplos:

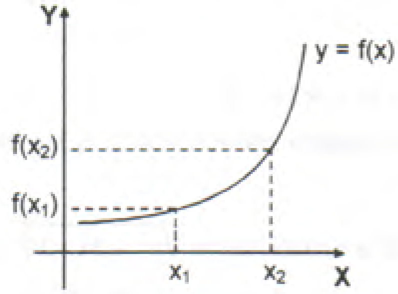
1) $x^2 + y^2 = 1$ 2) $xy = 4$ 3) $x^2 + xy - 2y^2 = 0$

Función creciente

– Una función definida en un intervalo es creciente en ese intervalo, si y sólo si,

para todo $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) > f(x_1)$

esto es, una función es creciente si al aumentar "x" también "f(x)" aumenta.



Ejemplo 1

Determinar si la función $f(x) = 2x + 5$ es creciente.

Solución:

Se eligen dos valores para "x", en este caso $x = 2$ y $x = 4$, entonces:

Si $x = 2$, $f(2) = 2(2) + 5 = 9$

Si $x = 4$, $f(4) = 2(4) + 5 = 13$

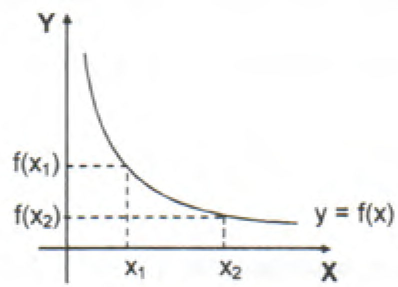
Se observa que al aumentar los valores de "x" también aumentan los valores de "f(x)", por tanto la función $f(x) = 2x + 5$ es creciente.

Función decreciente

– Una función definida en un intervalo es decreciente en ese intervalo, si y solo si,

para todo $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

esto es, una función es decreciente si al aumentar "x", "f(x)" disminuye.



Ejemplo:

Determinar si la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es decreciente.

Solución:

Se eligen dos valores para "x", en este caso $x = 1$ y $x = 2$, entonces:

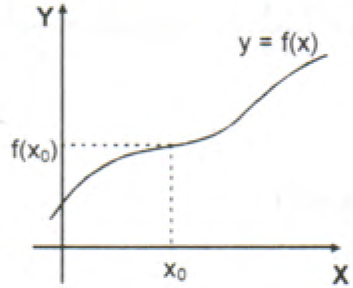
Si $x = 1$, $f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

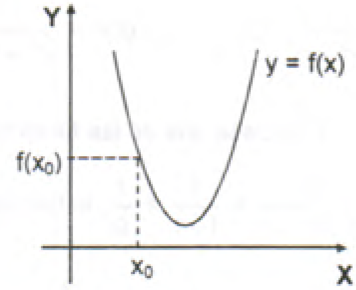
Si $x = 2$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$

Se observa que mientras los valores de "x" aumentan, los valores de f(x) disminuyen, por tanto, la función es decreciente.

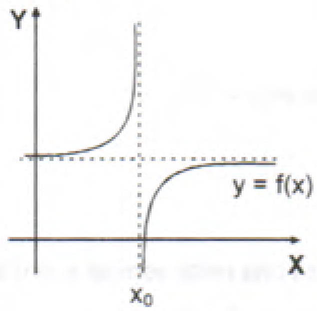
Funciones continuas y discontinuas

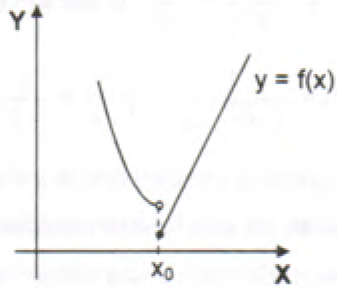
- Una función $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$, si $f(x_0)$ está definida.





- Una función $y = f(x)$ es discontinua en $x = x_0$, si $f(x_0)$ no esta definida, esto es, se obtiene una expresión de la forma $\frac{c}{0}$ ó $\frac{0}{0}$.





Ejemplo 1

¿Para que valor de "x" es discontinua la función $f(x) = \frac{4}{x+3}$?

a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $x =- 3$ d) $x = 2$

Solución:

La función es discontinua en un valor de "x" si al sustituirlo en la función se obtienen expresiones como: $\frac{c}{0}$ ó $\frac{0}{0}$.

Si $x = 3$, $f(3) = \frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, en este punto es continua f(x).

Si $x = -2$, $f(-2) = \frac{4}{-2+3} = \frac{4}{1} = 4$, en este punto es continua f(x).

Si $x = -3$, $f(-3) = \frac{4}{-3+3} = \frac{4}{0}$, en esta punto es discontinua.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ es discontinua en:

a) $x = 4$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = 3$

Solución:

Si $x = 4$, $f(4) = \frac{4-2}{4^2-4} = \frac{2}{16-4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, en este punto es continua f(x).

Si $x = 2$, $f(2) = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$, en este punto es discontinua f(x).

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

¿Cuál de las siguientes funciones es continua en $x = -1$?

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 4}$ c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ d) $w(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Solución:

Se sustituye $x = -1$ en cada una de las funciones.

$f(-1) = \dfrac{1}{(-1)^2 - 1} = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$, la función es discontinua en $x = -1$

$g(-1) = \dfrac{1}{(-1)^2 + 5(-1) + 4} = \dfrac{1}{1-5+4} = \dfrac{1}{0}$, la función es discontinua en $x = -1$

$h(-1) = \dfrac{-1-1}{-1+1} = \dfrac{-2}{0}$, la función es discontinua en $x = -1$

$w(-1) = \dfrac{1}{(-1)^2 - 4} = \dfrac{1}{1-4} = \dfrac{1}{-3}$, la función es continua en $x = -1$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

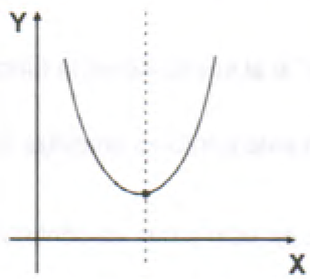
■ Identificación de una función mediante su gráfica

Para identificar gráficamente una función de una relación, se traza una recta vertical sobre la gráfica,

- Si interseca en un punto a la gráfica, entonces representa una función.

Ejemplo:

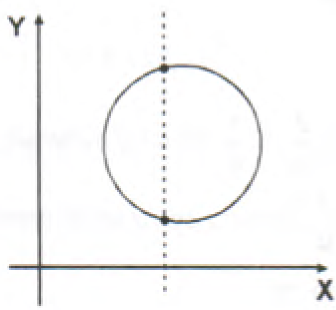
La siguiente gráfica representa una función, ya que al trazar una línea vertical, sólo toca en un punto a la curva.



- Si interseca en más de un punto a la gráfica, entonces representa una relación.

Ejemplo:

La siguiente gráfica no es una función, representa una relación, ya que la línea vertical toca en dos puntos a la curva.



Álgebra de funciones

Sean las funciones f(x) y g(x), entonces:

– Suma de funciones

Se denota $f + g$ y se define por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

– Resta de funciones

Se denota $f - g$ y se define por:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

– Multiplicación de funciones

Se denota $f \cdot g$ y se define por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

– División de funciones

Se denota $\frac{f}{g}$ y se define por:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

– Función composición

Se denota por $f \circ g$ y se define por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = -5x + 7$, entonces $f + g$ es:

a) $x^2 - 7x + 7$ b) $x^2 - 2x + 7$ c) $x^2 + 8x + 7$ d) $x^2 - 8x + 7$

Solución:

$$f + g = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + (-5x + 7) = x^2 + 3x - 5x + 7 = x^2 - 2x + 7$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{x+2}$, entonces $f \cdot g$ es:

a) $x - 2$ b) $x + 2$ c) $x + 4$ d) $x - 4$

Solución:

$$f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{x^2 - 4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, entonces la función composición $f \circ g$ es:

a) $\frac{x-1}{x+1}$ b) $\frac{x-1}{1-x}$ c) $\frac{1+x}{1-x}$ d) $\frac{1+x}{1+x}$

Solución:

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{x(1+x)}{x(1-x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejercicios

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos representa una función?

a) $\{(-2, 3),(-1, 3),(-2, 5)\}$ b) $\{(1, 3),(1, 4), (1, 5)\}$ c) $\{(-2, 3),(-1, 3), (2, 5)\}$ d) $\{(1, 7),(2, 8), (2, -9)\}$

2. De los siguientes conjuntos, ¿cuál no representa una función?

a) $\{(1, 2),(3, 4),(4, 5)\}$ b) $\{(2, 3), (3, 4), (4, -2)\}$ c) $\{(1, 2), (-1, 3),(3, -1)\}$ d) $\{(-1, 3),(-1, 2),(2, -1)\}$

3. Si $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x + 1}$,¿cuál es el resultado de $f(-2)$?

a) $-\dfrac{11}{3}$ b) $\dfrac{11}{3}$ c) $\dfrac{7}{3}$ d) $-\dfrac{7}{3}$

4. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$, el valor de $f(1)$ es:

a) 6 b) 0 c) 1 d) – 1

5. Si el dominio de la función $f(x) = 3x - 2$ es el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y su contradominio es el conjunto $\{1, 4, 7, 10\}$ ¿Cuál es el rango de la función?

a) $\{4, 7, 10\}$ b) $\{1, 4, 10)$ c) $\{1, 4, 7, 10\}$ d) $\{1, 4, 7\}$

6. Si el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ es $\{-2, -1, 0\}$ y su contradominio $\left\{-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}, -1\right\}$,

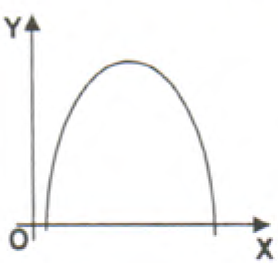
¿Cuál es el rango?

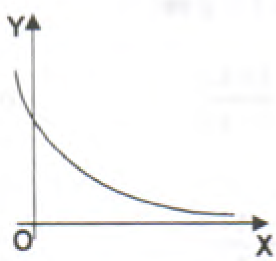
a) $\left\{-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{4}, -1\right\}$ b) $\left\{-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{3}, -1\right\}$ c) $\left\{-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{3}\right\}$ d) $\left\{-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}, -1\right\}$

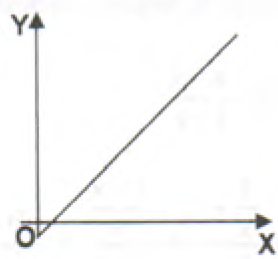
7. ¿Cuál de las siguientes funciones es lineal?

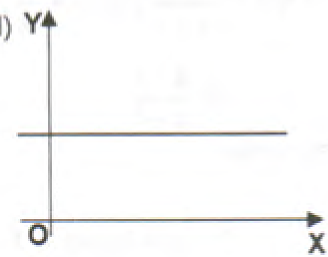
a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ c) $f(x) = 2x + 1$ d) $f(x) = (2x + 1)^2$

8. Es la gráfica de una función exponencial:

a)


b)


c)


d)


9. ¿Qué expresión representa una función cuadrática?

a) $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ d) $f(x) = (x - 1)^2$

10. ¿Cuál es el rango de la función $y = x^2 - 2x - 8$?

a) $[-9, \infty)$ b) $(-9, \infty)$ c) $(-\infty, -9)$ d) $(-\infty, -9]$

11. El rango de la función $y = -x^2 + 6x - 11$ es:

a) $(-2, \infty)$ b) $[-2, \infty)$ c) $(-\infty, -2)$ d) $(-\infty, -2]$

12. El dominio de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x - 6}$ es:

a) $D_f = \{x \in R / x \neq -1, 6\}$ b) $D_f = \{x \in R / x \neq 1, -6\}$ c) $D_f = \{x \in R / x \neq -3, 2\}$ d) $D_f = \{x \in R / x \neq -2, 3\}$

13. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:

a) $(-\infty, 0)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $(0, \infty)$ d) $[0, \infty)$

14. El dominio de la función $f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$ es:

a) $D_f = \{x \in R / x \neq -1\}$ b) $D_f = \{x \in R / x \neq 1, -1\}$ c) $D_f = \{x \in R / x \neq 1\}$ d) $D_f = \{x \in R / x \neq -1, 0\}$

15. La función $f(x) = x^3 - 1$ es una función:

a) Creciente   b) Decreciente   c) Cuadrática   d) Constante

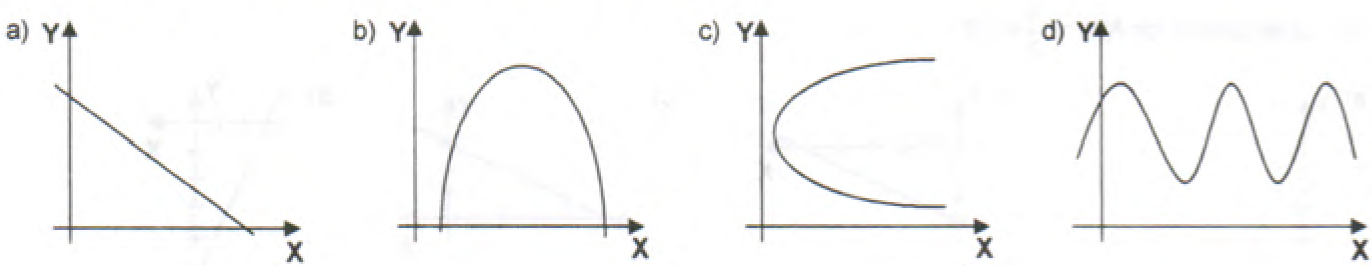
16. El valor de "x" para el cuál la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ es discontinua es:

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4

17. La función $f(x) = \frac{1}{x(x^2 - 9)}$ es continua en el punto:

a) $x = 0$ b) $x = 3$ c) $x = -3$ d) $x = 1$

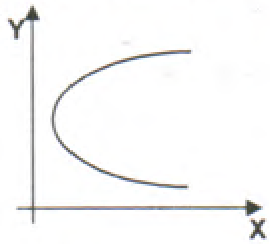
18. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una relación?

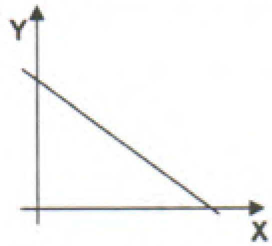


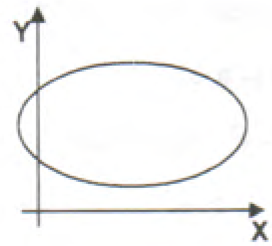
19. Es una función explícita.

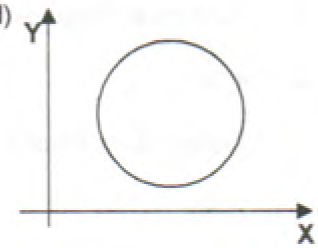
a) $xy = 1$ b) $3x + 4y - 1 = 0$ c) $x = 2y - 1$ d) $x^2 - y^2 = 1$

20. ¿cuál de las siguientes gráficas representa una función?

a) 

b) 

c) 

d) 

21. ¿Qué expresión representa una función implícita?

a) $y = x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + xy - y^2 = 0$ c) $x^2 - x^3 - x^4 = y$ d) $y = \dfrac{x-1}{x^2 - x - 1}$

22. Si $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 - 2x + 3$, el resultado de $f + g$ es:

a) $x^2 + 2$ b) $x^2 - 2$ c) $x^2 + 4x + 2$ d) $x^2 + 4x - 2$

23. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{1+x}$, el resultado de $f \cdot g$ es:

a) $1 - x^2$ b) $\sqrt{1+x^2}$ c) $\sqrt{1-x^2}$ b) $1 + x^2$

24. Si $f(2) = 8$ y $g(2) = 4$, el resultado de $2f(2) - 3g(2)$ es:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8

25. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$, el resultado de $f \circ g$ es:

a) x^2 b) $x^2 - 1$ c) $x^2 + 1$ d) $x^2 - 2$

26. Si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - 2x$, el resultado de $\dfrac{g}{f}$ es:

a) $x^3 - 2x^2$ b) $x - 2$ c) $x + 2$ d) $x^2 - 2x$

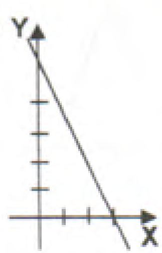
27. Es una función exponencial.

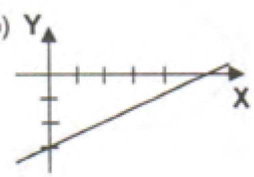
a) $y = x^2$ b) $y = 3^4$ c) $y = 3^x$ d) $y = 2^1$

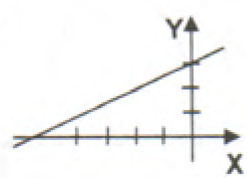
28. Es una función decreciente.

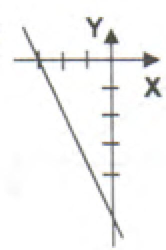
a) $f(x) = -x + 1$ b) $f(x) = 2x + 3$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = 2^x$

29. Es la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$

a) 

b) 

c) 

d) 

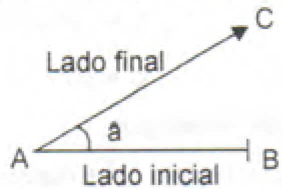
Lección 7

Trigonometría

1. Medida de un ángulo

Ángulo

Es la abertura comprendida entre dos semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.



Los ángulos se representa por: ∠ A, ∠ BAC, â o con letras del alfabeto griego.

Sistemas de medición de ángulos

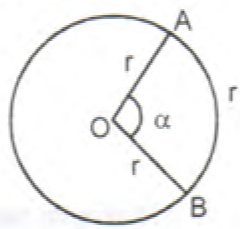
Sistema sexagesimal

En este sistema se divide la circunferencia en 360 partes llamadas grados, el grado en sesenta minutos y el minuto en sesenta segundos.

$$1° = 60' \qquad ; \qquad 1' = 60''$$

Sistema cíclico o circular

Este sistema tiene como unidad fundamental el radián, el radián es el ángulo central subtendido por un arco, igual a la longitud del radio del círculo y se llama valor natural o valor circular de un ángulo.



Conversión de grados a radianes y radianes a grados

- Para convertir grados en radianes se multiplica el número en grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$, el resultado se simplifica de ser posible.
- Para convertir radianes en grados se multiplica el número en radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$, el resultado se simplifica de ser posible.

Ejemplo 1

60° en radianes se expresa como:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{2}$

Solución:

Se multiplica 60° por el factor $\frac{\pi}{180°}$.

$$60°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{60°\pi}{180°} = \frac{1\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

$\frac{5\pi}{6}$ en grados, se expresa como:

a) 120° b) 60° c) 150° d) 225°

Solución:

Se multiplica $\frac{5\pi}{6}$ por el factor $\frac{180°}{\pi}$.

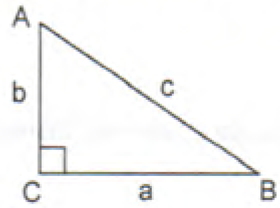
$$\left(\frac{5\pi}{6}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{900°\pi}{6\pi} = 150°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

2. Razones trigonométricas

Triángulo rectángulo

Es el triángulo que tiene un ángulo recto (90°), a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y el lado que se opone a dicho ángulo se llama hipotenusa.



c: hipotenusa

a, b: catetos

$\angle A$, $\angle B$: ángulos agudos

$\angle A + \angle B = 90°$

$\angle C = 90°$

– Teorema de Pitágoras

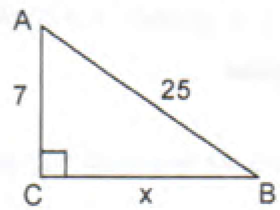
Establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor de lado "x" en el siguiente triángulo?

a) 12 b) 17 c) 24 d) 28



Solución:

Por teorema de Pitágoras:

$$(\text{hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2 \rightarrow (25)^2 = (7)^2 + x^2 \rightarrow 625 = 49 + x^2$$

$$625 - 49 = x^2$$

$$576 = x^2$$

$$x = \sqrt{576} = 24$$

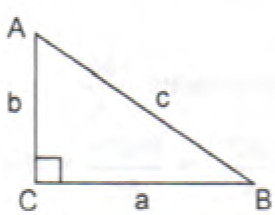
La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Razones trigonométricas

Son las relaciones por cociente entre los lados de un triángulo rectángulo.

	Abreviatura		Abreviatura
Seno $= \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	**sen** θ	**Cotangente** $= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	**cot** θ **= ctg** θ
Coseno $= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	**cos** θ	**Secante** $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	**sec** θ
Tangente $= \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	**tan** θ **= tg** θ	**Cosecante** $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	**csc** θ

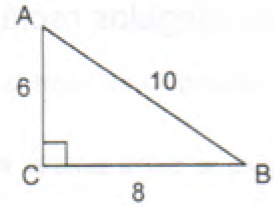
En el triángulo ABC, los catetos se designan de acuerdo al ángulo al que se desea obtener sus razones trigonométricas.



Para el ángulo A	Para el ángulo B
c: hipotenusa	c: hipotenusa
a: cateto opuesto	b: cateto opuesto
b: cateto adyacente	a: cateto adyacente

Ejemplo 1

¿Cuál es el coseno del ángulo B en el siguiente triángulo?



a) $\frac{6}{10}$ b) $\frac{8}{6}$ c) $\frac{10}{6}$ d) $\frac{8}{10}$

Solución:

Para el ángulo B,

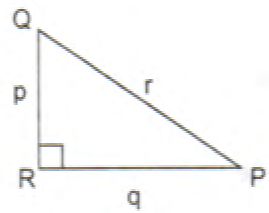
cateto opuesto = 6 cateto adyacente = 8 hipotenusa = 10

Luego,

$$\text{Cos B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{10}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2



De acuerdo a la figura, la razón $\frac{q}{p}$ corresponde a la función:

a) tan Q b) sen P c) cos Q d) sec P

Solución:

Para el ángulo Q,

Cateto opuesto = q cateto adyacente = p hipotenusa = r

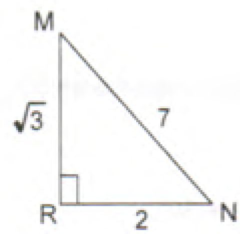
La razón $\frac{q}{p}$ es:

$$\frac{q}{p} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \tan Q$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

En el siguiente triángulo, el seno del ángulo M y la secante de N son:



a) $\frac{\sqrt{3}}{7}, \frac{7}{2}$ b) $\frac{2}{7}, \frac{7}{2}$ c) $\frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{\sqrt{3}}$

Solución:

– Para el ángulo M,

Cateto opuesto = 2 ; cateto adyacente = $\sqrt{3}$; hipotenusa = 7

La razón trigonométrica seno se define por:

$$\text{sen M} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2}{7}$$

– Para el ángulo N,

Cateto opuesto = $\sqrt{3}$; cateto adyacente = 2 ; hipotenusa = 7

La razón trigonométrica secante se define por:

$$\text{sec N} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{7}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

3. Solución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es hallar la medida de los ángulos y lados faltantes en función de los datos proporcionados.

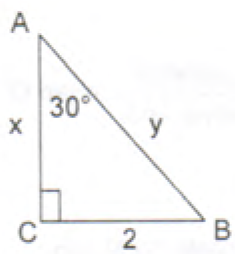
Para resolver un triángulo se utiliza tanto el teorema de Pitágoras como las funciones trigonométricas.

Valores de funciones trigonométricas para ángulos notables

Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Grados	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ejemplo 1

El valor de los lados "x", "y" y el ángulo B es:



Solución:

La suma de ángulos agudos es 90°: $\angle A + \angle B = 90° \rightarrow 30° + \angle B = 90°$

$$\angle B = 90° - 30°$$

$$\angle B = 60°$$

Para el ángulo A = 30°,

cateto opuesto = 2 cateto adyacente = x hipotenusa = y

El valor de "x" se obtiene utilizando una función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente,

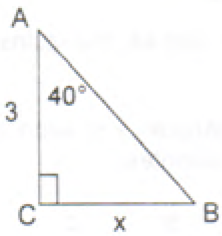
$$\tan 30° = \frac{2}{x} \rightarrow x \tan 30° = 2 \rightarrow x = \frac{2}{\tan 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

El valor de "y" se obtiene utilizando una función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y la hipotenusa,

$$\text{sen } 30° = \frac{2}{y} \rightarrow y \text{ sen } 30° = 2 \rightarrow y = \frac{2}{\text{sen } 30°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Ejemplo 2

En el siguiente triángulo:



El valor de "x" se obtiene con la expresión:

a) $\dfrac{\tan 40°}{3}$ b) 3 sen 40° c) 3 tan 40° d) $\dfrac{\text{sen}40°}{3}$

Solución:

Para el ángulo A = 40°

cateto opuesto = x y cateto adyacente = 3

se elige la función que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad \rightarrow \quad \tan 40° = \frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad x = 3\tan 40°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c"

Ejemplo 3

Si cos A = $\frac{2}{5}$, el valor de sen A es:

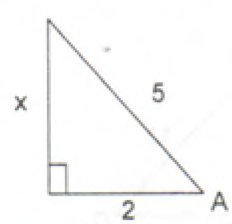
a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

Solución:

La razón coseno se define por:

$$\cos A = \frac{2}{5} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo con $\angle$ A uno de los ángulos agudos y se colocan los datos:



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el valor del lado restante

$$5^2 = x^2 + 2^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 - 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 21 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{21}$$

Por tanto, la función seno se define como:

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

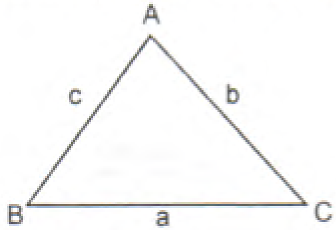
La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

4. Ley de los senos y ley de los cosenos

Se aplican para la resolución de triángulos oblicuángulos, esto es, triángulos que no tienen un ángulo de 90°.

Ley de los senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado, es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.



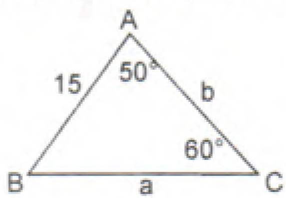
$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}$$

Se aplica si se conocen:

- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de esos lados.
- Dos ángulos y un lado opuesto a uno de esos ángulos.

Ejemplo 1

El valor de "a" en el triángulo ABC, se resuelve con la operación:



a) $\frac{15\text{sen}60°}{\text{sen}50°}$ b) $\frac{\text{sen}50°}{15\text{sen}60°}$ c) $\frac{\text{sen}60°}{15\text{sen}50°}$ d) $\frac{15\text{sen}50°}{\text{sen}60°}$

Solución:

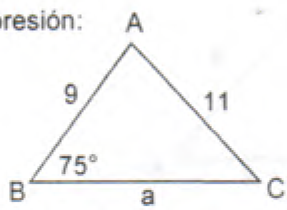
Por ley de senos $\frac{a}{\text{sen}50°}=\frac{15}{\text{sen}60°}=\frac{b}{\text{sen}B}$, se toma la primera igualdad para despejar "a", entonces,

$$\frac{a}{\text{sen}50°}=\frac{15}{\text{sen}60°} \quad \rightarrow \quad a=\frac{15\text{sen}50°}{\text{sen}60°}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El ángulo C se obtiene con la expresión:



a) $\text{sen } C=\frac{9\text{ sen}75°}{11}$ b) $\text{sen } C=\frac{11\text{sen}75°}{9}$ c) $\text{sen } C=\frac{9}{11\text{sen}75°}$ d) $\text{sen } C=\frac{11}{9\text{sen}75°}$

Solución:

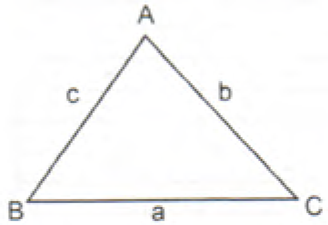
Por ley de senos $\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{11}{\text{sen}75°}=\frac{9}{\text{sen}C}$, se toma la igualdad $\frac{11}{\text{sen}75°}=\frac{9}{\text{sen}C}$ y se despeja sen C:

$$\frac{11}{\text{sen}75°}=\frac{9}{\text{sen}C} \quad \rightarrow \quad 11\text{ sen } C=9\text{ sen }75° \quad \rightarrow \quad \text{sen } C=\frac{9\text{ sen}75°}{11}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ley de los cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.



$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} \quad \rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} \quad \rightarrow \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

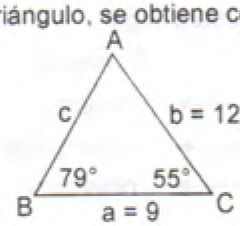
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \quad \rightarrow \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Se aplica si se conocen:

- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Tres lados.

Ejemplo 1

El valor del lado "c" en el siguiente triángulo, se obtiene con la expresión:



a) $c = \sqrt{(9)^2 - (12)^2 - 2(9)(12)\cos 55°}$ c) $c = \sqrt{(9)^2 + (12)^2 - 2(9)(12)\cos 79°}$

b) $c = \sqrt{(9)^2 + (12)^2 - 2(9)(12)\cos 55°}$ d) $c = \sqrt{(9)^2 + (12)^2 + 2(9)(12)\cos 55°}$

Solución:

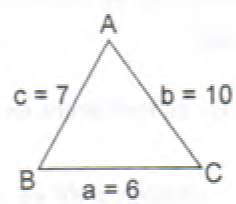
El lado "c" se obtiene con la fórmula:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Por tanto, $c = \sqrt{(9)^2 + (12)^2 - 2(9)(12)\cos 55°}$ la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

En el triángulo ABC, el valor del ángulo A se obtiene con la expresión:



a) $\cos A = \dfrac{(6)^2 + (7)^2 - (10)^2}{2(6)(7)}$ c) $\cos A = \dfrac{(10)^2 + (7)^2 - (6)^2}{2(10)(6)}$

b) $\cos A = \dfrac{(10)^2 + (6)^2 - (7)^2}{2(10)(6)}$ d) $\cos A = \dfrac{(10)^2 + (7)^2 - (6)^2}{2(10)(7)}$

Solución

En el triángulo se conocen los tres lados, el ángulo A se obtiene con la fórmula

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Por tanto, $\cos A = \dfrac{(10)^2 + (7)^2 - (6)^2}{2(10)(7)}$, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

5. Razones trigonométricas para un ángulo en cualquier cuadrante

Signos de las funciones trigonométricas

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–
Cotangente	+	–	+	–
Secante	+	–	–	+
Cosecante	+	+	–	–

Funciones para ángulos mayores a 90°

Cualquier función trigonométrica de un ángulo mayor a 90°, puede ser expresada en la forma $(n \cdot 90° \pm \theta)$, conservando el signo correspondiente a la función dada, donde "n" es un entero positivo y "θ" es un ángulo cualquiera, el cual es equivalente a:

a) La misma función de θ si "n" es un número par.

b) La cofunción correspondiente de θ si "n" es un número impar.

Función		**Cofunción**
seno	⟷	coseno
tangente	⟷	cotangente
secante	⟷	cosecante

Ejemplo 1

El valor de cos 150° es equivalente a:

a) – cos 30°　　b) cos 60°　　c) – cos 60°　　d) cos 30°

Solución:

El ángulo de 150° se encuentra en el segundo cuadrante, donde coseno es negativo, luego

$$150° = (2 \cdot 90° - 30°)$$

El número que multiplica a 90° es par, el resultado se expresa con la misma función, por tanto

$$\cos 150° = -\cos 30°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El valor de cos 300° es equivalente a:

a) sen 60°　　b) sen 30°　　c) – cos 30°　　d) – cos 60°

Solución:

El ángulo de 300° se encuentra en el cuarto cuadrante, donde coseno es positivo, luego

$$300° = (3 \cdot 90° + 30°)$$

El número que multiplica a 90° es impar, el resultado se expresa con la cofunción, por tanto

$$\cos 300° = \operatorname{sen} 30°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de tan 135° es equivalente a:

a) $\sqrt{2}$　　b) – 1　　c) $-\sqrt{2}$　　d) 1

Solución:

El ángulo de 135° se encuentra en el segundo cuadrante, donde la tangente es negativa, por tanto

$$\tan 135° = \tan(2 \cdot 90° - 45°) = -\tan 45° = -1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

6. Identidades trigonométricas básicas

Son las relaciones que existen entre las razones trigonométricas y se dividen en:

Identidades recíprocas

$\text{sen}\ \theta \cdot \csc\theta = 1$ $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

Identidades de cociente

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

Identidades Pitagóricas

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Ejemplo 1

La expresión $\text{sen}\ \theta$ es equivalente a:

a) $\dfrac{1}{\cos\theta}$ b) $\dfrac{1}{\sec\theta}$ c) $\dfrac{1}{\csc\theta}$ d) $\dfrac{1}{\text{sen}\theta}$

Solución:

De la expresión $\text{sen}\ \theta \cdot \csc\theta = 1$, se despeja $\text{sen}\ \theta$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La expresión $\cos\theta$ es equivalente a:

a) $\dfrac{\tan\theta}{\csc\theta}$ b) $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$ c) $\dfrac{1}{\text{sen}\theta}$ d) $\dfrac{\text{sen}\theta}{\cot\theta}$

Solución:

Se comprueba cada uno de los incisos

a) $\dfrac{\tan\theta}{\csc\theta} = \dfrac{\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\text{sen}\theta}} = \dfrac{\text{sen}\theta \cdot \text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$, no es la respuesta correcta.

b) $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta} = \dfrac{\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}}{\frac{1}{\text{sen}\theta}} = \dfrac{\cos\theta \cdot \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = \cos\theta$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\cot\theta$ es:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$ b) $\sqrt{\sec^2\theta - 1}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}$ d) $\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$

Solución:

De la expresión $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ se despeja $\cot\theta$, entonces $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

de la expresión $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, se despeja $\tan\theta$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \quad \rightarrow \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \quad \rightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$$

Por tanto,

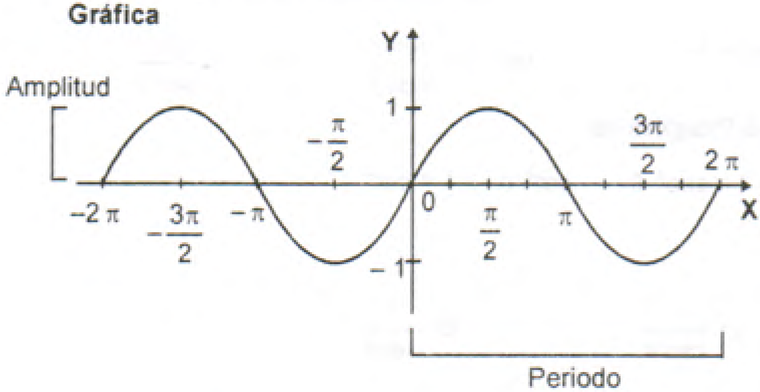
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

7. Funciones trigonométricas

Función seno (y = sen x)

Gráfica

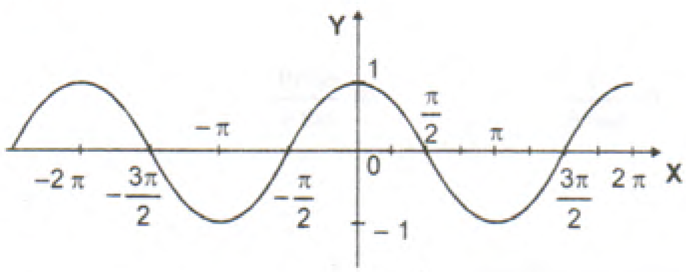


Propiedades

- Dominio = $(-\infty, \infty)$
- Rango = $[-1, 1]$
- Periodo = 2π
- Amplitud = 1
- Es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
- Es decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Función coseno (y = cos x)

Gráfica

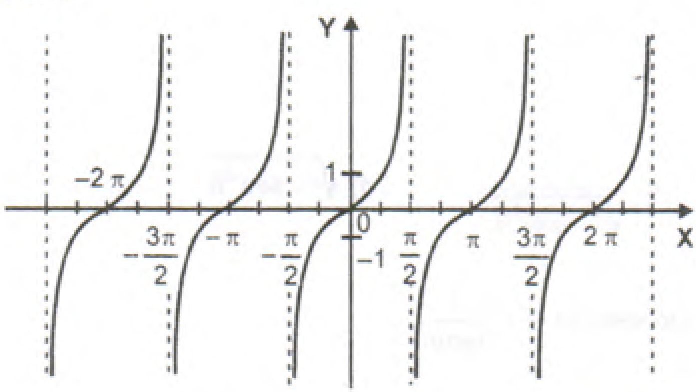


Propiedades

- Dominio = $(-\infty, \infty)$
- Rango = $[-1, 1]$
- Período = 2π
- Amplitud = 1
- Es creciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$
- Es decreciente en el intervalo $(0, \pi)$

Función tangente (y =tan x)

Gráfica



Propiedades

- Dominio = $\{ x \in R \mid x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ con } k \in Z\}$
- Rango = $(-\infty, \infty)$
- Período = π
- Asíntotas: $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ con $k \in Z$
- Es creciente para todo $x \in D_f$

Ejercicios

1. ¿Cuál es la equivalencia de 90° en radianes?

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$

2. ¿Cuál es la equivalencia de $\frac{5\pi}{3}$ en grados?

a) 120° b) 300° c) 210° d) 60°

3. ¿Cuál es la equivalencia de $\frac{\pi}{4}$ en grados?

a) 225° b) 315° c) 45° d) 135°

4. ¿Cuál es la equivalencia de 45° en radianes?

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{4}$

5. ¿Cuál es la equivalencia de $\frac{7\pi}{4}$ en grados?

a) 225° b) 315° c) 120° d) 70°

6. ¿Cuál es la equivalencia de $\frac{\pi}{6}$ en grados?

a) 30° b) 45° c) 20° d) 36°

7. ¿Cuál es la equivalencia de 210° en radianes?

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{7\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{3}$

8. ¿Cuál es la equivalencia de $\frac{2\pi}{3}$ en grados?

a) 45° b) 15° c) 120° d) 150°

9. ¿Cuál es la equivalencia de $\frac{5\pi}{4}$ en grados?

a) 225° b) 120° c) 20° d) 300°

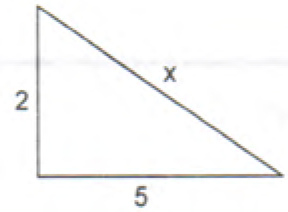
10. ¿Cuál es la equivalencia de 15° en radianes?

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{3}$

11. ¿Cuál es la equivalencia de 36° en radianes?

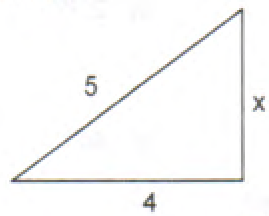
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{5}$

12. De acuerdo a la figura. ¿Cuál es el valor de x?



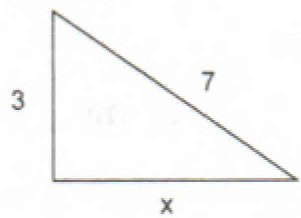
a) $\sqrt{29}$ b) 29 c) 24 d) $\sqrt{24}$

13. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $\sqrt{5}$ d) 4

14. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



a) $\sqrt{5}$ b) 20 c) $2\sqrt{10}$ d) $3\sqrt{7}$

15. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo cuyo ancho mide 6 cm y su largo mide 8 cm?

a) $\sqrt{10}$ cm b) 5 cm c) $\sqrt{5}$ cm d) 10 cm

16. ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero de 12 cm por lado?

a) 6 cm b) $6\sqrt{3}$ cm c) $\sqrt{3}$ d) 108

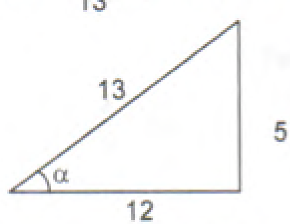
17. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{50}$ cm?

a) 5 cm b) 25 cm c) 10cm 50 cm

18. ¿Cuánto mide la altura de un triángulo si su base es de 40 cm y su área es de 600 cm^2?

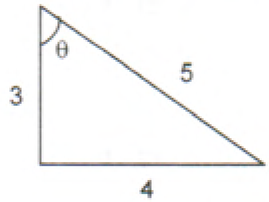
a) 40 cm b) 300 cm c) 15 cm d) 30 cm

19. En relación al triángulo mostrado, la razón $\frac{5}{13}$ expresa el valor de:



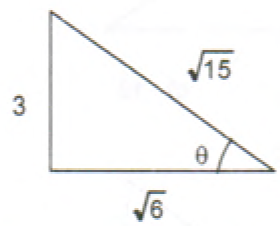
a) sen α b) cos α c) tan α d) cot α

20. En relación al triángulo mostrado la razón $\frac{3}{4}$ expresa el valor de:



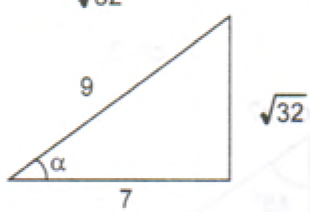
a) $\cos\theta$ b) $\operatorname{sen}\theta$ c) $\cot\theta$ d) $\tan\theta$

21. En relación al triángulo mostrado, la razón $\frac{\sqrt{15}}{3}$ expresa el valor de:



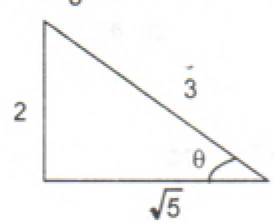
a) $\sec\theta$ b) $\operatorname{sen}\theta$ c) $\cot\theta$ d) $\csc\theta$

22. En relación al triángulo mostrado, la razón $\frac{7}{\sqrt{32}}$ expresa el valor de:



a) $\operatorname{sen}\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) $\tan\alpha$ d) $\cot\alpha$

23. En relación al triángulo mostrado la razón $\frac{2}{3}$ expresa el valor de:



a) $\cos\theta$ b) $\operatorname{sen}\theta$ c) $\cot\theta$ d) $\tan\theta$

24. ¿Cuál es el valor del sen 60°?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

25. ¿Cuál es el valor de tan 45°?

a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

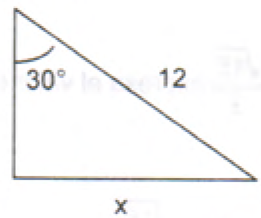
26. ¿Cuál es el valor de tan 60°?

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 1 d) $\sqrt{3}$

27. ¿Cuál es el valor de csc 45°?

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) 1 d) 0

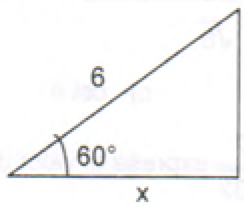
28. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



sen 30° = 0 .5
cos 30° = .8860
tan 30° = .5774

a) 12 b) 24 c) 10 d) 6

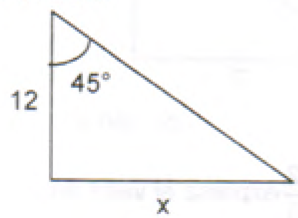
29. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



cos 60° = 0 .5
sen 60° = .8860
tan 60° = 1.7343

a) 8 b) 4 c) 3 d) 6

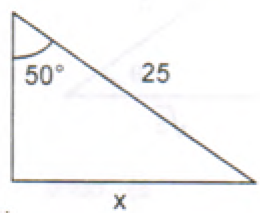
30. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



cos 45° = 0. 7071
sen 45° = 0.7071
tan 45° = 1

a) 6 b) 12 c) 8 d) 3

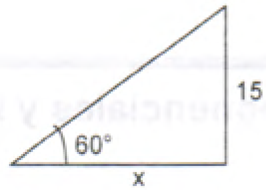
31. En el siguiente triángulo



El valor de " x " se obtiene con la expresión:

a) 25 sen 50° b) 25 cos 50° c) $\frac{25}{\text{sen}\,50°}$ d) $\frac{25}{\cos 50°}$

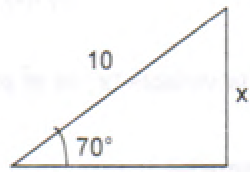
32. En el siguiente triángulo



El valor de " x " se obtiene con la expresión:

a) $15\tan 60°$ b) $15 \operatorname{sen} 60°$ c) $\dfrac{15}{\cot 60°}$ d) $\dfrac{15}{\tan 60°}$

33. En el siguiente triángulo



el valor de " x " se obtiene con la expresión:

a) $10\tan 70°$ b) $10 \operatorname{sen} 70°$ c) $\dfrac{10}{\operatorname{sen} 70°}$ d) $\dfrac{10}{\cos 70°}$

34. La expresión $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ es igual a:

a) -1 b) $\tan x$ c) $\cot x$ d) 1

35. La expresión $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ corresponde a:

a) $\tan \alpha$ b) $\csc \alpha$ c) $\sec \alpha$ d) $\cos \alpha$

36. La expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos \alpha}$ es igual a:

a) $\sec \alpha$ b) $\cot \alpha$ c) $\csc \alpha$ d) $\tan \alpha$

37. La expresión $1 + \tan^2 \alpha$ es igual a:

a) $\sec^2 \alpha$ b) $\sec \alpha$ c) $\csc^2 \alpha$ d) $\csc \alpha$

38. La expresión $\dfrac{1}{\cos \alpha}$ corresponde a:

a) $\cot \alpha$ b) $\sec \alpha$ c) $\csc \alpha$ d) $\tan \alpha$

39. En términos de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$, $\cot \theta$ es igual a:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos \theta}$ b) $\operatorname{sen}\theta \cos \theta$ c) $\csc \theta \sec \theta$ d) $\dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen}\theta}$

40. La expresión $1 + \cot^2\theta$ es igual a:

a) $\tan^2 \theta$ b) $\csc^2 \theta$ c) $\operatorname{sen}^2 \theta$ d) $\cos^2 \theta$

Lección 8

Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Función exponencial

Es de la forma $f(x) = a^x$ o $y = a^x$, donde a: constante, x: variable.

Ejemplo:

¿Cuál de las siguientes funciones es una función exponencial?

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2^x$ c) $f(x) = x + 1$ d) $f(x) = 3^2$

Solución:

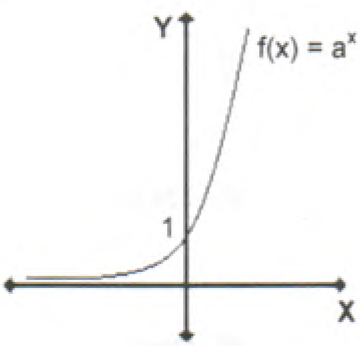
Una función exponencial es aquélla en la que la variable "x" es el exponente, por tanto la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Gráfica y propiedades de la función exponencial

Sea la función $f(x) = a^x$, entonces,

– Si $a > 1$

Gráfica



Propiedades

– La función es creciente.

– Interseca al eje Y en el punto (0,1).

– Es positiva para cualquier valor de "x".

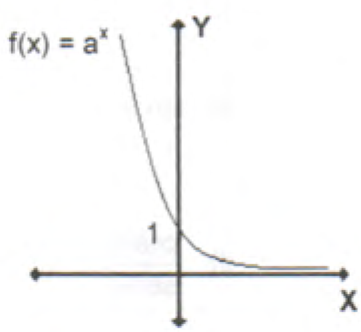
– El dominio son todos los reales, $x \in (-\infty, \infty)$.

– El rango es el intervalo $(0, \infty)$.

– Su asíntota es el eje X con ecuación $y = 0$.

– Si $0 < a < 1$

Gráfica



Propiedades

– La función es decreciente.

– Interseca al eje Y en el punto (0,1).

– Es positiva para cualquier valor de "x".

– El dominio son todos los reales, $x \in (-\infty, \infty)$.

– El rango es el intervalo $(0, \infty)$.

– Su asíntota es el eje X con ecuación $y = 0$.

Ecuación exponencial

Una ecuación exponencial es una igualdad en la que, la incógnita se encuentra como exponente.

Ejemplo 1

El valor de "x" en $3^{x+1} = 9$ es:

a) 2 b) – 1 c) – 2 d) 1

Solución:

El resultado 9 se expresa como 3^2,

$$3^{x+1} = 9 \quad \rightarrow \quad 3^{x+1} = 3^2$$

Para que la igualdad se cumpla, tanto la base como los exponentes deben ser iguales, entonces

$$x + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 - 1 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El valor de "x" en $2^{3x-1} = 32$, es:

a) 2 b) – 1 c) – 2 d) 1

Solución:

El resultado 32 se expresa como 2^5,

$$2^{3x-1} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{3x-1} = 2^5$$

Para que se cumpla la igualdad, las bases y los exponentes deben ser iguales, entonces:

$$3x - 1 = 5 \quad \rightarrow \quad 3x = 5 + 1 \quad \rightarrow \quad 3x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El valor de "y" en la ecuación $5^{2y+1} = \frac{1}{25}$, es:

a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

Solución:

El resultado se expresa como potencia de la base 5.

$$5^{2y+1} = \frac{1}{25} \quad \rightarrow \quad 5^{2y+1} = 5^{-2}$$

Se igualan los exponentes, y se despeja "y"

$$2y + 1 = -2 \quad \rightarrow \quad 2y = -2 - 1 \quad \rightarrow \quad 2y = -3 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

2. Función logarítmica

Es de la forma:

$$f(x) = \log_a x \quad \text{ó} \quad y = \log_a x$$

Donde:

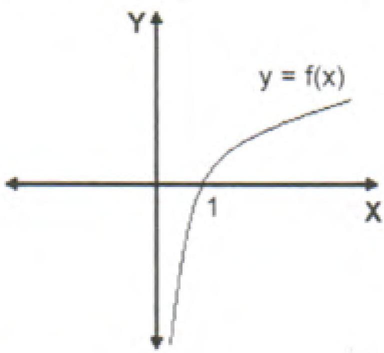
a = base, x = argumento o resultado, f(x) = y = exponente

Se lee:

El logaritmo en base "a" de "x" es igual al exponente f(x).

Gráfica y propiedades de la función logarítmica

Gráfica



Propiedades

– La función es creciente.

– Interseca al eje X en el punto (1,0).

– El dominio es el intervalo $(0, +\infty)$.

– El rango son todos los reales, $y \in (-\infty, +\infty)$.

– Su asíntota vertical es el eje Y con ecuación $x = 0$.

Representación de la función logarítmica en su forma exponencial

Forma logarítmica		Forma exponencial
$y = \log_a x$	$\leftrightarrow$	$a^y = x$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $\log_3 x = 2$, es:

a) $x^2 = 3$ b) $3^2 = x$ c) $2^3 = x$ d) $3^x = 2$

Solución:

Se transforma $\log_3 x = 2$ a su forma exponencial, la base (3) elevada al exponente (2) es igual a su argumento (x), por tanto,

$$\log_3 x = 2 \quad \rightarrow \quad 3^2 = x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\log_2 b = a$, es:

a) $a^2 = b$ b) $2^b = a$ c) $2^a = b$ d) $b^a = 2$

Solución:

La transformación del logaritmo es: La base (2) elevada al exponente (a) es igual al argumento (b)

$$\log_2 b = a \quad \rightarrow \quad 2^a = b$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La forma logarítmica de $x^2 = y$, es:

a) $\log_2 y = x$ b) $\log_x 2 = y$ c) $\log_x y = 2$ d) $\log_2 x = y$

Solución:

La transformación es: El logaritmo en base "x" de "y" es igual al exponente "2"

$$x^2 = y \quad \rightarrow \quad \log_x y = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Propiedades de los logaritmos

Sean A y B dos números positivos:

1) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

3) $\log_a A^n = n \log_a A$

4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$

5) $\log_a 1 = 0$

6) $\log_a a = 1$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $\log_a x^2y$, es:

a) $2(\log_a x + \log_a y)$ b) $2\log_a x + \log_a y$ c) $\log_a x + \log_a y$ d) $\log_a x + 2\log_a y$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_a x^2y = \log_a x^2 + \log_a y = 2\log_a x + \log_a y$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\log \frac{x^3}{y^2}$, es:

a) $3\log x - 2\log y$ b) $2\log x - 3\log y$ c) $\log 3x + \log 2y$ d) $\log 3x - \log 2y$

Solución:

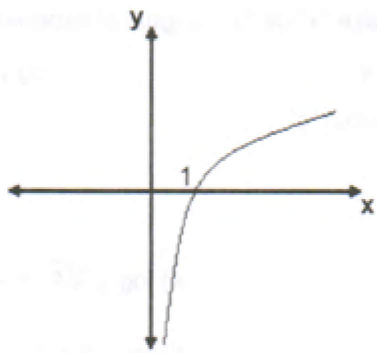
Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3\log x - 2\log y$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejercicios

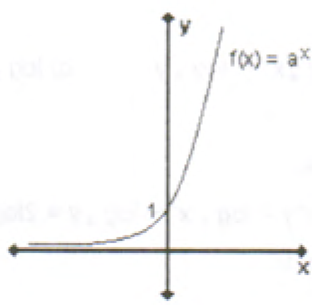
1. Según la figura:



¿Cuál es el dominio de la función?

a) $(-\infty, \infty)$ b) $(1, \infty)$ c) $(-\infty, 1)$ d) $(0, \infty)$

2. Según la figura



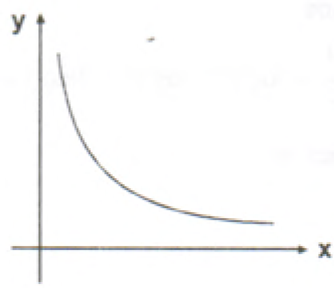
¿Cuál es el rango de la función?

a) $(1, \infty)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $(0, \infty)$ d) $(-\infty, \infty)$

3. La función exponencial es:

a) $f(x) = e^{-4}$ b) $f(x) = 2^x$ c) $f(x) = 4^b$ d) $f(x) = x^2$

4. Según la figura



La función que representa es:

a) Una función logarítmica creciente
b) Una función logarítmica decreciente
c) Una función exponencial creciente
d) Una función exponencial decreciente

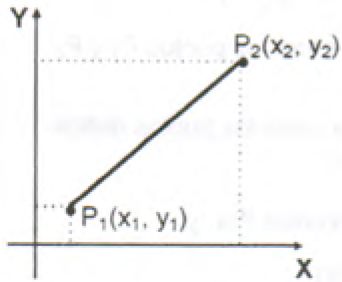
5. La función exponencial decreciente es:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^{-3}$ c) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = 3^4$

Lección 9

Recta

1. Distancia entre dos puntos



La distancia entre dos puntos del plano está dada por la fórmula:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la distancia entre los puntos A(– 1, 2) y B (5, 10)?

a) $\sqrt{10}$ u b) 50u c) 10u d) 100u

Solución:

Sustituyendo $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ y $(x_2, y_2) = (5, 10)$ en la fórmula de la distancia se obtiene:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{(5-(-1))^2 + (10-2)^2} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{(5+1)^2 + (10-2)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{36 + 64}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{100} = 10 \text{ unidades}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor positivo que debe tomar "x" para que la distancia entre los puntos A(x, –1) y B (1, 3) sea igual a 5 es:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6

Solución:

Sustituyendo $(x_2, y_2) = (x, -1)$, $(x_1, y_1) = (1, 3)$ y $\overline{AB} = 5$, en la fórmula de la distancia se obtiene:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \overline{AB} \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + (-1-3)^2} = 5 \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + (-4)^2} = 5$$

Elevando al cuadrado: $\left(\sqrt{(x-1)^2 + 16}\right)^2 = (5)^2$

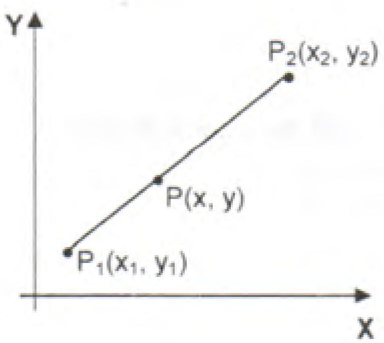
Despejando x:

$$(x-1)^2 + 16 = 25$$
$$(x-1)^2 = 25 - 16$$
$$(x-1)^2 = 9$$
$$x - 1 = \pm 3$$
$$x = 1 \pm 3$$
$$x = 1 + 3 \qquad x = 1 - 3$$
$$x = 4 \qquad x = -2$$

La respuesta correcta es el inciso "c".

2. Punto de división de un segmento en una razón dada

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento y $P(x, y)$ un punto que divide al segmento en dos partes proporcionales denominado punto de división.



Razón de proporcionalidad

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

- Si el punto de división P está entre los puntos P_1 y P_2 la razón es positiva.
- Si el punto de división no está entre los puntos dados entonces la razón es negativa.

Coordenadas del punto de división P(x, y)

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Ejemplo:

Dados los puntos $P_1(-2, 4)$ y $P_2(6, -2)$ ¿Cuáles son las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento en una razón $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = 3$?

a) $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ d) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

Solución:

Sustituyendo $(x_1, y_1) = (-2, 4)$, $(x_2, y_2) = (6, -2)$ y $r = 3$ en las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-2 + (3)(6)}{1 + 3} = \frac{-2 + 18}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{4 + (3)(-2)}{1 + 3} = \frac{4 - 6}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

El punto de división es $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Punto medio

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento formado por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en dos partes iguales están dadas por las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo 1

¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $P_1(-4, 1)$ y $P_2(2, 5)$?

a) $(-3, -2)$ b) $(3, -1)$ c) $(-1, 3)$ d) $(1, -3)$

Solución:

Sustituyendo en las fórmulas $(x_1, y_1) = (-4, 1)$ y $(x_2, y_2) = (2, 5)$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Las coordenadas del punto medio son: $(-1, 3)$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Las coordenadas del punto medio son (5, – 3), si uno de los extremos es el punto (6, 2). La abscisa del otro extremo es:

a) 8 b) 4 c) –4 d) –8

Solución:

Sustituyendo $x = 5$, $x_1 = 6$ en la fórmula $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ se obtiene:

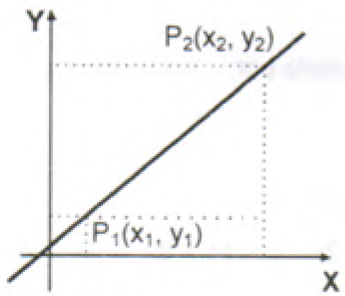
$$5 = \frac{6 + x_2}{2} \quad \rightarrow \quad (2)(5) = 6 + x_2$$

$$10 = 6 + x_2$$
$$10 - 6 = x_2$$
$$4 = x_2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

3. Pendiente

Se define como la tangente del ángulo de inclinación de una recta.



La pendiente "m" de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 se obtiene con la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (5, 8) y B (– 1 , 6)?

a) $-\frac{1}{3}$ b) 3 c) – 3 d) $\frac{1}{3}$

Solución:

Sustituyendo en la fórmula $(x_1, y_1) = (5, 8)$; $(x_2, y_2) = (-1, 6)$ se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 8}{-1 - 5} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La pendiente de una recta es $-\frac{1}{4}$, si pasa por el punto A(2, – 4) y el punto B cuya ordenada es – 6, ¿cuál es el valor de la abscisa de B?

a) – 10 b) – 2 c) 2 d) 10

Solución:

De acuerdo con los datos: $m = -\frac{1}{4}$, $(x_1, y_1) = (2, -4)$, $(x_2, y_2) = (x, -6)$, sustituyendo en la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{4} = \frac{-6 - (-4)}{x - 2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{4} = \frac{-2}{x - 2} \quad \rightarrow \quad -1(x - 2) = -2(4)$$

$$-x + 2 = -8$$
$$-x = -8 - 2$$
$$-x = -10$$
$$x = 10$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

4. Formas de la ecuación de la recta y sus gráficas

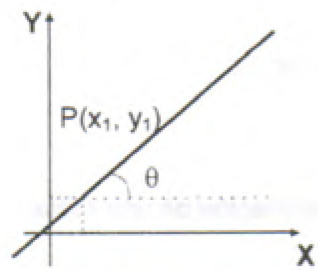
Línea recta

Es el lugar geométrico de todos los puntos tales que si se toman dos cualesquiera, el valor de la pendiente es constante.

La ecuación general de la recta está dada por:

$$Ax + By + C = 0 \text{ donde A, B y C son constantes.}$$

Caso I. La ecuación de la recta punto - pendiente



Dado un punto $P(x_1, y_1)$ de una recta con pendiente m, la ecuación de la recta está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, – 6) y su pendiente es 2?

a) $2x + y - 2 = 0$ b) $2x - y + 16 = 0$ c) $2x - y - 2 = 0$ d) $2x - y - 14 = 0$

Solución:

Sustituyendo el punto $(x_1, y_1) = (4, -6)$ y $m = 2$ en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$y - (-6) = 2(x - 4)$ (Simplificando)

$y + 6 = 2x - 8$ (Igualando con cero)

$2x - 8 - y - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - y - 14 = 0$

La ecuación de la recta es: $2x - y - 14 = 0$, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 7)$ y su pendiente es $-\frac{2}{3}$ es:

a) $2x + 3y - 15 = 0$ b) $2x - 3y + 15 = 0$ c) $2x - y - 23 = 0$ d) $2x + y + 23 = 0$

Solución:

Sustituyendo el punto $(x_1, y_1) = (-3, 7)$ y $m = -\frac{2}{3}$ en $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 7 = -\frac{2}{3}(x - (-3))$ (Simplificando)

$3(y - 7) = -2(x + 3)$

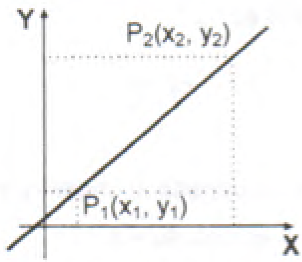
$3y - 21 = -2x - 6$ (Igualando a cero)

$2x + 6 + 3y - 21 = 0$

$2x + 3y - 15 = 0$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Caso II. La ecuación de la recta que pasa por dos puntos



Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ sobre una recta, su ecuación está dada por:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo:

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(– 2, 1) y B(– 10 , – 5)?

a) $4x - 3y + 19 = 0$ b) $3x - 4y + 19 = 0$ c) $4x + 3y - 10 = 0$ d) $3x - 4y + 10 = 0$

Solución:

Sustituyendo los puntos A(– 2, 1) y B(– 10 , – 5) en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{-5-1}{-10-(-2)}(x - (-2)) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{-6}{-8}(x + 2)$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$$

$$4(y - 1) = 3(x + 2)$$

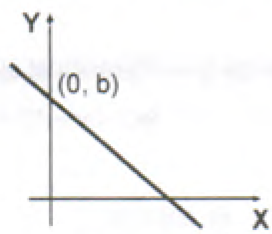
$$4y - 4 = 3x + 6$$

$$3x + 6 - 4y + 4 = 0$$

$$3x - 4y + 10 = 0$$

La ecuación de la recta es $3x - 4y + 10 = 0$, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Caso III. Forma pendiente – ordenada al origen de la ecuación de la recta



La ecuación pendiente ordenada al origen está dada por:

$$y = mx + b$$

Donde "m" es la pendiente y "b" la ordenada al origen.

Ejemplo 1

¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en – 6 y su pendiente es – 7?

a) $6x + y + 7 = 0$ b) $6x - y - 7 = 0$ c) $7x - y - 6 = 0$ d) $7x + y + 6 = 0$

Solución:

Sustituyendo los valores $m = -7$, $b = -6$ en la ecuación:

$$y = mx + b \quad \rightarrow \quad y = -7x - 6 \quad \rightarrow \quad 7x + y + 6 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El valor de la pendiente de la recta $5x - 4y - 8 = 0$ es:

a) $\frac{5}{4}$ b) $-\frac{5}{4}$ c) 5 d) -4

Solución:

Se transforma la ecuación a la forma pendiente - ordenada al origen, $y = mx + b$, despejando "y":

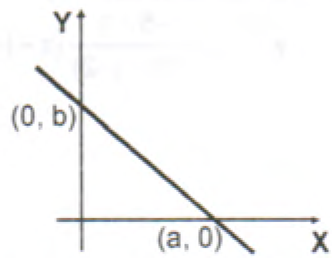
$$5x - 4y - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -4y = -5x + 8 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-5x+8}{-4}$$

$$y = \frac{-5}{-4}x + \frac{8}{-4}$$

$$y = \frac{5}{4}x - 2$$

De la ecuación $m = \frac{5}{4}$ y $b = -2$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Caso IV. Forma simétrica de la ecuación de la recta



Dadas las intersecciones con los ejes coordenados "X" y "Y", la ecuación de la recta en su forma simétrica está dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo:

¿Cuál es la ecuación de la recta en su forma simétrica que interseca al eje X en 3 y al eje Y en -4?

a) $3x - 4y - 12 = 0$ b) $4x + 3y - 12 = 0$ c) $4x - 3y - 12 = 0$ d) $3x + 4y - 12 = 0$

Solución:

Sustituyendo $a = 3$, $b = -4$ en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, se obtiene:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{4x - 3y}{12} = 1$$

$$4x - 3y = 12$$

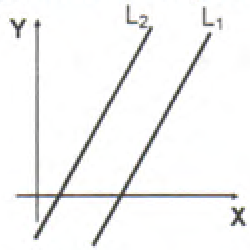
$$4x - 3y - 12 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

5. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Paralelismo

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.



Si $m_1 = m_2$ entonces $L_1 \parallel L_2$

Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, – 4) y B (8, – 6)?

a) $-\frac{2}{7}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $-\frac{7}{2}$

Solución:

Se obtiene la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(1 , – 4) y B (8, – 6), sustituyendo en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6-(-4)}{8-1} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$$

La pendiente de la recta paralela es $m = -\frac{2}{7}$, la respuesta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta $12x - 3y - 6 = 0$?

a) $y = 4x + 5$ b) $y = -4x + 5$ c) $y = \frac{1}{4}x + 5$ d) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

Solución:

Se transforma la ecuación $12x - 3y - 6 = 0$ a la forma $y = mx + b$, despejando "y":

$$12x - 3y - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad -3y = -12x + 6 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-12x+6}{-3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-12}{-3}x + \frac{6}{-3}$$

$$y = 4x - 2$$

$$y = mx + b$$

donde $m = 4$, $b = -2$

La pendiente de la recta es 4, la recta que tiene la misma pendiente es $y = 4x + 5$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos A(2, – 1) y B(– 4, 3)?

a) $y = \frac{3}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{3}{2}x - 1$ c) $y = \frac{2}{3}x - 1$ d) $y = -\frac{2}{3}x - 1$

Solución:

Se determina la pendiente de la recta que pasa por A y B: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-1)}{-4-2} = \frac{3+1}{-4-2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$,

luego, las ecuaciones de las rectas tienen la forma $y = mx + b$, la recta con la misma pendiente es: $y = -\frac{2}{3}x - 1$,

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La ecuación de la recta que pasa por el punto (– 3, 5) y que es paralela a la recta $2x - 3y + 4 = 0$ es:

a) $2x + 3y + 1 = 0$ b) $2x - 3y + 21 = 0$ c) $3x + 2y - 1 = 0$ d) $2x - 3y + 14 = 0$

Solución:

Se expresa la ecuación $2x - 3y + 4 = 0$ en la forma $y = mx + b$

$$2x - 3y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad -3y = -2x - 4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-2x-4}{-3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

La pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$.

Dado que la recta buscada es paralela, la pendiente será la misma, sustituyendo $m = \frac{2}{3}$ y el punto $(x_1, y_1) = (-3, 5)$ en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene:

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x - (-3)) \quad \rightarrow \quad 3(y-5) = 2(x+3) \quad \rightarrow \quad 3y - 15 = 2x + 6$$

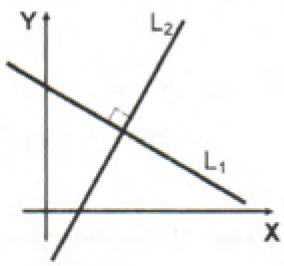
$$0 = 2x + 6 - 3y + 15$$

$$2x - 3y + 21 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es – 1.



Si $m_1 \cdot m_2 = -1$ entonces $L_1 \perp L_2$

Ejemplo 1

Si una recta tiene pendiente $\frac{5}{4}$, la pendiente de la recta perpendicular a ella es $-\frac{4}{5}$, ya que satisface la condición: $\left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -1$

Ejemplo 2

¿Cuál es la pendiente de la recta perpendicular a la recta que pasa por los puntos A (9, – 2) y B (– 9, 10)?

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{2}$

Solución:

Se obtiene la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(9 , – 2) y B (– 9, 10),

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-(-2)}{-9-(9)} = \frac{12}{-18} = -\frac{2}{3}$$

La pendiente de la recta perpendicular es el recíproco de la pendiente encontrada y de signo contrario, es decir

$$m_{\perp} = \frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $6x + 2y - 4 = 0$?

a) $y = 3x + 1$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = \frac{1}{3}x + 1$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Solución:

Se transforma la ecuación $6x + 2y - 4 = 0$ a la forma $y = mx + b$:

$$6x + 2y - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2y = -6x + 4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-6x + 4}{2}$$

$$y = \frac{-6}{2}x + \frac{4}{2}$$

$$y = -3x + 2$$

La pendiente de la recta es $m = -3$.

La recta perpendicular tiene como pendiente el recíproco de -3 y de signo contrario, es decir $m_{\perp} = \frac{1}{3}$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (3, 5) y (2, 1)?

a) $y = \frac{1}{4}x + 6$ b) $y = -\frac{1}{4}x + 6$ c) $y = 4x + 6$ d) $y = -4x + 6$

Solución:

Se determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos (3, 5) y (2, 1)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$$

La recta perpendicular es aquella de pendiente recíproca a 4 y de signo contrario, es decir, $m_{\perp} = -\frac{1}{4}$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -7)$ y que es perpendicular a la recta $3x - 4y - 8 = 0$ es:

a) $3x + 4y + 22 = 0$ b) $3x - 4y - 34 = 0$ c) $4x - 3y - 24 = 0$ d) $4x + 3y + 13 = 0$

Solución:

Se expresa la ecuación $3x - 4y - 8 = 0$ en la forma $y = mx + b$

$$3x - 4y - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -4y = -3x + 8 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-3x + 8}{-4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

La pendiente de la recta es $m = \frac{3}{4}$.

La pendiente de la recta perpendicular es el recíproco de $\frac{3}{4}$ y de signo contrario, es decir, $m_{\perp} = -\frac{4}{3}$.

Se determina la ecuación de la recta que pasa por $(2, -7)$ y tiene pendiente $-\frac{4}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - (-7) = -\frac{4}{3}(x - 2) \quad \rightarrow \quad 3(y + 7) = -4(x - 2) \quad \rightarrow \quad 3y + 21 = -4x + 8$$

$$4x - 8 + 3y + 21 = 0$$

$$4x + 3y + 13 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

6. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta $Ax + By + C = 0$ está dada por la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo:

La distancia del punto (2, 3) a la recta $3x - 4y - 9 = 0$ es:

a) 2 u b) 4 u c) 3 u d) 6 u

Solución:

Sustituyendo el punto y la recta en la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

La distancia es de 3 unidades, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

7. Rectas notables en el triángulo

- **Mediana**

Es la recta que pasa por un vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto.

- **Altura**

Es la recta que pasa por un vértice de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto.

- **Mediatriz**

Es la recta que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo y es perpendicular.

Ejemplo:

¿Cuál es la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A de un triángulo cuyos vértices son A (– 2, 3), B (4, – 6) y C (2, 8)?

a) $2x + 5y - 11 = 0$ b) $2x - 5y - 11 = 0$ c) $5x - 2y - 11 = 0$ d) $5x + 2y - 11 = 0$

Solución:

Se obtiene el punto medio del lado $\overline{BC}$ que es opuesto al vértice A con los vértices B(4, – 6) y C(2, 8)

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-6 + 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Las coordenadas del punto medio son: (3, 1)

Se sustituye el punto medio (3, 1) y el vértice A (– 2, 3) en la ecuación: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{3 - (-2)}(x - (-2)) \quad \rightarrow \quad y - 3 = \frac{-2}{5}(x + 2) \quad \rightarrow \quad 5(y - 3) = -2(x + 2)$$

$$5y - 15 = -2x - 4$$

$$2x + 4 + 5y - 15 = 0$$

$$2x + 5y - 11 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejercicios

1. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A (3, 4) y B (1, 8)?

a) 10 b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{10}$ d) 20

2. El valor positivo que debe tomar x para que la distancia entre los puntos A(– 1, 2) y B (x, 10) sea igual a 10 es:

a) 2 b) 10 c) 5 d) 2

3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos P_1(8 , 4) y P_2(6, – 2)?

a) (1, 3) b) (7, 1) c) (14, 2) d) (2, 2)

4. Las coordenadas del punto medio son (3, – 4), si uno de los extremos es (5, 10). El valor de x del otro extremo es:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 3

5. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (3, 4) y B (5, 8)?

a) $\frac{1}{2}$ b) -2 c) $-\frac{1}{2}$ d) 2

6. La pendiente de una recta es 5, si pasa por el punto A(3, 4) y el punto B cuya abscisa es 2, el valor de la ordenada de B es:

a) 3 b) 4 c) – 1 d) 1

7. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A(– 3, 5) y B (7, 6)?

a) $\sqrt{101}$ b) 101 c) 17 d) $\sqrt{17}$

8. El valor negativo que debe tomar "y", para que la distancia entre los puntos A(6, 10) y B (1, y) sea igual a 13 es:

a) – 4 b) – 3 c) – 2 d) – 4

9. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos P_1(5 , 2) y P_2(7, – 3)?

a) $\left(-\frac{1}{2},6\right)$ b) $\left(6,\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2},6\right)$ d) $\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

10. Las coordenadas del punto medio entre dos puntos son (2, 1), si uno de los extremos es (7, – 3). El valor de "y", del otro extremo es:

a) 2 b) – 2 c) 5 d) 12

11. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(– 1, 7) y B (5 , 1)?

a) 1 b) – 1 c) 2 d) – 2

12. La pendiente de una recta es $\frac{7}{10}$, si pasa por el punto P(6, 9) y el punto Q cuya abscisa es -4, el valor de la ordenada de Q es:

a) 9　　b) 6　　c) -4　　d) 2

13. El valor negativo que debe tomar "x" para que la distancia entre los puntos P(1, 1) y Q (x, -4) sea igual a $\sqrt{41}$ es:

a) -4　　b) -3　　c) -5　　d) -1

14. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos A (10 , -2) y B(1, -7)?

a) $\left(\frac{9}{2},-\frac{11}{2}\right)$　　b) $\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$　　c) $\left(-\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right)$　　d) $\left(\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right)$

15. Las coordenadas del punto medio son (6, 3),si uno de los extremos es (4, 5). Las coordenadas del otro extremo son:

a) (-8, 1)　　b) (8, -1)　　c) (-8, -1)　　d) (8, 1)

16. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (3, -4) y B (5, 1)?

a) $\frac{2}{5}$　　b) $-\frac{5}{2}$　　c) $-\frac{2}{5}$　　d) $\frac{5}{2}$

17. La pendiente de una recta es $-\frac{2}{3}$, si pasa por el punto M(2,$-$ 1) y el punto P cuya abscisa es $-$ 10, el valor de la ordenada de P es:

a) 7　　b) -7　　c) 2　　d) -1

18. La ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 6) y su pendiente es $\frac{1}{2}$ es:

a) $x - 2y + 11 = 0$　　b) $x - 2y - 11 = 0$　　c) $x + 2y + 11 = 0$　　d) $x + 2y - 11 = 0$

19. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(4, 5) y B(3 , -2)?

a) $10x + 7y - 5 = 0$　　b) $7x - y - 23 = 0$　　c) $10x + 7y + 5 = 0$　　d) $7x + y - 33 = 0$

20. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en 3 y pendiente 5?

a) $3x - y - 5 = 0$　　b) $3x + y + 5 = 0$　　c) $5x - y - 3 = 0$　　d) $5x - y + 3 = 0$

21. El valor de la pendiente de la recta $3x + 5y - 10 = 0$ es:

a) 3　　b) 5　　c) $-\frac{3}{5}$　　d) $\frac{3}{5}$

22. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje X en 6 y al eje Y en 7?

a) $7x + 6y - 42 = 0$　　b) $7x + 6y + 42 = 0$　　c) $6x - 7y + 42 = 0$　　d) $6x + 7y - 42 = 0$

23. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(2, -5) y B (3, -4)?

a) 1　　b) -1　　c) 3　　d) -3

24. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta $8x - 2y - 7 = 0$?

a) $y = -\frac{1}{4}x + 3$ b) $y = 4x + 3$ c) $y = -4x + 3$ d) $y = \frac{1}{4}x + 3$

25. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos $(5, -2)$ y $(-7, 8)$?

a) $y = -\frac{5}{6}x - 2$ b) $y = \frac{5}{6}x - 2$ c) $y = \frac{6}{5}x - 2$ d) $y = -\frac{6}{5}x - 2$

26. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 7)$ y que es paralela a la recta $3x - 5y + 15 = 0$ es:

a) $3x - 5y + 29 = 0$ b) $5x + 3y - 31 = 0$ c) $5x - 3y + 31 = 0$ d) $5x + 3y - 29 = 0$

27. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-3, 11)$ y $B(-1, 7)$?

a) -2 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

28. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $3x - 7y - 14 = 0$?

a) $y = -\frac{7}{3}x + 5$ b) $y = \frac{7}{3}x + 5$ c) $y = \frac{3}{7}x + 5$ d) $y = -\frac{3}{7}x + 5$

29. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la que pasa por los puntos $(8, -3)$ y $(2, 1)$?

a) $y = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $y = \frac{3}{2}x - 6$ c) $y = -\frac{2}{3}x - 6$ d) $y = \frac{2}{3}x - 6$

30. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -2)$ y que es perpendicular a la recta $2x - 9y - 18 = 0$ es:

a) $9x - 2y - 23 = 0$ b) $2x - 9y - 20 = 0$ c) $9x + 2y - 23 = 0$ d) $2x - 9y + 20 = 0$

31. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-6, -1)$ y su pendiente es $-\frac{3}{4}$ es:

a) $3x + 4y + 22 = 0$ b) $3x - 4y - 22 = 0$ c) $4x - 3y + 22 = 0$ d) $4x + 3y - 22 = 0$

32. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 7)$ y $Q(-10, -2)$?

a) $y = \frac{2}{3}x + 13$ b) $y = -\frac{2}{3}x - 13$ c) $y = \frac{3}{2}x + 13$ d) $y = -\frac{3}{2}x - 13$

33. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en 8 y pendiente -3?

a) $y = 3x - 8$ b) $y = -8x + 3$ c) $y = -3x + 8$ d) $y = 8x + 3$

34. El valor de la pendiente de la recta $3x + 5y - 9 = 0$ es:

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $-\frac{5}{3}$

35. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje X en 9 y al eje Y en -5?

a) $5x - 9y - 45 = 0$ b) $9x + 5y - 45 = 0$ c) $9x - 5y - 45 = 0$ d) $5x + 9y - 45 = 0$

36. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, – 4) y B (8, – 6)?

a) $y=\frac{2}{7}x+3$ b) $y=-\frac{2}{7}x+3$ c) $y=\frac{7}{2}x-3$ d) $y=-\frac{7}{2}x-3$

37. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta $7x-5y-15=0$?

a) $y=\frac{5}{7}x-1$ b) $y=-\frac{7}{5}x-1$ c) $y=-\frac{5}{7}x-1$ d) $y=\frac{7}{5}x-1$

38. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos (8, – 3) y (9, 4)?

a) $y=\frac{1}{7}x-3$ b) $y=-7x-8$ c) $y=7x-9$ d) $y=-\frac{1}{7}x+5$

39. La ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 8) y que es paralela a la recta $3x-2y+8=0$ es:

a) $y=\frac{3}{2}x+4$ b) $y=-\frac{3}{2}x+2$ c) $y=\frac{3}{2}x+5$ d) $y=-\frac{3}{2}x-1$

40. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(–6, 1) y B (4, 10)?

a) $\frac{9}{10}$ b) $-\frac{10}{9}$ c) $\frac{10}{9}$ d) $-\frac{9}{10}$

41. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $7x-3y-6=0$?

a) $y=\frac{7}{3}x-4$ b) $y=-\frac{3}{7}x-6$ c) $y=\frac{3}{7}x-2$ d) $y=-\frac{7}{3}x-1$

42. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la que pasa por los puntos (2 , 4) y (5, – 1)?

a) $y=\frac{3}{5}x$ b) $y=-\frac{5}{3}x$ c) $y=\frac{5}{3}x$ d) $y=-\frac{3}{5}x$

43. La ecuación de la recta que pasa por el punto (5, – 8) y que es paralela a la recta $8x-9y-3=0$ es:

a) $8x-9y-112=0$ b) $9x-8y-32=0$ c) $8x-9y-32=0$ d) $9x-8y-112=0$

44. La ecuación de la recta que pasa por el punto (7, 6) y su pendiente es $-\frac{1}{4}$ es:

a) $x+4y-31=0$ b) $x-4y-31=0$ c) $x-4y-34=0$ d) $x-4y+34=0$

45. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(–3, – 7) y Q(– 8,– 4)?

a) $3x-5y-44=0$ b) $3x+5y-44=0$ c) $3x+5y+44=0$ d) $3x-5y+44=0$

46. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en – 5 y pendiente – 2?

a) $5x+y-2=0$ b) $5x-y+2=0$ c) $2x-y-5=0$ d) $2x+y+5=0$

47. El valor de la pendiente de la recta $4x-7y-21=0$ es:

a) $\frac{7}{4}$ b) $-\frac{4}{7}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{7}{4}$

48. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje X en 6 y al eje Y en -4?

a) $4x - 6y - 12 = 0$ b) $2x - 3y - 12 = 0$ c) $2x + 3y + 12 = 0$ d) $4x + 6y - 12 = 0$

49. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(2, -8) y B (5, -10)?

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

50. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta $4x - 3y - 12 = 0$?

a) $y = \frac{3}{4}x - 10$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ c) $y = -\frac{3}{4}x - 1$ d) $y = \frac{4}{3}x + 6$

51. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos (12, -4) y (5, -7)?

a) $y = \frac{3}{7}x - 8$ b) $y = \frac{7}{3}x + 5$ c) $y = -\frac{3}{7}x - 6$ d) $y = -\frac{7}{3}x + 4$

52. La ecuación de la recta que pasa por el punto (6, -8) y que es paralela a la recta $7x - 5y + 1 = 0$ es:

a) $7x - 5y - 82 = 0$ b) $5x - 7y - 20 = 0$ c) $7x - 5y + 82 = 0$ d) $7x + 5y - 80 = 0$

53. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A (-8, -5) y B (4, 10)?

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $-\frac{4}{5}$ d) $-\frac{5}{4}$

54. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $8x - 2y - 10 = 0$?

a) $y = -\frac{1}{4}x - 7$ b) $y = 4x - 9$ c) $y = \frac{1}{4}x + 4$ d) $y = -4x + 3$

55. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la que pasa por los puntos (9 , -6) y (7, -3)?

a) $y = -\frac{3}{2}x + 6$ b) $y = \frac{2}{3}x - 3$ c) $y = \frac{3}{2}x + 4$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

56. La ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -1) y que es paralela a la recta $5x - 2y - 7 = 0$ es:

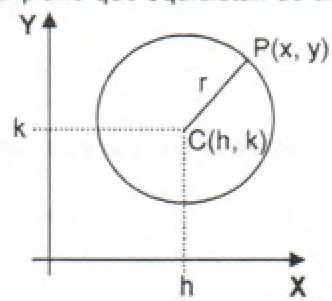
a) $y = \frac{5}{2}x + 6$ b) $y = -\frac{2}{5}x - 6$ c) $y = \frac{5}{2}x - 6$ d) $y = -\frac{2}{5}x + 6$

Lección 10

Circunferencia

1. Definición y elementos

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.



Ecuación de la circunferencia

- **Forma canónica**

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen (0, 0) y radio "r" está dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- **Forma ordinaria**

Dados el centro (h, k) y el radio "r", la ecuación está dada por la fórmula:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- **Forma general**

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = C$

Ejemplo 1

¿Cual de las siguientes ecuaciones representa una circunferencia?

a) $y^2 = 4x$ b) $x + 2y - 3 = 0$ c) $x^2 + y^2 = 9$ d) $x^2 + 2y^2 = 4$

Solución:

En la ecuación de la circunferencia los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales tanto en número como en signo, la opción correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (3, – 4) y radio igual a 6?

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$

Solución:

Sustituyendo las coordenadas del centro y el radio se obtiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = (6)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

La circunferencia en su forma general es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4 es:

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $x^2 + y^2 = 4$ c) $x^2 + y^2 = 8$ d) $x^2 + y^2 = 16$

Solución:

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen es: $x^2 + y^2 = r^2$, sustituyendo r = 4

$$x^2 + y^2 = 4^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

¿Cuál es el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 34 = 0$?

a) (4, – 5) b) (–4, 5) c) (5, 4) d) (5, – 4)

Solución:

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 34 = 0$$

Agrupando los términos: $(x^2 + 8x) + (y^2 - 10y) = -34$

Completando el trinomio cuadrado perfecto: $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 10y + 25) = -34 + 16 + 25$

Factorizando el centro tiene coordenadas (– 4, 5), $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 7$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

Las coordenadas del centro de la circunferencia $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 4$ son:

a) (2, – 6) b) (– 6, 2) c) (– 2, 6) d) (6, – 2)

Solución:

La ecuación está en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, las coordenadas del centro (h, k) son: (– 2, 6),

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 6

La ecuación $x^2 + y^2 = 36$, representa:

a) Una circunferencia de centro en el origen y radio 36
b) Una circunferencia de centro en el origen y radio 6
c) El punto (0, 36)
d) El punto (0, 6)

Solución:

La ecuación tiene la forma $x^2 + y^2 = r^2$, la cual representa una circunferencia de centro en el origen, entonces

$$r^2 = 36 \quad \rightarrow \quad r = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejercicios

1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (2, –6) y radio igual a 8?

a) $x^2 + y^2 - 4x + 12y - 24 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 54 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 54 = 0$

2. ¿Cuál es el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 40 = 0$?

a) (– 3, – 6) b) (3, 6) c) (– 3, 6) d) (3, – 6)

3. Las coordenadas del centro de la circunferencia $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$ son:

a) (3, – 2) b) (–3, – 2) c) (3, 2) d) (–3, 2)

4. La ecuación $x^2 + y^2 = 25$, representa:

a) Circunferencia con centro en el origen y radio 25 unidades.
b) Circunferencia con centro en el origen y radio 5 unidades.
c) Parábola con vértice en el origen y foco (5, 0)
d) Parábola con vértice en el origen y foco (0, 5)

5. La ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 7 está representada por:

a) $x^2 + y^2 = 7$ b) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$ c) $x^2 + y^2 = 49$ d) $x^2 + y^2 = \frac{7}{2}$

6. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (– 4, – 2) y radio igual a 7?

a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 29 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 29 = 0$

7. ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 22 = 0$?

a) Centro (– 5, – 1), radio 4
b) Centro (5, 1), radio 4
c) Centro (5, 1), radio 2
c) Centro (– 5, – 1), radio 2

8. Las coordenadas del centro de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 81$ son:

a) (1, – 2) b) (– 1, – 2) c) (1, 2) d) (– 1, 2)

9. La ecuación $x^2 + y^2 = 9$, representa:

a) Parábola con vértice en el origen y foco (– 3, 0)
b) Parábola con foco en el origen y vértice (0, –3)
c) Circunferencia con centro en el origen y radio 3 unidades.
d) Circunferencia con centro en el origen y radio 9 unidades.

10. La ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 10 está representada por:

a) $x^2 + y^2 = 5$ b) $x^2 + y^2 = 100$ c) $x^2 + y^2 = 10$ d) $x^2 + y^2 = \sqrt{10}$

11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (3, – 8) y radio igual a 10?

a) $x^2 + y^2 + 6x + 16y + 27 = 0$
b) $x^2 - y^2 - 6x + 16y - 27 = 0$
c) $x^2 - y^2 + 6x + 16y + 27 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 27 = 0$

12. ¿Cuál es el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$?

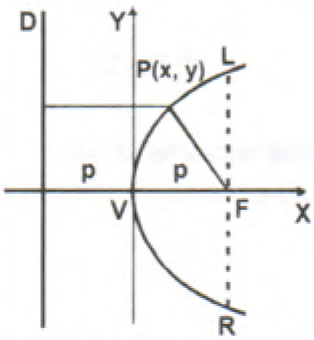
a) (– 3, – 4) b) (3, 4) c) (3, – 4) d) (– 3, 4)

Lección 11

Parábola

1. Definición y elementos

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la distancia a un punto fijo llamado foco equidista de una recta fija llamada directriz.



Elementos

V: Vértice

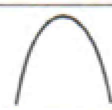
F: Foco

D: Directriz

LR: Lado recto, LR = $|4p|$

p: Parámetro
(Distancia del vértice al foco o a la directriz)

De acuerdo al signo del parámetro, se determina la concavidad de la parábola según:

	"p" es positivo	"p" es negativo
Horizontal		
Vertical		

2. Fórmulas

- **Parábola horizontal con vértice en el origen**
  - Su eje focal coincide con el eje X ($y = 0$).
  - Su ecuación canónica es: $y^2 = 4px$.
  - Foco: $F(p, 0)$.
  - Directriz: $x + p = 0$.

- **Parábola vertical con vértice en el origen**
  - Su eje focal coincide con el eje Y ($x = 0$).
  - Su ecuación canónica es: $x^2 = 4py$.
  - Foco: $F(0, p)$.
  - Directriz: $y + p = 0$.

- **Parábola horizontal con vértice fuera del origen**
  - Su eje focal es paralelo al eje X.
  - Su ecuación ordinaria es: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.
  - Vértice: (h, k).
  - Foco: $F(h + p, k)$.
  - Directriz: $x - h + p = 0$.

- **Parábola horizontal con vértice fuera del origen**
  - Su eje focal es paralelo al eje Y.
  - Su ecuación ordinaria es: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.
  - Vértice: (h, k).
  - Foco: $F(h, k + p)$.
  - Directriz: $y - k + p = 0$.

- **Ecuación general de la parábola**

Horizontal: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; Vertical: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una parábola?

a) $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ c) $3y^2 - x - 6y - 1 = 0$

b) $x^2 - y^2 = 9$ d) $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 21 = 0$

Solución:

Si la ecuación tiene un solo término cuadrático ya sea en "x" o en "y", la ecuación es una parábola, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El foco de la parábola $y^2 = -8x$ tiene sus coordenadas en:

a) F(0, – 2) b) F(– 2, 0) c) F(2, 0) d) F(0, 2)

Solución:

La parábola $y^2 = -8x$ tiene la forma $y^2 = 4px$ que representa una parábola horizontal, donde

$$4p = -8 \quad \rightarrow \quad p = \frac{-8}{4} = -2$$

Su foco es el punto (p,0), entonces:

$$F(-2, 0)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

La ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz la recta $y - 3 = 0$, es:

a) $x^2 = 12y$ b) $y^2 = -12x$ c) $y^2 = 12x$ d) $x^2 = -12y$

Solución:

La directriz $y - 3 = 0$ corresponde a una parábola vertical y tiene la forma $y + p = 0$, entonces:

$$p = -3$$

La ecuación es $x^2 = 4py$, por tanto:

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad x^2 = 4(-3)y \quad \rightarrow \quad x^2 = -12y$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco el punto (– 4, 0) es:

a) $x^2 = -16y$ b) $y^2 = -16x$ c) $y^2 = 16x$ d) $x^2 = 16y$

Solución:

Las coordenadas del foco tienen la forma (p, 0), entonces la parábola es horizontal con ecuación $y^2 = 4px$ por tanto, $p = -4$ y la ecuación es:

$$y^2 = 4px \quad \rightarrow \quad y^2 = 4(-4)x \quad \rightarrow \quad y^2 = -16x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

Las coordenadas del vértice de la parábola $(x - 2)^2 = 8(y - 2)$ son:

a) V(2, 2) b)V(– 2, 2) c) V(2, – 2) d) V(– 2, – 2)

Solución:

La ecuación de la parábola tiene la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ y el vértice tiene coordenadas (h, k), entonces:

$$-h = -2 \qquad\qquad -k = -2$$
$$h = 2 \qquad\qquad k = 2$$

Las coordenadas del vértice son V(2, 2), la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

Las coordenadas del vértice de la parábola $(y - 4)^2 = -16x - 48$ son:

a) (3, – 4) b) (– 3, 4) c) (4, – 3) d) (– 4, 3)

Solución:

Se factoriza la expresión del lado derecho:

$$(y - 4)^2 = -16x - 48 \quad \rightarrow \quad (y - 4)^2 = -16(x + 3)$$

La ecuación tiene la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, entonces:

$$-k = -4 \qquad\qquad -h = 3$$
$$k = 4 \qquad\qquad h = -3$$

Las coordenadas del vértice son (h, k) = (– 3, 4), la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 7

Las coordenadas del foco de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 12x - 6y + 21 = 0$

a) F(3, –4) b) F(4, –3) c) F(4, 3) d) F(–4, 3)

Solución:

Se agrupan los términos en "y" y se completa el trinomio cuadrado perfecto:

$$y^2 - 12x - 6y + 21 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 6y = 12x - 21$$
$$y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 12x - 21 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$y^2 - 6y + 9 = 12x - 21 + 9$$
$$(y - 3)^2 = 12x - 12$$
$$(y - 3)^2 = 12(x - 1)$$

La ecuación tiene la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, entonces:

$$-k = -3 \qquad\qquad -h = -1 \qquad\qquad 4p = 12$$
$$k = 3 \qquad\qquad h = 1 \qquad\qquad p = 3$$

La parábola es horizontal y las coordenadas del foco son:

$$(h + p, k) = (1 + 3, 3) = (4, 3)$$

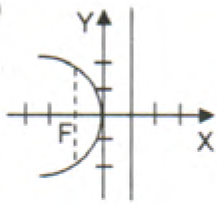
La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

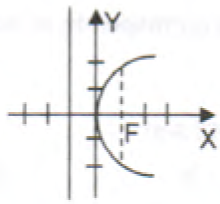
Ejercicios

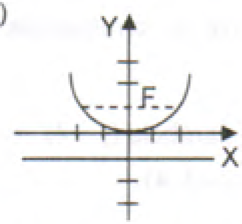
1. ¿Cuál es la ecuación de la parábola cuyo vértice se encuentra en el origen y su foco es el punto (0, –3)?

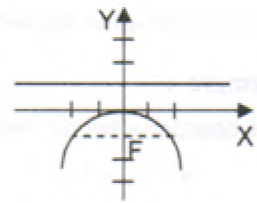
a) $y^2 = -12x$ b) $y^2 = 12x$ c) $x^2 = 12y$ d) $x^2 = -12y$

2. ¿Cuál es la gráfica de la parábola $y^2 + 4x = 0$?

a)


b)


c)


d)


3. La ecuación de una parábola es $y^2 = 3x$, ¿Cuáles son las coordenadas de su foco?

a) $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ b) $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ c) $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ d) $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

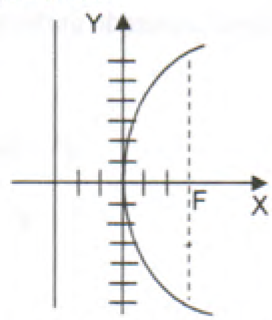
4. Una parábola tiene su vértice en el origen y la ecuación de su directriz es $y + 4 = 0$, ¿Cuál es su ecuación?

a) $y^2 + 16x = 0$ b) $x^2 + 16y = 0$ c) $x^2 = 16y$ d) $y^2 = 16x$

5. Una parábola tiene su vértice en el origen y su eje coincide con el eje "y",¿cuál es su ecuación si la parábola pasa por el punto (4, –8)?

a) $y^2 + 2x = 0$ b) $x^2 + 2y = 0$ c) $x^2 - 2y = 0$ d) $y^2 - 2x = 0$

6. La ecuación de la parábola cuya gráfica es:



a) $y^2 = 12x$ b) $y^2 = -12x$ c) $x^2 = 12y$ d) $x^2 = -12y$

7. Las coordenadas del vértice de la parábola $(y - 1)^2 = 6x + 18$, es:

a) (1, –3) b) (–3, 1) c) (3, –1) d) (–1, 3)

8. Las coordenadas del foco de la parábola $(x - 2)^2 = 8y$

a) (2, –2) b) (– 2, 2) c) (–2, –2) d) (2, 2)

9. La ecuación de la parábola con vértice en el punto (1, 2) y foco en el punto (1, 6) es:

a) $(x-1)^2 = 16(y-2)$ b) $(x+1)^2 = 16(y+2)$ c) $(x-1)^2 = 16(y+2)$ d) $(x+1)^2 = 16(y-2)$

10. La ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = 8x + 8$

a) $x - 3 = 0$ b) $y - 3 = 0$ c) $x + 3 = 0$ d) $y + 3 = 0$

11. La longitud del lado recto de la parábola $x^2 - 12y + 6x - 9 = 0$, es:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12

12. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola $y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$?

a) (0, −1) b) (0, 1) c) (1, 0) d) (−1, 0)

13. Las coordenadas del foco de la parábola $x^2 - 2x - 6y + 4 = 0$ son:

a) (2, 1) b) (− 1, 2) c) (1, 2) d) (2, −1)

14. La ecuación de la parábola con vértice en el punto (−1, 3) y directriz la recta $x - 2 = 0$, es:

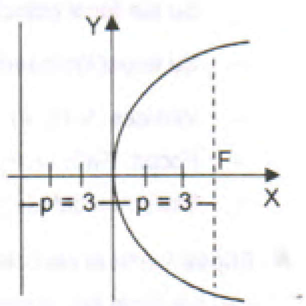
a) $x^2 - 12y - 6x + 21 = 0$ b) $y^2 + 12x - 6y + 21 = 0$

c) $y^2 - 12x + 6y - 21 = 0$ d) $x^2 + 12y - 6x + 21 = 0$

15. Una parábola tiene por ecuación $y^2 - 4x + 8 = 0$, ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?

a) (0,2) b) (0, −2) c) (− 2, 0) d) (2, 0)

16. En la siguiente parábola



¿Cuál es la longitud del lado recto?

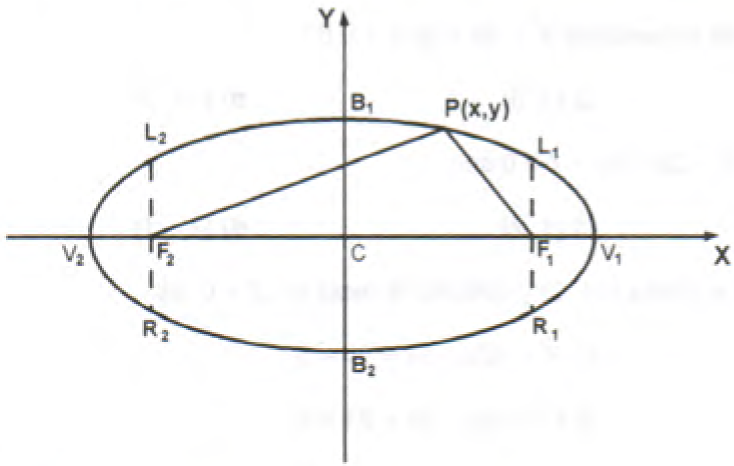
a) 6 b) 12 c) 9 d) 3

Lección 12

Elipse

1. Definición y elementos

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre constante.



C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ (lado recto)

2. Fórmulas

Elipse horizontal con centro en el origen

- Su eje focal coincide con el eje X.
- Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(a, 0)$, $V_2(-a, 0)$.
- Focos: $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

Elipse vertical con centro en el origen

- Su eje focal coincide con el eje Y.
- Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$.
- Focos: $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(b, 0)$, $B_2(-b, 0)$.

Elipse horizontal con centro en el punto (h, k)

- Su eje focal es paralelo al eje X.
- Su ecuación ordinaria es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(h + a, k)$, $V_2(h - a, k)$.
- Focos: $F_1(h + c, k)$, $F_2(h - c, k)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(h, k + b)$, $B_2(h, k - b)$.

Elipse vertical con centro en el punto (h, k)

- Su eje focal es paralelo al eje Y.
- Su ecuación ordinaria es: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(h, k + a)$, $V_2(h, k - a)$.
- Focos: $F_1(h, k + c)$, $F_2(h, k - c)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(h + b, k)$, $B_2(h - b, k)$.

Ecuación general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

con $A \neq C$ y de igual signo.

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una elipse?

a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 + y^2 = 4$ c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

Solución:

Para que una ecuación represente una elipse, los coeficientes de los términos cuadráticos deben ser diferentes y de igual signo,

a) $y^2 = 4x$, solo tiene un término al cuadrado, representa una parábola.

b) $x^2 + y^2 = 4$, los coeficientes son iguales y de igual signo, representa una circunferencia.

c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, los coeficientes son diferentes y de igual signo, representa una elipse.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Las coordenadas de los vértices de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, son:

a) $(-5, 0)$ $(5, 0)$ b) $(0, -5)$ $(0, 5)$ c) $(-4, 0)$ $(4, 0)$ d) $(0, -4)$ $(0, 4)$

Solución:

Para determinar los elementos de una elipse se deben tomar en cuenta las siguientes condiciones:

– Una elipse es horizontal, si el mayor de los denominadores se encuentra debajo de "x^2".

– Una elipse es vertical, si el mayor de los denominadores se encuentra debajo de "y^2".

Por tanto, la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ es vertical con centro en el origen y tiene la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, entonces:

$$a^2 = 25 \quad ; \quad b^2 = 16$$
$$a = 5 \qquad\quad b = 4$$

Las coordenadas de los vértices son:

$$(0, -a), (0, a) = (0, -5), (0, 5)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

¿Cuál es la longitud del lado recto de la elipse cuya ecuación es $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$?

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{8}{3}$ c) 4 d) 9

Solución:

Se transforma la ecuación a su forma canónica:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

La elipse es horizontal ya que el mayor de los denominadores se encuentra debajo de "x^2" y tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, por tanto:

$$a^2 = 9, a = 3 \quad ; \quad b^2 = 4, b = 2$$

el lado recto se define por:

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

La forma ordinaria de la ecuación $5x^2 + 9y^2 + 30x - 36y + 36 = 0$ es:

a) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ c) $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ d) $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Solución:

$5x^2 + 9y^2 + 30x - 36y + 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 5x^2 + 30x + 9y^2 - 36y = -36$

$$5(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36$$

$$5(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 45 + 36$$

$$5(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 45$$

dividiendo por 45 $\quad \frac{5(x+3)^2}{45} + \frac{9(y-2)^2}{45} = \frac{45}{45}$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 5

Las coordenadas de los focos de la ecuación $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, son:

a) (3, 3), (3, – 5) b) (4, 0)(– 4, 0) c) (3, 3), (– 5, 3) d) (0, 4), (0, – 4)

Solución:

La elipse es horizontal y es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El centro tiene coordenadas en (– 1, 3), a = 5 y b = 3, para determinar "c" se utiliza la condición:

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad (5)^2 = (3)^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 25 = 9 + c^2$

$$25 - 9 = c^2$$

$$16 = c^2$$

$$c = 4$$

Las coordenadas de los focos son:

$(h + c, k) = (-1 + 4, 3) = (3, 3) \quad ; \quad (h - c, k) = (-1 - 4, 3) = (-5, 3)$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 6

La ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4, 0), (– 4, 0) y focos los puntos (3, 0), (– 3, 0) es:

a) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$ d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Solución:

Los vértices y los focos son de la forma: (± a, 0) y (± c, 0), por tanto a = 4, c = 3, se aplica la condición para obtener el valor de "b".

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

La elipse es horizontal con centro en el origen con ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. La longitud del eje mayor de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ es:

a) 32 b) 4 c) 16 d) 8

2. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la elipse $x^2+\frac{y^2}{4}=1$?

a) (0, 2) y (0, – 2) b) (2, 0) y (– 2, 0) c) (0, 1) y (0, – 1) d) (1, 0) y (– 1, 0)

3. Una elipse tiene su centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0, 5) y uno de sus focos es el punto (0, 4), ¿cuál es su ecuación?

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

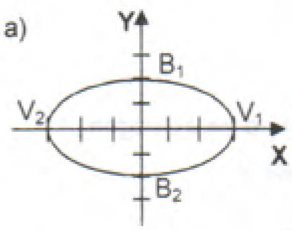
4. ¿Cuáles son las coordenadas de los focos de la elipse $4x^2+9y^2=36$?

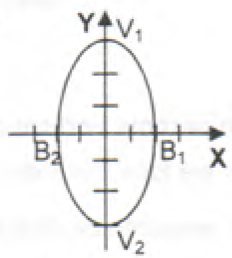
a) $(0, \sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5})$ b) $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$ c) (2, 0) y (– 2, 0) d) (0, 2) y (0, – 2)

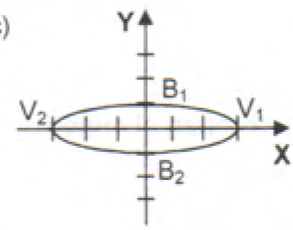
5. La excentricidad de la elipse $x^2+3y^2=1$

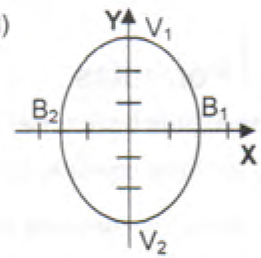
a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

6. ¿Cuál es la gráfica de la elipse $9x^2+4y^2=36$?

a) 

b) 

c) 

d) 

7. La excentricidad de una elipse es $\frac{3}{5}$ y las coordenadas de sus focos son los puntos (0, 3) y (0, –3), ¿Cuál es la longitud de uno de sus lados rectos?

a) $\frac{32}{5}$ b) $\frac{16}{5}$ c) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{5}{32}$

8. Una elipse tiene como ecuación $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$, ¿Cuáles son las coordenadas de su centro?

a) (– 1, – 3) b) (1, – 3) c) (1, 3) d) (– 1, 3)

9. La longitud del lado recto de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ es:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{8}{3}$

10. La ecuación de la elipse con centro en el punto (1, 0), vértice y foco en (4, 0) y (3, 0) respectivamente es:

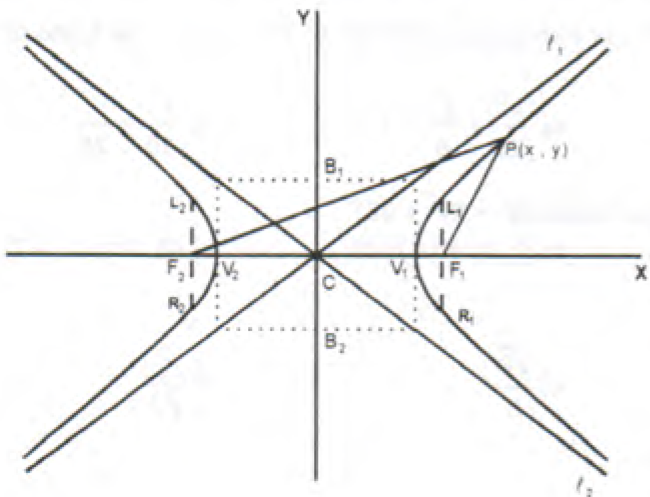
a) $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ c) $\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

Lección 13

Hipérbola

1. Definición y elementos

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre constante.



C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ (lado recto)

l_1 y l_2: Asíntotas

2. Fórmulas

Hipérbola horizontal con centro en el origen

– Su eje focal coincide con el eje X.

– Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(a, 0)$, $V_2(-a, 0)$.

– Focos: $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

– Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Hipérbola vertical con centro en el origen

– Su eje focal coincide con el eje Y.

– Su ecuación canónica es: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$.

– Focos: $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(b, 0)$, $B_2(-b, 0)$.

– Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Hipérbola horizontal con centro en (h, k)

– Su eje focal es paralelo al eje X.

– Su ecuación ordinaria es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(h + a, k)$, $V_2(h - a, k)$.

– Focos: $F_1(h + c, k)$, $F_2(h - c, k)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(h, k + b)$, $B_2(h, k - b)$.

– Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$.

Hipérbola vertical con centro en (h, k)

– Su eje focal es paralelo al eje Y.

– Su ecuación ordinaria es: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(h, k + a)$, $V_2(h, k - a)$.

– Focos: $F_1(h, k + c)$, $F_2(h, k - c)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(h + b, k)$, $B_2(h - b, k)$.

– Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$.

Ecuación general: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con A y C de signo diferente.

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una hipérbola?

a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 9$ c) $x^2 = 8y$ d) $4x^2 - 9y^2 = 36$

Solución:

Para que una ecuación represente una hipérbola, los coeficientes de los términos cuadráticos deben tener signos diferentes:

$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, los coeficientes de los términos cuadráticos son diferentes pero del mismo signo, representa una elipse.

$x^2 + y^2 = 9$, los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales y del mismo signo, representa una circunferencia.

$x^2 = 8y$, sólo una variable se encuentra al cuadrado, representa una parábola.

$4x^2 - 9y^2 = 36$, los coeficientes de los términos cuadráticos son de diferente signo, representa una hipérbola.

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Las coordenadas de los vértices de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ son:

a) $V_1(0, 4), V_2(0, -4)$ c) $V_1(0, 3), V_2(0, -3)$

b) $V_1(3, 0), V_2(-3, 0)$ d) $V_1(4, 0), V_2(-4, 0)$

Solución:

La ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, por tanto es horizontal con centro en el origen, entonces:

$$a^2 = 9,\ a = 3 \quad ; \quad b^2 = 16,\ b = 4$$

Los vértices tienen coordenadas $V_1(a, 0), V_2(-a, 0) = V_1(3, 0), V_2(-3, 0)$, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Las coordenadas de los focos de la hipérbola $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$, son:

a) $F_1(1, 2), F_2(1, -6)$ c) $F_1(1, 3), F_2(1, -7)$

b) $F_1(6, -2), F_2(-4, -2)$ d) $F_1(4, -2), F_2(-2, -2)$

Solución:

La ecuación tiene la forma $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, por tanto es vertical con centro en (h, k), entonces:

$$C(h, k) = C(1, -2) \quad ; \quad a^2 = 16,\ a = 4 \quad \text{y} \quad b^2 = 9,\ b = 3$$

Se aplica la condición $c^2 = a^2 + b^2$, para encontrar el valor de "c".

$$c^2 = 16 + 9 \quad \rightarrow \quad c^2 = 25 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{25} = 5$$

Las coordenadas de los focos son: $F_1(h, k + c), F_2(h, k - c)$

$$F_1(1, -2 + 5) = F_1(1, 3) \quad ; \quad F_2(1, -2 - 5) = F_2(1, -7)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

Al transformar la ecuación $x^2 - 4y^2 = 16$ a su forma canónica, se obtiene:

a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ c) $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{16} = 1$ d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solución:

Se divide la ecuación por 16.

$$x^2 - 4y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

Las coordenadas del centro y el valor del semieje transverso de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ son:

a) $C(-1, -3)$, $a = 3$ c) $C(-3, -1)$, $a = 2$

b) $C(-3, -1)$, $a = 3$ d) $C(-1, -3)$, $a = 2$

Solución:

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$9x^2 - 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 9x^2 + 18x - 4y^2 - 24y = -9$$

Factorizando $9(x^2 + 2x) - 4(y^2 + 6y) = -9$

Completando el T.C.P $9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 + 6y + 9) = -9 + 9 - 36$

$$9(x + 1)^2 - 4(y + 3)^2 = -36$$

Se divide la expresión por -36 $\frac{9(x+1)^2}{-36} - \frac{4(y+3)^2}{-36} = \frac{-36}{-36}$

$$-\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

El centro $C(h, k) = C(-1, -3)$, $a^2 = 9$, $a = 3$, por tanto, el semieje transverso es $a = 3$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

La ecuación de la hipérbola con semieje transverso = 2, semieje conjugado = 5 y las coordenadas de sus vértices los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 1)$, es:

a) $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ c) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

Solución:

Semieje transverso es $a = 2$ y Semieje conjugado es $b = 5$

El centro es el punto medio entre los vértices: $C\left(\frac{4-2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1, 1)$

La hipérbola es horizontal por que el eje transverso es paralelo al eje X, entonces:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{(2)^2} - \frac{(y-1)^2}{(5)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejercicios

1. La ecuación de los vértices de la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ son:

a) (0, −2) y (0, 2) b) (−3, 0) y (3, 0) c) (0, −3) y (0, 3) d) (−2, 0) y (2, 0)

2. Una hipérbola tiene su centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0, 4) y uno de sus focos el punto (0, − 5), ¿Cuál es su ecuación?

a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ c) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

3. Obtener las coordenadas de los focos de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 2$.

a) $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$ b) (−1, 0) y (1, 0) c) $(0, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$ d) (0, − 1) y (0, 1)

4. ¿Cuál es la longitud del eje transverso de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 20$?

a) 2 b) 4 c) 8 d) 10

5. Una hipérbola tiene su centro en el punto (−3, 2), uno de sus vértices es el punto (1, 2) y la longitud de su eje imaginario es 4, ¿cuál es su ecuación?

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ b) $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ c) $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ d) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

6. ¿cuál es la coordenada del centro de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 16x + 2y + 11 = 0$?

a) (1, 2) b) (−1, −2) c) (− 2, 1) d) (2, 1)

7. Las coordenadas de los focos de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 54x + 117 = 0$, son:

a) $(-3, -\sqrt{13})$, $(-3, \sqrt{13})$ b) $(3, -\sqrt{13})$, $(3, \sqrt{13})$ c) $(-\sqrt{13}, -3)$, $(\sqrt{13}, 3)$ d) $(-\sqrt{13}, -3)$, $(-\sqrt{13}, 3)$

8. La longitud del lado recto de la hipérbola $25y^2 - 16x^2 = 400$ es:

a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{32}{5}$ d) $\frac{32}{10}$

9. La ecuación de una hipérbola es $\frac{x^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, las ecuaciones de sus asíntotas son:

a) $3x + 4y - 4 = 0$, $4x - 3y - 4 = 0$ c) $3x + 4y + 4 = 0$, $3x - 4y - 4 = 0$

b) $4x - 3y - 4 = 0$, $4x + 3y + 4 = 0$ d) $3x - 4y + 4 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$

10. Las coordenadas de los focos de la hipérbola $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ son:

a) (3, 0), (−5, 0) b) (−3, 0), (5, 0) c) (0, −3), (0, 5) d) (0, 3), (0, −5)

Lección 14

Ecuación general de 2do grado

1. Identificación de una ecuación general de 2do grado

La naturaleza de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se identifica con la expresión $I = B^2 - 4AC$, que recibe el nombre de indicador o invariante.

- Si $B = 0$, entonces se genera la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la cual representa:
  - Circunferencia, si $A = C$.
  - Parábola, si A ó C = 0.
  - Elipse, si $A \neq C$ pero del mismo signo.
  - Hipérbola, si A y C tienen signos contrarios.

Ejemplos:

$2x^2 + 2y^2 = 7$ Circunferencia

$x^2 = 8y$ Parábola

$3x^2 + 4y^2 = 12$ Elipse

$y^2 - x^2 = 1$ Hipérbola

- Si $B \neq 0$, entonces, la cónica representa:
  - Parábola si $I = 0$
  - Elipse si $I < 0$
  - Hipérbola si $I > 0$

Ejemplo 1

La curva $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 40x + 20y = 0$, representa una:

a) Circunferencia b) Recta c) Hipérbola d) Parábola

Solución:

Se toman los valores:

$$A = 2,\ B = -4 \ \text{y}\ C = 2$$

Se evalúan en la fórmula del indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

$$I = 0$$

La curva representa una parábola y la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La naturaleza de la curva $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y - 2 = 0$ es:

a) Parábola b) Elipse c) Hipérbola) Paraboloide

Solución:

De la ecuación:

$$A = 3,\ B = 2 \ \text{y}\ C = 3$$

Los valores se sustituyen en el indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(3)(3) = 4 - 36 = -32$$

$$I < 0$$

La curva representa una elipse y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejercicios

1. La curva cuya ecuación es $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$, representa una:

a) Elipse b) Parábola c) Hipérbola d) Circunferencia

2. ¿Qué curva representa la ecuación $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$?

a) Hipérbola b) Elipse c) Parábola d) Circunferencia

3. La curva $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 2y - 13 = 0$ representa una:

a) Circunferencia b) Hipérbola c) Elipse d) Parábola

4. Es la ecuación de una elipse

a) $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ b) $xy = 4$ c) $3x^2 - xy + y^2 + x - y = 0$ d) $x^2 + 3xy - y^2 + 2x = 0$

5. La curva $xy = 3$ representa una:

a) Hipérbola b) Parábola c) Elipse d) Circunferencia

6. Es la ecuación de una parábola

a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ b) $x^2 = 4y$ c) $y^2 - x^2 = 1$ d) $3x^2 + 4y^2 = 12$

7. La ecuación $4x^2 + 5y^2 - 2x = 0$, representa una:

a) Parábola b) Hipérbola c) Elipse d) Circunferencia

8. Es la ecuación de una hipérbola:

a) $x^2 - 3y^2 - 27 = 0$ b) $2x^2 + 2y^2 - 8 = 0$ c) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ d) $y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

9. La curva $x^2 + xy - 2y^2 - 3x = 0$

a) Circunferencia b) Hipérbola c) Parábola d) Elipse

10. La curva $x^2 - 3xy + 4y^2 = 1$, representa una:

a) Elipse b) Circunferencia c) Parábola d) Hipérbola

11. La curva $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 9 = 0$ representa una:

a) Elipse b) Hipérbola c) Parábola d) Circunferencia

12. La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, represente una hipérbola es:

a) $B^2 - 4AC = 0$ b) $B^2 - 4AC < 0$ c) $B^2 - 4AC > 0$ d) $B^2 - 4AC \leq 0$

13. La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, represente una elipse es:

a) $B^2 - 4AC < 0$ b) $B^2 - 4AC = 0$ c) $B^2 - 4AC > 0$ d) $B^2 - 4AC \leq 0$

14. La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, represente una parábola es:

a) $B^2 - 4AC \geq 0$ b) $B^2 - 4AC < 0$ c) $B^2 - 4AC > 0$ d) $B^2 - 4AC = 0$

Lección 15

Límites

1. Concepto intuitivo

Si f(x) se aproxima de forma arbitraria a un número L, tomando a **x** muy cercano a un número **a**, tanto por el lado izquierdo como por el derecho de **a**, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Se lee: "el límite cuando x tiende al número **a** de la función f(x) es **L**".

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2 - 4$ y $x = 3$, si se dan valores a x muy cercanos por la izquierda y por la derecha de $x = 3$, se obtienen las siguientes tablas:

Por la izquierda

x	f(x)
2.9	4.41
2.99	4.9401
2.999	4.994001
2.9999	4.99940001

Por la derecha

x	f(x)
3.01	5.0601
3.001	5.0006001
3.0001	5.00060001
3.00001	5.000060001

En ambos casos cuando x se aproxima a 3, f(x) se aproxima a 5, por tanto,

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2 - 4\right) = 5$$

2. Teoremas sobre límites y obtención de límites

El procedimiento anterior, para el cálculo del límite resulta poco práctico, los siguientes teoremas sobre límites, simplificarán el proceso, de tal forma, que el límite se obtiene evaluando el valor al que tiende x.

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces:

1) $\lim_{x\to a} c = c$, con c: constante.

2) $\lim_{x\to a} x = a$

3) $\lim_{x\to a} c\,f(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = c\,L_1$

4) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

5) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$.

6) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} \qquad L_2 \neq 0$.

7) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = [L_1]^n$

en particular $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

Ejemplos:

Obtener los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 3} 6 = 6$

2) $\lim_{x\to 2}(3x) = 3\lim_{x\to 2} x = 3(2) = 6$

3) $\lim\limits_{x\to-3}\left(2x^2\right)=2\lim\limits_{x\to-3}x^2=2(-3)^2=2(9)=18$

4) $\lim\limits_{x\to-1}\left(2x^3-3x^2+2x-4\right)=2\lim\limits_{x\to-1}x^3-3\lim\limits_{x\to-1}x^2+2\lim\limits_{x\to-1}x-\lim\limits_{x\to-1}4=2(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)-4$

$$=2(-1)-3\ (1)-2-4$$

$$=-2-3-2-4=-11$$

Con los ejemplos anteriores se concluye que sólo se sustituye x por el valor al que tiende.

5) $\lim\limits_{x\to2}\left(4x^2-3x-2\right)=4(2)^2-3(2)-2=4(4)-3(2)-2=16-6-2=8$

6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-3}{3x+1}=\dfrac{2(-2)-3}{3(-2)+1}=\dfrac{-4-3}{-6+1}=\dfrac{-7}{-5}=\dfrac{7}{5}$

Ejemplo 7

El valor de $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+1}{4x-1}$ es:

a) $\dfrac{13}{9}$ b) $\dfrac{11}{9}$ c) $-\dfrac{11}{9}$ d) $-\dfrac{13}{9}$

Solución:

Se sustituye x = – 2 en la función dada:

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+1}{4x-1}=\frac{3(-2)^2+1}{4(-2)-1}=\frac{3(4)+1}{-8-1}=\frac{12+1}{-9}=\frac{13}{-9}=-\frac{13}{9}$$

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+1}{4x-1}=-\dfrac{13}{9}$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 8

El valor de $\lim\limits_{x\to4}\left(x^2-2x\right)(2x+1)$ está dado por:

a) 0 b) 72 c) 36 d) 16

Solución:

Se sustituye x = 4 en la función dada:

$$\lim_{x\to4}\left(x^2-2x\right)(2x+1)=\left((4)^2-2(4)\right)(2(4)+1)=(16-8)(8+1)=(8)(9)=72$$

$\lim\limits_{x\to4}\left(x^2-2x\right)(2x+1)=72$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 9

Considerando que $\lim\limits_{x\to5}f(x)=12$ y $\lim\limits_{x\to5}g(x)=-4$. El valor de $\lim\limits_{x\to5}[f(x)+g(x)]$, está dado por:

a) 8 b) – 8 c) 16 d) – 16

Solución:

El límite de una suma de funciones es la suma de los límites, entonces se obtiene:

$$\lim_{x\to5}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to5}f(x)+\lim_{x\to5}g(x)=12+(-4)=12-4=8$$

$\lim\limits_{x\to5}[f(x)+g(x)]=8$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 10

Considerando que $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = -3$. El valor de $\lim\limits_{x\to -2}[f(x)\cdot g(x)]$, está dado por:

a) 24 b) 5 c) 11 d) – 24

Solución:

El límite de un producto de funciones es el producto de los límites, entonces:

$$\lim_{x\to -2}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x)\cdot \lim_{x\to -2} g(x) = (8)(-3) = -24$$

$\lim\limits_{x\to -2}[f(x)\cdot g(x)] = -24$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 11

Considerando que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 6$. El valor de $\lim\limits_{x\to 2}[3f(x) - 4g(x)]$ está dado por:

a) – 21 b) 33 c) – 33 d) 21

Solución:

Aplicando los teoremas se obtiene:

$$\lim_{x\to 2}[3f(x) - 4g(x)] = 3\lim_{x\to 2} f(x) - 4\lim_{x\to 2} g(x) = 3(-3) - 4(6) = -9 - 24 = -33$$

$\lim\limits_{x\to 2}[3f(x) - 4g(x)] = -33$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 12

Si $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = -2$, el valor que debe tomar "K" para que $\lim\limits_{x\to 4}[k\, f(x) + 2g(x)] = 11$, es:

a) 2 b) 5 c) – 2 d) 3

Solución:

Aplicando los teoremas se obtiene:

$$\lim_{x\to 4}[k\, f(x) + 2g(x)] = k\lim_{x\to 4} f(x) + 2\lim_{x\to 4} g(x) = k(5) + 2(-2) = 5k - 4$$

Se quiere que $\lim\limits_{x\to 4}[k\, f(x) + 2g(x)] = 11$, entonces:

$$5k - 4 = 11 \quad \rightarrow \quad 5k = 11 + 4 \quad \rightarrow \quad 5k = 15 \quad \rightarrow \quad k = \frac{15}{5} = 3$$

k = 3, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

3. Formas indeterminadas

Al calcular el límite se puede presentar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ésta, puede eliminarse por medio de una simplificación factorizando las expresiones dadas.

Ejemplo 1

El valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ es:

a) -4 b) 4 c) 2 d) No existe

Solución:

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(2)^2 - 4}{(2)^2 - 5(2) + 6} = \frac{4 - 4}{4 - 10 + 6} = \frac{0}{0}$$

El resultado es $\frac{0}{0}$, entonces se simplifica la fracción, factorizando el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3x}{x}$ es:

a) 3 b) -3 c) 4 d) -4

Solución:

Se sustituye $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3x}{x} = \frac{3(0)^2 - 3(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Factorizando y simplificando:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x-3)}{x} = \lim_{x \to 0} (3x - 3) = 3(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$ es:

a) -6 b) $\frac{1}{6}$ c) 6 d) $-\frac{1}{6}$

Solución:

Sustituyendo $x = 3$, se obtiene

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{3 - 3}{(3)^2 - 9} = \frac{0}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

Factorizando y simplificando:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Límites cuando $x \to \infty$

Si $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, los resultados de los límites para las formas $\lim\limits_{x\to a} F(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ son:

- Si se obtiene una expresión de la forma $\dfrac{L}{\infty}$ entonces el límite es 0.
- Si se obtiene una expresión de la forma $\dfrac{\infty}{L}$ entonces el límite es infinito.
- Si se obtiene una expresión de la forma $\dfrac{L}{0}$ entonces el límite es infinito.

con "L" constante.

Ejemplo 1

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5x^2-3x+2}{4x^3-2x+6}$ es:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{4}{6}$ d) No existe

Solución:

Se divide numerador y denominador por la x de mayor exponente en este caso x^3, se simplifica y se resuelve el límite equivalente,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x^2-3x+2}{4x^3-2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{4-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}}$$

$$=\frac{6-0-0+0}{4-0+0}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+7}{5x^3+2x-3}$ es:

a) $\dfrac{2}{5}$ b) 2 c) 0 d) no existe

Solución:

Se divide numerador y denominador por x^3 y se sustituye:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{0-0+0}{5+0-0}=\frac{0}{5}=0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Para simplificar el proceso se puede utilizar el siguiente teorema:

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}$, entonces:

a) Si n > m, es decir si el polinomio del numerador es de mayor grado al del denominador, entonces el límite es infinito.

b) Si n < m, es decir si el polinomio del numerador es de mayor grado al del denominador, entonces el límite es cero.

c) Si m = n, es decir si los ambos polinomios son del mismo grado, entonces el límite es $\dfrac{a_0}{b_0}$.

Ejemplo 3

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x-2}{2x^2-6}$ es:

a) $\dfrac{5}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{2}{5}$ d) No existe

Solución:

Los polinomios son del mismo grado, por tanto sólo se toma el cociente que resulta de dividir los coeficientes de los términos de mayor grado, es decir $\dfrac{5}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x-2}{2x^2-6} = \frac{5}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x+1}$ es:

a) 2 b) 0 c) No existe d) 1

Solución:

El polinomio del numerador es de mayor grado que el polinomio del denominador, por tanto, el resultado del límite es "∞", esto es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x+1} = \infty \text{ (no existe el límite)}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-3x}{1+x^2}$ es:

a) No existe b) – 3 c) 2 d) 0

Solución:

El polinomio del denominador es de mayor grado que el polinomio del numerador, por tanto el resultado del límite es 0, esto es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-3x}{1+x^2} = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

4. Continuidad

Una función continua se puede describir como aquélla que se puede trazar sin despegar el lápiz del papel, es decir aquella función que no tiene saltos en su gráfica.

Continuidad en un punto

Una función f(x) es continua en un número **a** si:

a) f(a) está definida.

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Continuidad en un intervalo

a) Una función f(x) es continua en un intervalo abierto (a, b), si es continua en todo punto del intervalo.

b) Una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] si es continua en (a, b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Ejemplo:

¿Para cuál de los siguientes valores la función $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 4x}$ es continua?

a) 2 b) – 2 c) 0 d) 1

Solución:

$f(2) = \dfrac{2}{(2)^3 - 4(2)} = \dfrac{2}{8-8} = \dfrac{2}{0}$, no está definida en x = 2, por tanto, no es continua en este punto.

$f(-2) = \dfrac{2}{(-2)^3 - 4(-2)} = \dfrac{2}{-8+8} = \dfrac{2}{0}$, no está definida en x = – 2, por tanto, no es continua en este punto.

$f(0) = \dfrac{2}{(0)^3 - 4(0)} = \dfrac{2}{0-0} = \dfrac{2}{0}$; no está definida en x = 0, por tanto, no es continua en ese punto.

$f(1) = \dfrac{2}{(1)^3 - 4(1)} = \dfrac{2}{1-4} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$; la función está definida en x = 1, se procede a comprobar el límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{x^3 - 4x} = \frac{2}{(1)^3 - 4(1)} = \frac{2}{1-4} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Luego,

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{2}{3}$$

Entonces es continua en x = 1, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. El valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{2x - 1}$ es:

a) 3 b) 0 c) -2 d) 5

2. El valor de $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x - 7}{2x + 5}$ está dado por:

a) $-\dfrac{3}{10}$ b) $\dfrac{10}{3}$ c) $-\dfrac{10}{3}$ d) $\dfrac{3}{10}$

3. El valor $\lim\limits_{x \to -3} (2x^2 - 3x - 5)$ es:

a) 22 b) -14 c) 20 d) -22

4. El valor de $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - x - 20}{x^2 - 16}$ está dado por:

a) 8 b) -8 c) $\dfrac{9}{8}$ d) $-\dfrac{1}{8}$

5. El valor $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 5x}{x}$ es:

a) -5 b) 5 c) $\dfrac{1}{5}$ d) $-\dfrac{1}{5}$

6. El valor $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 + 5x + 6}$ de:

a) -1 b) -5 c) 1 d) 5

7. El valor de $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ está dado por:

a) -2 b) 2 c) 1 d) -1

8. El valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x}$ es:

a) -3 b) 3 c) 2 d) -1

9. El valor de $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$ está dado por:

a) $\dfrac{1}{5}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{10}$ d) $-\dfrac{1}{10}$

10. El valor de $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2-x+5}{4x^3-5x+6}$ es:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2 c) -2 d) $-\dfrac{1}{2}$

11. El valor de $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{2x+3}$ es:

a) 0 b) ∞ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{5}{3}$

12. El valor de $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{x^3-2x^2-3}$ es:

a) ∞ b) 0 c) 3 d) -5

13. El valor de $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x^3}{x^2}$ es:

a) 0 b) 1 c) -1 d) ∞

14. Considerando que $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ y $\lim_{x\to -2} g(x)=4$. El valor de $\lim_{x\to -2}[f(x)+g(x)]$, está dado por:

a) -7 b) -2 c) 2 d) 7

15. Considerando que $\lim_{x\to 3} f(x)=-6$ y $\lim_{x\to 3} g(x)=-2$. El valor de $\lim_{x\to 3}[f(x)\cdot g(x)]$, está dado por:

a) -8 b) 8 c) 12 d) -12

16. Considerando que $\lim_{x\to 1} f(x)=4$ y $\lim_{x\to 1} g(x)=-10$. El valor de $\lim_{x\to 1}[5f(x)+2g(x)]$ está dado por:

a) 5 b) 4 c) -4 d) 0

17. Considerando que $\lim_{x\to -3} f(x)=-2$ y $\lim_{x\to -3} g(x)=4$. ¿Cuál es el valor que debe tomar k para que $\lim_{x\to -3}[3f(x)+kg(x)]=2$?

a) 2 b) -3 c) 4 d) -2

18. Si $\lim_{x\to 1} f(x)=-5$ y $\lim_{x\to 1} g(x)=\dfrac{1}{2}$. El valor de $\lim_{x\to 1}[f(x)+2g(x)]$, es:

a) 4 b) -4 c) 1 d) 2

19. Para $\lim_{x\to 5} f(x)=\dfrac{2}{3}$ y $\lim_{x\to 5} g(x)=-\dfrac{1}{4}$. El valor de $12\lim_{x\to 5}[f(x)\cdot g(x)]$, es:

a) -4 b) 2 c) -2 d) 4

20. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to -4}[6f(x)-4g(x)]$ si $\lim_{x\to -4} f(x)=3$ y $\lim_{x\to -4} g(x)=2$?

a) 6 b) 10 c) -10 d) -6

21. Si $\lim_{x\to -10}[3kf(x)-2kg(x)]=-10$, ¿cuál es el valor de k considerando que $\lim_{x\to -3} f(x)=-10$ y $\lim_{x\to -3} g(x)=-10$?

a) -1 b) 3 c) -3 d) 1

Lección 16

La derivada

1. Definición de derivada y sus notaciones

Definición de derivada

La derivada de una función y = f(x) se define como el límite de la razón del incremento de la función sobre el incremento de la variable independiente y se define como:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Notación de la derivada

Diversas notaciones para expresar la derivada de una función y = f(x) son:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D_x y$$

Ejemplo 1

La derivada de la función y = 3x + 2 es:

a) y'= 2 b) y'= 3 c) y'= – 2 d) y'= – 3

Solución:

Se aplica la definición de la derivada:

$y = 3x + 2 \rightarrow$

$$y' = \lim_{\Delta x \to} \frac{[3(x+\Delta x)+2]-[3x+2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3x+3\Delta x+2]-[3x+2]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x+3\Delta x+2-3x-2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La derivada de la función f(x) = 2x + 1 es:

a) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$ b) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2+\Delta x}{\Delta x}$ c) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$ d) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 2}{\Delta x}$

Solución:

Se aplica la definición de la derivada:

$f(x) = 2x + 1 \rightarrow$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x+\Delta x)+1]-[2x+1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2x+2\Delta x+1]-[2x+1]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x+2\Delta x+1-2x-1}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

2. Obtención de derivadas

Derivadas de funciones algebraicas

– Reglas para determinar la derivada de una función algebraica:

1) $\frac{d}{dx}(c)=0$

2) $\frac{d}{dx}(x)=1$

3) $\frac{d}{dx}(cx)=c$

4) $\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$

7) $\frac{d}{dx}\left(v^n\right)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

8) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{v}\right)=\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dx}$

9) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

10) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

11) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Donde c: constante; x, u, v y w: variables.

Ejemplo 1

La derivada de la función $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 7$ es:

a) $3x^2 + 5x - 4$ b) $3x^2 + 10x + 7$ c) $3x^2 + 5x + 7$ d) $3x^2 + 10x - 4$

Solución:

Aplicando las fórmulas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3+5x^2-4x+7\right) = \frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(5x^2\right)-\frac{d}{dx}(4x)+\frac{d}{dx}(7) = \frac{d}{dx}\left(x^3\right)+5\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-4\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(7)$$

$$= 3x^{3-1} + 5(2x^{2-1}) - 4(1) + 0$$

$$= 3x^2 + 5(2x) - 4$$

$$= 3x^2 + 10x - 4$$

La respuesta correcta corresponde el inciso "d".

Ejemplo 2

La derivada de la función $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ es:

a) $\frac{5}{3}x^{\frac{2}{5}}$ b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}$ c) $\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ d) $\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{5}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{5}}\right) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{\frac{3-5}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La derivada de la función $y = \frac{3}{x^2}$ es:

a) $\frac{3}{2x}$ b) $\frac{6}{x^3}$ c) $-\frac{3}{2x}$ d) $-\frac{6}{x^3}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^{-2}\right) = 3\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = 3(-2x^{-2-1}) = -6x^{-3} = -6\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{6}{x^3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La derivada de la función $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \sqrt{x} - 5x + 2$ es:

a) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5$

b) $\frac{3}{6}x^2 + \frac{8}{6}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5$

c) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5$

d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \sqrt{x} - 5x + 2\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)\\
&= \frac{1}{2}\left(3x^{3-1}\right) + \frac{4}{3}\left(2x^{2-1}\right) + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 5(1) + 0\\
&= \frac{1}{2}\left(3x^2\right) + \frac{4}{3}\left(2x^1\right) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5\\
&= \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5
\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

La derivada de la función $y = (3x^5 + 2)^4$ es:

a) $60x^4(3x + 2)^3$ b) $4(15x^4 + 2)^3$ c) $60x(3x^5 + 2)^3$ d) $4x^4(3x^5 + 2)^3$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(v^n\right) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$, entonces:

$y = (3x^5 + 2)^4 \quad \rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^5 + 2\right)^4 = 4(3x^5 + 2)^{4-1}\frac{d}{dx}\left(3x^5 + 2\right) &= 4(3x^5 + 2)^3(15x^4)\\
&= 60x^4(3x^5 + 2)^3
\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

La derivada de la función $f(x) = (x^2 + 1)(3x^3 + 2)$ es:

a) $x(15x^3 - 9x + 4)$ b) $x(15x^3 - 9x - 4)$ c) $x(15x^3 + 9x + 4)$ d) $3x(5x^3 + 3x + 1)$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$,

$f(x) = (x^2 + 1)(3x^3 + 2) \quad \rightarrow$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2 + 1)\frac{d}{dx}\left(3x^3 + 2\right) + (3x^3 + 2)\frac{d}{dx}\left(x^2 + 1\right)\\
f'(x) &= (x^2 + 1)(9x^2) + (3x^3 + 2)(2x)\\
f'(x) &= 9x^4 + 9x^2 + 6x^4 + 4x\\
f'(x) &= 15x^4 + 9x^2 + 4x\\
f'(x) &= x(15x^3 + 9x + 4)
\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 7

La derivada de la función $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-5}$ es:

a) $\dfrac{-17}{(2x-5)^2}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{17}{(2x-5)^2}$ d) $\dfrac{-17}{(3x+1)^2}$

Solución:

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$.

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x-5} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{2x-5}\right) = \frac{(2x-5)\dfrac{d}{dx}(3x+1) - (3x+1)\dfrac{d}{dx}(2x-5)}{(2x-5)^2} = \frac{(2x-5)(3) - (3x+1)(2)}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{6x-15-(6x+2)}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{6x-15-6x-2}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{-17}{(2x-5)^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Derivadas de funciones trigonométricas

– Reglas para determinar la derivada de una función trigonométrica:

1) $\dfrac{d}{dx}\text{sen } v = \cos v \dfrac{dv}{dx}$

2) $\dfrac{d}{dx}\cos v = -\text{sen } v \dfrac{dv}{dx}$

3) $\dfrac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v \dfrac{dv}{dx}$

4) $\dfrac{d}{dx}\cot v = -\csc^2 v \dfrac{dv}{dx}$

5) $\dfrac{d}{dx}\sec v = \sec v \tan v \dfrac{dv}{dx}$

6) $\dfrac{d}{dx}\csc v = -\csc v \cot v \dfrac{dv}{dx}$

Ejemplo 1

La derivada de la función $y = \text{sen } 3x$ es:

a) $3 \cos 3x$ b) $3 \text{ sen } 3x$ c) $\cos 3x$ d) $-\text{ sen } 3x$

Solución:

$$y = \text{sen } 3x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen } 3x) = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) = (\cos 3x)(3) = 3\cos 3x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La derivada de la función $f(x) = \cos x^2$ es:

a) $-\text{ sen } x^2$ b) $-\cos 2x$ c) $-2x \text{ sen } x^2$ d) $2x \cos 2x$

Solución:

$$f(x) = \cos x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x^2) = -\text{sen } x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = (-\text{sen } x^2)(2x) = -2x \text{ sen } x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La derivada de $y = \tan(3x^2 + 2x)$ es:

a) $\sec^2(3x^2 + 2x)$ b) $\tan(6x + 2)$ c) $\sec^2(6x + 2)$ d) $(6x + 2)\cdot\sec^2(3x^2 + 2x)$

Solución:

$$y = \tan(3x^2 + 2x) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}\left[\tan\left(3x^2 + 2x\right)\right] = \sec^2(3x^2 + 2x)\frac{d}{dx}\left(3x^2 + 2x\right)$$

$$= \sec^2(3x^2 + 2x)(6x + 2)$$

$$= (6x + 2)\cdot\sec^2(3x^2 + 2x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La derivada de $y = \text{sen}^3 5x$ es:

a) $3\,\text{sen}^2 5x$ b) $15\,\text{sen}^2 5x \cos 5x$ c) $15\,\text{sen}^2 5x$ d) $3\,\text{sen}\,5x\cos 5x$

Solución:

La función $y = \text{sen}^3 5x$ es equivalente a $y = (\text{sen}\,5x)^3$, se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(v^n\right) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$,

$$y = (\text{sen}\,5x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3(\text{sen}\,5x)^{3-1}\frac{d}{dx}(\text{sen}\,5x) = = 3(\text{sen}\,5x)^2\frac{d}{dx}(\text{sen}\,5x).$$

Para la nueva derivada se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\text{sen}\,v = \cos v\frac{dv}{dx}$

$$y' = 3(\text{sen}\,5x)^2\frac{d}{dx}(\text{sen}\,5x) = 3(\text{sen}\,5x)^2(\cos 5x)\frac{d}{dx}(5x)$$

$$= 3(\text{sen}\,5x)^2(\cos 5x)(5)$$

$$= 15\,\text{sen}^2 5x\cos 5x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

La derivada de $y = x^2\cos x$ es:

a) 2xcosx c) x(2 cosx – x senx)

b) x(x cosx – 2 senx) d) 2x senx

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$y = x^2\cos x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}(x^2\cos x) = x^2\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2(-\text{sen}\,x) + \cos x\,(2x)$$

$$= -x^2\,\text{sen}\,x + 2x\cos x$$

$$= x(2\cos x - x\,\text{sen}\,x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

– Reglas para determinar la derivada de una función exponencial:

$$\frac{d}{dx}e^{v}=e^{v}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}a^{v}=a^{v}\ln a\cdot\frac{dv}{dx}$$

e: base del logaritmo natural, a: constante, v : variable

– Reglas para determinar la derivada de una función logarítmica:

$$\frac{d}{dx}\ln v=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\log_b v=\frac{\log_b e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 1

La derivada de $y = e^{2x}$ es:

a) e^{2x} b) $2x\ e^{2x}$ c) $2\ e^{2x}$ d) $2\ e^{x}$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^{v}=e^{v}\cdot\frac{dv}{dx}$

$$y = e^{2x} \quad\rightarrow\quad y' = \frac{d}{dx}(e^{2x}) = e^{2x}\,\frac{d}{dx}(2x) = e^{2x}\,(2) = 2\,e^{2x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La derivada de $y = 2^{3x^2-1}$ es:

a) $2^{3x^2-1}\ln 2$ b) $2^{3x^2-1}(6x)$ c) $2^{6x}\ln 2$ d) $2^{3x^2-1}\ln 2\ (6x)$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^{v}=a^{v}\ln a\cdot\frac{dv}{dx}$

$$y = 2^{3x^2-1} \quad\rightarrow\quad y'= \frac{d}{dx}\left(2^{3x^2-1}\right) = 2^{3x^2-1}\ln 2\ \frac{d}{dx}\left(3x^2-1\right) = 2^{3x^2-1}\ln 2\ (6x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La derivada de $y = \ln(x^3-2)$ es:

a) $\frac{3x^2}{x^3-2}$ b) $\frac{1}{x^3-2}$ c) $\frac{3x}{x^3-2}$ d) $\frac{x^2}{x^3-2}$

Solución:

$$y = \ln(x^3-2) \quad\rightarrow\quad y'= \frac{d}{dx}\ln(x^3-2) = \frac{1}{x^3-2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-2\right) = \frac{1}{x^3-2}\cdot\left(3x^2\right) = \frac{3x^2}{x^3-2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

La derivada de $y = e^{x}\,\text{senx}$ es:

a) $e^{x}(\cos x - \text{sen}x)$ b) $e^{x}\cos x$ c) $e^{x}(\cos x + \text{sen}x)$ d) $e^{x}\text{sen}x$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$,

$$y = e^{x}\,\text{sen}x \quad\rightarrow\quad y'= e^{x}\frac{d}{dx}(\text{sen}x) + \text{sen}x\ \frac{d}{dx}(e^{x}) = e^{x}(\cos x) + \text{sen}x\,(e^{x})$$

$$= e^{x}\cos x + e^{x}\,\text{sen}x$$

$$= e^{x}(\cos x + \text{sen}x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

3. Regla de la cadena

Sea la función $y = g(u)$ y $u = f(x)$, entonces la derivada $\frac{dy}{dx}$, se define como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 1

Si $y = u^3 + 5u$, $u = x^2 + 3x$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ es igual a:

a) $(3u^2 + 5)(2x + 3)$ b) $(u^3 + 5u)(2x + 3)$ c) $3u^2(2x + 3)$ d) $(3u^2 + 5)(x^2 + 3x)$

Solución:

Se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Donde:

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\left(u^3 + 5u\right) = 3u^2 + 5 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 3x\right) = 2x + 3$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 + 5)(2x + 3)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La derivada de $y = \text{sen}\ x^2$ es:

a) $2x \cos x^2$ b) $2 \cos x^2$ c) $\cos 2x$ d) $x\ \text{sen}\ 2x$

Solución:

La función se representa como: $y = \text{sen}\ u$ donde $u = x^2$, se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\text{sen}\ u) \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \cos u \cdot 2x = 2x \cos u$$

Pero $u = x^2$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

La derivada de $y = (x^2 + 5x)^3$ es:

a) $3(x^2 + 5x)^2$ b) $(2x + 5)(x^2 + 5x)^2$ c) $(x^2 + 5x)^2$ d) $(6x + 15)(x^2 + 5x)^2$

Solución:

La función se representa, $y = u^3$ donde $u = x^2 + 5x$, se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^3) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 5x) = 3u^2(2x + 5) = (6x + 15)u^2$$

Pero $u = x^2 + 5x$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = (6x + 15)(x^2 + 5x)^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

4. Derivada de funciones implícitas

Para derivar una función implícita se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \text{ con } F_y(x, y) \neq 0$$

Donde:

$F_x(x, y)$: Derivada la función con respecto a "x".

$F_y(x, y)$: Derivada la función con respecto a "y".

Ejemplo 1

La derivada con respecto a "x" de $x^2 + y^2 = 4$ es:

a) $-\frac{x}{y}$ b) $-\frac{2x}{y}$ c) $-\frac{x}{2y}$ d) $\frac{x}{y}$

Solución:

La expresión se iguala con cero: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Para obtener $F_x(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "x" y se toma como constante "y", entonces:

$$F_x(x, y) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 - 4\right) = 2x$$

Para obtener $F_y(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "y" y se toma como constante "x", entonces:

$$F_y(x, y) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 - 4\right) = 2y$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La derivada con respecto a "x" de $x^3 + 3x^2y - xy^2 + y^3 = 0$, es:

a) $\frac{3x^2 + 6xy - y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ b) $-\frac{3x^2 + 6xy - y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ c) $\frac{3x^2 - 6xy + y^2}{3x^2 - 2xy - 3y^2}$ d) $-\frac{3x^2 - 2xy + 3y^2}{3x^2 + 6xy - y^2}$

Solución:

Para obtener $F_x(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "x" y se toma como constante "y", entonces

$$F_x(x, y) = 3x^2 + 6xy - y^2$$

Para obtener $F_y(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "y" y se toma como constante "x" , entonces

$$F_y(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 6xy - y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

La derivada con respecto a "x" de $x^2 + xy - y^2 = 4$, es:

a) $\frac{2y-x}{2x+y}$ b) $\frac{2x-y}{2y-x}$ c) $\frac{-2x+y}{2y-x}$ d) $\frac{2x+y}{2y-x}$

Solución:

Para obtener la derivada de una función implícita se deriva término a término los elementos de la igualdad con respecto a la variable que se indica y se despeja la derivada.

$$x^2 + xy - y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + \left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $\frac{dy}{dx} = y'$, entonces: $2x + xy' + y - 2yy' = 0$

Se despeja y' $\quad y'(x - 2y) = -2x - y$

$$y' = \frac{-2x-y}{x-2y} \quad ó \quad y' = \frac{2x+y}{2y-x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

5. Derivadas sucesivas de una función

Sea $y = f(x)$, entonces:

Primera derivada $\quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Segunda derivada $\quad y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Tercera derivada $\quad y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$.

⋮

n – ésima derivada $\quad y^n = f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Ejemplo 1

Si $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es:

a) $3x^2 + 8x - 5$ b) $x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ c) $6x + 8$ d) 6

Solución:

Se obtiene la primera derivada:

Si $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ entonces, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x - 5$

Para obtener la segunda derivada, se deriva la primera derivada,

Si $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x - 5$ entonces, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + 8x - 5\right) = 6x + 8$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Si $f(x) = \cos x^2$, la segunda derivada de $f(x)$ es:

a) $-2x\text{sen}x^2$ b) $-4x^2\text{sen}x^2 - 2\cos x^2$ c) $-4x^2\cos x^2 + 2\text{sen}x^2$ d) $-4x^2\cos x^2 - 2\text{sen}x^2$

Solución:

Se obtiene la primera derivada:

$$f(x) = \cos x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x^2) = -\text{sen}\, x^2 \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = (-\text{sen}\, x^2)(2x) = -2x\,\text{sen}x^2$$

Se obtiene la segunda derivada:

$$f'(x) = -2x\,\text{sen}x^2 \quad \rightarrow \quad f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-2x\text{sen}x^2\right) = -2x\frac{d}{dx}\left(\text{sen}x^2\right) + \text{sen}x^2\frac{d}{dx}(-2x)$$

$$= -2x(\cos x^2)\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \text{sen}\, x^2(-2)$$

$$= -2x(\cos x^2)(2x) + \text{sen}\, x^2(-2)$$

$$= -4x^2\cos x^2 - 2\text{sen}x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La tercera derivada de $y = e^x\,\text{sen}x$ es:

a) $e^x(\cos x + \text{sen}x)$ b) $2e^x(\cos x - \text{sen}x)$ c) $2e^x(\cos x + \text{sen}x)$ d) $e^x(\cos x - \text{sen}x)$

Solución:

Se obtiene la primera derivada de la función:

$$y = e^x\,\text{sen}x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^x\text{sen}x\right) = e^x\frac{d}{dx}(\text{sen}x) + \text{sen}x\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$

$$= e^x\cos x + \text{sen}x\,(e^x)$$

$$= e^x\cos x + e^x\text{sen}x$$

$$= e^x(\cos x + \text{sen}x)$$

Para obtener la segunda derivada, se deriva la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\cos x + \text{sen}x) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[e^x(\cos x + \text{sen}x)]$$

$$= e^x\frac{d}{dx}(\cos x + \text{sen}x) + (\cos x + \text{sen}x)\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x(-\text{sen}x + \cos x) + (\cos x + \text{sen}x)(e^x)$$

$$= -e^x\text{sen}x + e^x\cos x + e^x\cos x + e^x\text{sen}x$$

$$= 2e^x\cos x$$

Para obtener la tercera derivada, se deriva la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x\cos x \quad \rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(2e^x\cos x\right) = 2e^x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}\left(2e^x\right)$$

$$= 2e^x(-\text{sen}x) + \cos x(2e^x)$$

$$= -2e^x\text{sen}x + 2e^x\cos x$$

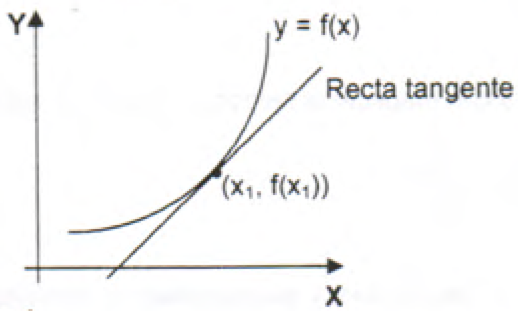
$$= 2e^x(\cos x - \text{sen}x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

6. Interpretación geométrica y física

Interpretación geométrica

La derivada de una función $y = f(x)$ evaluada en un punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.



Si $y = f(x)$, entonces la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_1, f(x_1))$ es:

$$m = f'(x_1)$$

Ejemplo 1

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 5x$ en el punto $(-1, -4)$ es:

a) 7 b) 3 c) -10 d) -4

Solución:

Se obtiene la derivada de la función

$$y = x^2 + 5x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = \frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

Se evalúa la derivada en el punto $(-1, -4)$

$$m = 2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \cos x$, en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, es:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

Solución:

Se obtiene la derivada de la función $y = \cos x$

$$y' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

Se evalúa la derivada en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Interpretación física

– Velocidad instantánea

Sea $s = f(t)$ la función que describe la posición de una partícula con respecto al tiempo, se define a la velocidad instantánea de la partícula en el instante "t" como:

$$v = f'(t) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

– Aceleración instantánea

Sea $s = f(t)$ la función que describe la posición de una partícula con respecto al tiempo, se define la aceleración instantánea de la partícula en el instante "t" es:

$$a = f'(t) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo 1

Una partícula se mueve conforme a la curva $s = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$, las funciones que describen la velocidad y la aceleración instantáneas son:

a) $v = 6t - 18$, $a = 3t^2 - 18t + 24$

b) $v = 3t^2 + 18t$, $a = 6t + 18$

c) $v = 3t^2 - 18t$, $a = 6t^2$

d) $v = 3t^2 - 18t + 24$, $a = 6t - 18$

Solución:

Se obtienen la primera y segunda derivada de la función $s = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La posición de una partícula está dada por $s = t^3 - 4t^2 + 5t$ donde, "s" está dada en metros y "t" en segundos, la velocidad instantánea a los 3 seg. es:

a) 6 m/s b) 8 m/s c) 4 m/s d) 5 m/s

Solución:

Se deriva la función desplazamiento para obtener la función velocidad:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 4t^2 + 5t\right) = 3t^2 - 8t + 5$$

Se evalúa $t = 3$ seg. en la derivada:

$$v = 3(3)^2 - 8(3) + 5 = 3(9) - 24 + 5 = 27 - 24 + 5 = 8 \text{ m/s}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una partícula se mueve de acuerdo a la función $s = 2t^3 - t^2 - 3$ donde, "s" está dada en metros y "t" en segundos, determinar la aceleración instantánea cuando $t = 2$ seg.

a) 9 m/s^2 b) 20 m/s^2 c) 22 m/s^2 d) 24 m/s^2

Solución:

Se obtiene la segunda derivada de la función $s = 2t^3 - t^2 - 3$

$$\frac{ds}{dt} = 6t^2 - 2t \quad \rightarrow \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 2$$

Se evalúa $t = 2$ seg. en la segunda derivada

$$a = 12(2) - 2 = 24 - 2 = 22 \text{ m/s}^2$$

La respuesta correcta corresponde a inciso "c".

Ejemplo 4

La posición de una partícula está dada por la función $s = t^3 - 6t^2 + 12t + 5$, ¿en qué instante la aceleración es cero?

a) 1 seg b) 2 seg c) 3 seg d) 4 seg

Solución:

Se obtiene la aceleración:

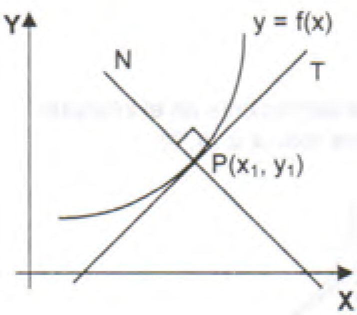
$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 12 \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

Se iguala la aceleración con cero y se resuelve la ecuación

$$6t - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2 \text{ seg}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

7. Ecuaciones de la tangente y la normal a una curva



La ecuación de la recta tangente en el punto (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

La ecuación de la recta normal en el punto (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

Donde T: Recta tangente y N: Recta normal

Ejemplo:

Las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $y = x^2 + 3x$ en el punto $(1, 4)$ son:

a) $5x - y - 1 = 0$, $x + 5y - 21 = 0$ b) $5x + y - 1 = 0$, $x - 5y + 21 = 0$ c) $5x + y + 1 = 0$, $x - 5y - 21 = 0$ d) $-5x + y - 1 = 0$, $-x + 5y - 21 = 0$

Solución:

Se obtiene la derivada de la función $y = x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

Se evalúa la derivada en el punto $(1, 4)$

$$\frac{dy}{dx} = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 4)$ es:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 4 = 5(x - 1) \quad \rightarrow \quad y - 4 = 5x - 5$$

$$5x - y - 5 + 4 = 0$$

$$5x - y - 1 = 0$$

La ecuación de la recta normal en el punto $(1, 4)$ es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{5}(x - 1) \quad \rightarrow \quad 5(y - 4) = -1(x - 1)$$

$$5y - 20 = -x + 1$$

$$x + 5y - 20 - 1 = 0$$

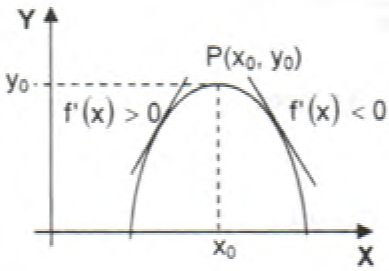
$$x + 5y - 21 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

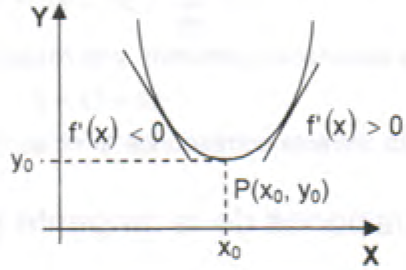
8. Máximos y mínimos relativos de una función

Criterio de la primera derivada

1) La función $y = f(x)$ tiene un punto máximo en (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y antes del punto, la derivada es positiva y después del punto la derivada es negativa.

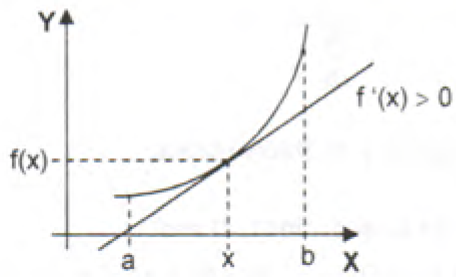


2) La función $y = f(x)$ tiene un punto mínimo en (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y antes del punto, la derivada es negativa y después del punto la derivada es positiva.

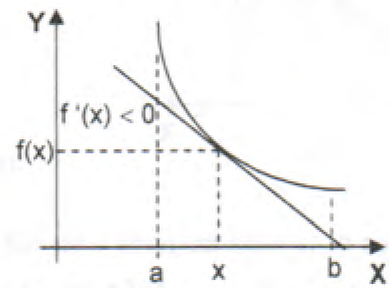


Intervalos donde crece y decrece una función

1) La función $y = f(x)$ es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.



2) La función $y = f(x)$ es decreciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.



Ejemplo 1

El punto mínimo de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ es:

a) $(-2, 17)$ b) $(2, 1)$ c) $(-2, 1)$ d) $(2, 5)$

Solución:

I.- Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 2x - 4$$

II.- Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación:

$$2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

III.- Se analiza la derivada para valores de "x" antes y después de $x = 2$

Si $x = 1$,

$$f'(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2$$

Si $x = 3$,

$$f'(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$$

La derivada es negativa antes de 2 y positiva después de 2, entonces la función tiene un mínimo para $x = 2$

IV.- Se obtiene la ordenada, sustituyendo $x = 2$ en la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 9 - 8 = 1$$

se genera el punto $(2, 1)$ el cual es un mínimo.

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La función $f(x) = x^3 - 27x$ es creciente en el intervalo:

a) $(-3, 3)$ b) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ c) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ d) $[-3, 3]$

Solución:

I.- Se obtiene la derivada de la función f(x):

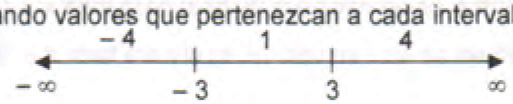
$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

II.- Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 - 27 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 27 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9$$

$$x = 3,\ x = -3$$

III.- Se grafican los puntos críticos en la recta numérica y se analizan los intervalos para determinar en cuál de ellos la función es creciente dando valores que pertenezcan a cada intervalo.



– Para el intervalo $(-\infty, -3)$, se elige $x = -4$, $f'(-4) = 3(-4)^2 - 27 = 48 - 27 = 21$

– Para el intervalo $(-3, 3)$, se elige $x = 1$, $f'(1) = 3(1)^2 - 27 = 3 - 27 = -24$

– Para el intervalo $(3, \infty)$, se elige $x = 4$, $f'(4) = 3(4)^2 - 27 = 48 - 27 = 21$

La solución serán aquellos intervalos en los que la derivada es positiva:

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Criterio de la segunda derivada

- La función $y = f(x)$ tiene un mínimo en el punto (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.
- La función $y = f(x)$ tiene un máximo en el punto (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$.

Ejemplo 1

Los puntos máximos y mínimos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, son:

a) $(-2, 19)$ y $(1, -12)$ b) $(-2, -19)$ y $(1, 8)$ c) $(2, -19)$ y $(-1, 8)$ d) $(2, 19)$ y $(1, -8)$

Solución:

I.- Se obtiene la derivada de la función y se iguala con cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2,\ x = -1$$

II.- Se obtiene la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x - 6$$

Se evalúa la segunda derivada en los puntos críticos $x = 2$ y $x = -1$

Si $x = 2$, $f''(2) = 12(2) - 6 = 24 - 6 = 18 > 0$, entonces la función tiene un mínimo en $x = 2$.

Si $x = -1$, $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 < 0$, entonces la función tiene un máximo en $x = -1$.

III.- Se obtienen las ordenadas de los puntos críticos sustituyendo en la función original:

Si $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1 = 16 - 12 - 24 + 1 = 17 - 36 = -19$,

se genera el punto mínimo $(2, -19)$

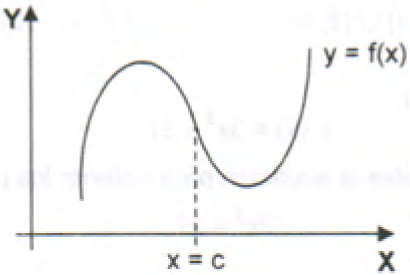
Si $x = -1$, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = -2 - 3 + 12 + 1 = 13 - 5 = 8$,

se genera el punto máximo $(-1, 8)$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Punto de inflexión y concavidad de una función

– La función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(c, f(c))$ si $f''(c) = 0$ y existe cambio de concavidad.



Concavidad

– Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$.

– Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$.

Ejemplo 1

El punto de inflexión de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, es:

a) $(2, 0)$ b) $(1, 4)$ c) $(3, 0)$ d) $(2, 2)$

Solución:

I.- Se obtiene la segunda derivada de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightarrow \quad y'' = 6x - 12$$

II.- Se iguala la segunda derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

III.- Se analiza la segunda derivada para valores de "x" antes y después de $x = 2$:

Si $x = 1$
$f''(1) = 6(1) - 12 = 6 - 12 = -6$

Si $x = 3$
$f''(3) = 6(3) - 12 = 18 - 12 = 6$

La segunda derivada cambió de "–" a "+", la función tiene un punto de inflexión en $x = 2$.

IV.- Se obtiene la ordenada de $x = 2$ en la función original:

$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 8 - 24 + 18 = 26 - 24 = 2$

por tanto el punto de inflexión tiene coordenadas $(2, 2)$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. La derivada de una función $y = f(x)$ se define como:

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$ b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$ c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2. La derivada de $y = 4x + 1$ es:

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4\Delta x}{\Delta x}$ b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4\Delta^2 x+1}{\Delta x}$ c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4+\Delta x}{\Delta x}$ d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4-\Delta x}{\Delta x}$

3. La derivada de $y = 3 - x$ es:

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x}$ b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\dfrac{\Delta x}{\Delta x}\right)$ c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}\right)$ d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3\Delta x}{\Delta x}$

4. La derivada de $f(x) = \dfrac{2}{5}x + 2$ es:

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\Delta x}{\Delta x}$ b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2+5\Delta x}{\Delta x}$ c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{5\Delta x}{\Delta x}$ d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\Delta x}{5\Delta x}$

5. La derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 5$ es:

a) $6x^2$ b) $6x$ c) $6x + 5$ d) $5 + 6x$

6. La derivada de la función $y = \dfrac{x^2+8x-10}{7}$ es:

a) $\dfrac{2x+8}{7}$ b) $\dfrac{2x^2}{7}$ c) $2x + 8$ d) $\dfrac{2x-8}{7}$

7. La derivada de la función $y = 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 15$ es:

a) $24x^3 - 9x^2 - 4x - 7$ b) $24x^3 + 9x^2 + 4x - 7$ c) $24x^3 - 9x^2 - 4x + 7$ d) $24x^3 + 9x^2 - 4x - 7$

8. La derivada de la función $y = \dfrac{1}{2}(x^2-3)(x^2+4)$ es:

a) $2x^3 + 3x$ b) $2x^3 - x$ c) $2x^3 + x$ d) $2x^3 - 5x^2$

9. La derivada de la función $y = x^4(5x - 4x^2)$ es:

a) $x^4 - 24x^5$ b) $x(25 - 24x)$ c) $x^4(25 + 24x)$ d) $x^4(25 - 24x)$

10. La derivada de la función $y = (x^4 - 2x)(x^3 + 4)$ es:

a) $x^6 - 8x^3 + 8$ b) $7x^6 + 8x^3 - 8$ c) $x^6 + x^3 - 8$ d) $7x^6 - 8x^3 - 8$

11. La derivada de la función $y = (x^2 - x)(x + 4)$ es:

a) $x^2 + x - \dfrac{4}{3}$ b) $3\left(x^2 + 2x - \dfrac{4}{3}\right)$ c) $3\left(x^2 + 2x + \dfrac{4}{3}\right)$ d) $x^2 + 2x - \dfrac{4}{3}$

12. La derivada de la función $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$ es:

a) $-\dfrac{13}{(x-5)^2}$ b) $-\dfrac{13}{(x-5)}$ c) $\dfrac{13}{(x-5)^2}$ d) $-\dfrac{x}{(x-5)^2}$

13. La derivada de la función $y = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$ es:

a) $-\dfrac{x}{(x^2+1)}$ b) $-\dfrac{6x}{(x^2+1)}$ c) $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ d) $-\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$

14. La derivada de la función $y = (x^3 + 2x)^3$ es:

a) $(9x^2+6)(x^3+2x)^2$ b) $(9x^2+6)(x^3+2x)$ c) $(9x^2-6)(x^3-2x)^2$ d) $(9x^2+6)^2(x^3+2x)^2$

15. La derivada de la función $y = \sqrt{x^3-3x^2+x}$ es:

a) $\dfrac{3x^2-6x+1}{2\sqrt{x^3-3x^2+x}}$ b) $\dfrac{3x^2+6x+1}{2\sqrt{x^3-3x^2+x}}$ c) $\dfrac{3x^2-6x+1}{\sqrt{x^3-3x^2+x}}$ d) $\dfrac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+x}}$

16. La derivada de la función $y = \sqrt[3]{x^2-5x}$ es:

a) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$ b) $\dfrac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$ c) $\dfrac{2x+5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$ d) $\dfrac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$

17. La derivada de la función $y = (x^3+3x^2-5x)^4$ es:

a) $(12x^2+24x-20)(x^3+3x^2-5x)$ b) $(12x^2+24x+20)(x^3+3x^2-5x)^3$

c) $(12x^2+24x-20)(x^3+3x^2-5x)^3$ d) $(12x^2+x-20)(x^3+x^2-5x)^3$

18. La derivada de la función $y = (5x-x^2)^3$ es:

a) $(15+6x)(5x-x^2)$ b) $(15-2x)(5x-x^2)^2$ c) $(15-6x)^2(5x-x^2)$ d) $(15-6x)(5x-x^2)^2$

19. La derivada de la función $y = \cos x^2$ es:

a) $-2x\operatorname{sen}x$ b) $x\operatorname{sen}x^2$ c) $-2x\operatorname{sen}x^2$ d) $-2\operatorname{sen}x^2$

20. La derivada de la función $y = \operatorname{sen}(1-3x^2)$ es:

a) $-6x\cos(1-3x^2)$ b) $x^2\cos(1-3x^2)$ c) $-6\cos(1-3x^2)$ d) $-6x\cos(1+3x^2)$

21. La derivada de la función $y = \tan x$ es:

a) $\sec^2 x$ b) $-\sec^2 x$ c) $\sec x^2$ d) $x\sec^2 x$

22. La derivada de la función $y = 5\operatorname{sen}2x^3$ es:

a) $-30x^2\cos 2x^3$ b) $30x\cos 2x^3$ c) $x^2\cos 2x^3$ d) $30x^2\cos 2x^3$

23. La derivada de la función $y = 4\tan(9-4x^2)$ es:

a) $-32x\sec(9-4x^2)$ b) $-x\sec^2(9-4x^2)$ c) $32x\sec^2(9-4x^2)$ d) $-32x\sec^2(9-4x^2)$

24. La derivada de la función $y = \csc 3x^4$ es:

a) $12x^3\csc 3x^4\cot 3x^4$ b) $-12x^3\csc 3x^4\cot 3x^4$ c) $-12x^3\csc x^4\cot 3x^4$ d) $x^3\csc 3x^4\cot 3x^4$

25. La derivada de la función $y = \cos(x^3 - 2x)$ es:

a) $(2 + 3x^2)\cos(x^3-2x)$ b) $(2 - 3x^2)\operatorname{sen}(x^3-2x)$ c) $(2 - 3x^2)\cos(x^3-2x)$ d) $(2 - 3x^2)\operatorname{sen}^2(x^3-2x)$

26. La derivada de la función $y = \sec x^2$ es:

a) $2x\sec x^2\tan x$ b) $2x\sec x^2\tan x^2$ c) $2\sec x^2\tan x^2$ d) $-2x\sec x^2\tan x^2$

27. La derivada de la función $y = \sqrt{1+\cos x^2}$ es:

a) $-\dfrac{x\operatorname{sen}x^2}{\sqrt{1+\cos x^2}}$ b) $-\dfrac{\operatorname{sen}x^2}{\sqrt{1+\cos x^2}}$ c) $\dfrac{x\operatorname{sen}x^2}{\sqrt{1+\cos x^2}}$ d) $\dfrac{x\operatorname{sen}x}{\sqrt{1+\cos x^2}}$

28. La derivada de la función $y = e^{1-2x}$ es:

a) $-e^{1-2x}$ b) $-2e^{1-2x}$ c) $-2e^{1+2x}$ d) $2e^{1-2x}$

29. La derivada de la función $y = 4e^{5x}$ es:

a) $20e^{5x}$ b) $-20e^{5x}$ c) $20e^{-5x}$ d) $2e^x$

30. La derivada de la función $y = x^2 + \cos x - e^x$ es:

a) $2x - \operatorname{sen}x - 2e^x$ b) $2x + \operatorname{sen}x - e^x$ c) $2x - \operatorname{sen}x - e^x$ d) $2x - \operatorname{sen}x + e^x$

31. La derivada de la función $y = x^2e^{4x}$ es:

a) $2xe^{4x}(2x - 1)$ b) $2xe^{4x}(2x + 1)$ c) $xe^{4x}(2x + 1)$ d) $2e^{4x}(2x + 1)$

32. La derivada de la función $y = e^{\tan 2x}$ es:

a) $2\sec^2 2xe^{\tan x}$ b) $2\sec^2 xe^{\tan 2x}$ c) $\sec^2 2xe^{\tan 2x}$ d) $2\sec^2 2xe^{\tan 2x}$

33. La derivada de la función $y = e^{x^2-3}$ es:

a) e^{x^2-3} b) $2e^{x^2-3}$ c) $2xe^{x^2-3}$ d) $3xe^{x^2-3}$

34. La derivada de la función $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ es:

a) $\dfrac{2e^x - e^{-x}}{2}$ b) $e^x + e^{-x}$ c) $\dfrac{e^x + 2e^{-x}}{2}$ d) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

35. La derivada de la función $y = 2^{5-x}$ es:

a) $2^{5-x}\ln 2$ b) $-2^{5-x}\ln 2$ c) $-2^{5+x}\ln 2$ d) $-2^{x-5}\ln 2$

36. La derivada de la función $y = 3^{\operatorname{sen}x}$ es:

a) $\cos x\, 3^{\operatorname{sen}x}\ln 3$ b) $\operatorname{sen}x\, 3^{\operatorname{sen}x}\ln 3$ c) $\cos x\, 3^{\operatorname{sen}x}$ d) $\cos x\, 3^{\cos x}\ln 3$

37. La derivada de la función $y = \ln(4x - 3)$ es:

a) $\dfrac{4}{x-3}$ b) $\dfrac{1}{4x-3}$ c) $\dfrac{4}{4x-3}$ d) $-\dfrac{4}{4x-3}$

38. La derivada de la función $y = 9\ln(x^2 - 4)$ es:

a) $-\frac{18x}{x^2-4}$ b) $-\frac{10x}{x^2-4}$ c) $\frac{10}{x^2-4}$ d) $\frac{18x}{x^2-4}$

39. La derivada de la función $y = \ln e^x$ es:

a) 1 b) e^x c) $-e^x$ d) -1

40. Si $y = 2u^3 - u^2$, $u = \sqrt{x}$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ es:

a) $\frac{3u^2-u}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{u^2-u}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{3u^2-u}{\sqrt{u}}$ d) $\frac{3u^2+u}{\sqrt{x}}$

41. Si $y = 5\sqrt{u-1}$, $u = x^2 + 3$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ es:

a) $\frac{x}{\sqrt{u-1}}$ b) $\frac{5x}{\sqrt{u-1}}$ c) $-\frac{5x}{\sqrt{u-1}}$ d) $\frac{5x^2}{\sqrt{u-1}}$

42. Si $y = \operatorname{sen}(u^2 - 1)$, $u = \cos x$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ es:

a) $u\operatorname{sen}x\cos(u^2-1)$ b) $-2\operatorname{sen}x\cos(u^2-1)$ c) $-2u\operatorname{sen}x\cos(u^2-1)$ d) $2u\operatorname{sen}x\cos(u^2-1)$

43. Si $y = \ln(3u - 1)$, $u = e^x$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ es:

a) $\frac{3x}{3u-1}$ b) $\frac{3e^x}{3u-1}$ c) $\frac{e^x}{3u-1}$ d) $\frac{3e^x}{u-1}$

44. La derivada con respecto a "x" de $4x^2 + 9y^2 = 36$

a) $-\frac{4x}{9y^2}$ b) $-\frac{4x^2}{9y}$ c) $-\frac{4x}{9y}$ d) $\frac{4x}{9y}$

45. La derivada con respecto a "x" de $5x - 3xy + y = 2$

a) $\frac{3y-5}{1+3x}$ b) $\frac{3y+5}{1-3x}$ c) $-\frac{3y-5}{1-3x}$ d) $\frac{3y-5}{1-3x}$

46. La derivada con respecto a "x" de $2x^2 - x^2y + y^3 = y^2$

a) $\frac{4x-xy}{3y^2-2y-x^2}$ b) $\frac{4x-2xy}{3y^2-2y-x^2}$ c) $-\frac{4x-2xy}{3y^2-2y-x^2}$ d) $\frac{4x-2xy}{3y^2-2-x^2}$

47. La derivada con respecto a "x" de $x^3 + 4x^2y - 9xy^2 - y^3 = 15$

a) $-\frac{9y^2-8xy-3x^2}{4x^2-18xy-3y^2}$ b) $\frac{9y^2-8xy-3x^2}{4x^2-18xy-3y^2}$ c) $\frac{9y^2+8xy-3x^2}{4x^2-18xy-3y^2}$ d) $\frac{9y^2-18xy-3x^2}{4x^2-8xy-3y^2}$

48. Si $y = 4x^4 + 5x^3 - 2x - 12$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es:

a) $48x^2 + 30x$ b) $48x^2 - 30x$ c) $48x^2 + 15x$ d) $16x^2 + 30x$

49. Si $y = x^3 - x^2 + 3x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es:

a) $6x + 2$ b) $x - 2$ c) $6x^2 - 2x$ d) $6x - 2$

50. La segunda derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{4}x^5 - \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - 7x + 5$ es:

a) $5x^3 - 4x^2 + 3x$ b) $5x^3 + 4x^2 + 3x$ c) $5x^3 - 4x^2 - 3x$ d) $x^3 - 4x^2 + 3x$

51. La tercera derivada de la función $y = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ es:

a) $\dfrac{72}{x^5} - \dfrac{6}{x^4}$ b) $-\dfrac{72}{x^5} + \dfrac{6}{x^4}$ c) $-\dfrac{72}{x^5} - \dfrac{6}{x^4}$ d) $-\dfrac{18}{x^5} - \dfrac{6}{x^4}$

52. Si $y = \sqrt{5 - x}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es:

a) $\dfrac{1}{4\sqrt{(5-x)^3}}$ b) $-\dfrac{1}{4\sqrt{(5-x)^3}}$ c) $-\dfrac{1}{\sqrt{(5-x)^3}}$ d) $-\dfrac{4}{\sqrt{(5-x)^3}}$

53. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = 4x^2 - 9$ en el punto $(-1, -5)$ es:

a) 15 b) 4 c) -5 d) -8

54. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 + 5x + 2$ en el punto $(-2, 4)$ es:

a) -18 b) -14 c) -7 d) 2

55. La pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en el punto $(0, 2)$ es:

a) -1 b) 0 c) 4 d) 6

56. La pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = 4\tan x$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 4)$ es:

a) 8 b) 3 c) -6 d) -8

57. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x+2}{5-2x}$ en el punto $(3, -5)$ es:

a) 13 b) 9 c) 0 d) -5

58. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ en el punto $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ es:

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

59. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = t^3 + 4t^2 - 2t + 10$. ¿Cuál es la función que describe la velocidad instantánea?

a) $3t^2 + 8t - 10$ b) $3t^2 + 8t - 2$ c) $t^2 + 8t - 2$ d) $3t^2 + 8t + 2$

60. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = 2t^3 - 5t^2 - t$. ¿Cuál es la función que describe la velocidad instantánea?

a) $6t^2 - 10t - 1$ b) $6t^2 - t - 1$ c) $t^2 - 10t - 1$ d) $6t^2 + 10t - 1$

61. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = 7 + 3t - t^2$ ¿Cuál es la función que describe la velocidad instantánea?

a) $4 - 2t$ b) $3 - t$ c) $3 - 2t$ d) $3 + 2t$

62. La posición de una partícula esta dada por $s = t^3 - 3t^2 + 2t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué velocidad lleva a los 2s?

a) $10\frac{m}{s}$ b) $9\frac{m}{s}$ b) $9\frac{m}{s}$ d) $2\frac{m}{s}$

63. La posición de una partícula esta dada por $s = 7t^3 - 15t^2 - 370t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué velocidad lleva a los 5s?

a) $15\frac{m}{s}$ b) $12\frac{m}{s}$ c) $8.5\frac{m}{s}$ d) $5\frac{m}{s}$

64. La posición de una partícula esta dada por $s = t^2 - 6t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la velocidad instantánea sea cero?

a) 1s b) 2s c) 3s d) 5s

65. La posición de una partícula esta dada por $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + 9$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la velocidad instantánea sea cero?

a) 6.4s b) 5s c) 4s d) 1s

66. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = t^3 + 5t^2 - 2t$ ¿Cuál es la función que describe la aceleración instantánea?

a) $6t + 10$ b) $6t - 10$ c) $2t + 10$ d) $6t - 2$

67. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = 5t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ ¿Cuál es la función que describe la aceleración instantánea?

a) $t - 4$ b) $30t - 4$ c) $30t^2 + 4$ d) $t + 4$

68. La posición de una partícula esta dada por $s = 4 + 12t^2 - 2t^3$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la aceleración instantánea sea cero?

a) 5s b) 4s c) 2s d) 1s

69. La posición de una partícula esta dada por $s = t^3 - 2t^2 - 5t + 10$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la aceleración instantánea sea cero?

a) 4s b) 3s c) 1.66s d) 0.66s

70. La posición de una partícula esta dada por $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + 9$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la aceleración instantánea sea cero?

a) 10s b) 5s c) 4s d) 2s

71. La posición de una partícula esta dada por $s = t^3 - 5t^2 + 2t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué aceleración lleva a los 2s?

a) $6\frac{m}{s^2}$ b) $5\frac{m}{s^2}$ c) $3\frac{m}{s^2}$ d) $2\frac{m}{s^2}$

72. La ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = 2x^2 + x - 5$ en el punto $(1, -2)$ es:

a) $5x + y - 7 = 0$, $x + 5y - 9 = 0$
b) $5x - y - 7 = 0$, $x + 5y + 9 = 0$
c) $5x - y + 7 = 0$, $x - 5y + 9 = 0$
d) $x - 5y - 7 = 0$, $-x + 5y + 9 = 0$

73. La ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = x^3 - x$ en el punto $(-1, 0)$ es:

a) $2x + y + 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$
b) $2x - y - 2 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$
c) $2x - y + 2 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$
d) $x - 2y + 2 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$

74. Una función tiene un mínimo en el punto $P(x_1, y_1)$ si su derivada.

a) Es negativa después del punto.
b) Es positiva antes del punto.
c) Pasa de ser negativa antes del punto a positiva después del punto.
d) Es mayor que x_1

75. ¿Cuál es el punto mínimo de la función $y = x^2 - 2x - 8$?

a) $(-1, 9)$
b) $(1, -9)$
c) $(1, 9)$
d) $(-1, -9)$

76. El punto máximo de la función $y = -x^2 + 8x - 15$ es:

a) $(-1, -4)$
b) $(1, 4)$
c) $(4, 1)$
d) $(-4, -1)$

77. El punto máximo de la función $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 8$ es:

a) $(-3, 1)$
b) $(1, 3)$
c) $(-4, 1)$
d) $(-3, -1)$

78. ¿Cuál es el punto mínimo de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 46$?

a) $(-2, -2)$
b) $(2, 2)$
c) $(-2, 2)$
d) $(1, -2)$

79. El punto mínimo de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 29$ es:

a) $(3, -4)$
b) $(-1, 2)$
c) $(3, 2)$
d) $(-3, -2)$

80. ¿Cuál es el punto máximo de la función $f(x) = 2x^3 + 18x^2 + 30x - 51$?

a) $(5, -1)$
b) $(-5, -2)$
c) $(-5, 2)$
d) $(-5, -1)$

81. La función $f(x) = x^2 - 4$ es creciente en el intervalo:

a) $(-\infty, 0)$
b) $(-\infty, \infty)$
c) $(0, \infty)$
d) $[0, -\infty)$

82. La función $f(x) = 3 + 2x - x^2$ es decreciente en el intervalo:

a) $(-\infty, 1)$
b) $(1, \infty)$
c) $[0, \infty)$
d) $(1, -\infty)$

83. La función $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ es creciente en el intervalo:

a) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
b) $[-2, 1)$
c) $(-2, 1)$
d) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty$

84. El punto de inflexión de la función $f(x) = 2x^3 + 18x^2 + 30x - 20$ es:

a) $(-3, -2)$
b) $(3, -2)$
c) $(-3, 2)$
d) $(3, 2)$

85. El punto de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 29$ es:

a) $(-3, -2)$
b) $(1, -18)$
c) $(1, 18)$
d) $(18, -1)$

Lección 17

La Integral

1. La diferencial

Sea la función $y = f(x)$, entonces su diferencial se define como el producto de la derivada por el diferencial de "x".

$$dy = f'(x)\,dx$$

Ejemplo 1

La diferencial de la función $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ es:

a) $(3x^2 - 4x + 4)dx$ b) $(6x - 4)dx$ c) $(6x + 4)dx$ d) $(3x^2 - 4x - 4)dx$

Solución:

Se deriva la función, se multiplica por el diferencial de "x":

$$dy = (3x^2 - 4x + 4)dx$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La diferencial de la función $f(x) = \operatorname{sen} 4x$ es:

a) $4 \operatorname{sen} 4x$ b) $\cos 4x$ c) $4 \cos 4x dx$ d) $\operatorname{sen} 4x\, dx$

Solución:

Se deriva la función y se multiplica por el diferencial de "x":

$$dy = 4 \cos 4x dx$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

2. La función integrable en un intervalo cerrado

Una función $F(x)$ se denomina antiderivada de la función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de $x \in [a, b]$.

Ejemplo 1

¿Cual de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 2x - 3$?

a) $x^2 + 3x + C$ b) $2x - 3 + C$ c) $x^2 - 3x + C$ d) $2x + 3 + C$

Solución:

Cada una de las funciones se deriva para comprobar que es la antiderivada de $f(x) = 2x - 3$.

$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + C) = 2x + 3$, no es la antiderivada.

$\frac{d}{dx}(2x - 3 + C) = 2$, no es la antiderivada.

$\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + C) = 2x - 3$, es la antiderivada.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

La antiderivación

Es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada, el símbolo $\int$ (integral), denota la operación de antiderivada y se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde: $F'(x) = f(x)$ y C: constante de integración.

Integral inmediata

1) $\int dx = x + C$

2) $\int a\,dx = a\int dx$

3) $\int (u + v - w)dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx$

4) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

Ejemplo 1

La integral $\int x^2 dx$ es:

a) $\dfrac{2x}{3} + C$ b) $x^3 + C$ c) $\dfrac{x^3}{3} + C$ d) $\dfrac{x^2}{3} + C$

Solución:

Aplicando la integral $\int x^n dx$, se obtiene:

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La integral $\int (2x + 5)dx$ es:

a) $x^2 + 5 + C$ b) $2x^2 + 5x + C$ c) $2x + 5 + C$ d) $x^2 + 5x + C$

Solución:

Aplicando las fórmulas:

$$\int (2x+5)dx = \int 2x dx + \int 5 dx = 2\int x dx + 5\int dx = 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + 5x + C = \frac{2x^2}{2} + 5x + C = x^2 + 5x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La integral $\int x(3x+1)^2 dx$ es:

a) $\dfrac{9x^4}{4} + 2x^3 + \dfrac{x^2}{2} + C$ b) $\dfrac{x^2(3x+1)^3}{6} + C$ c) $\dfrac{9x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{x^2}{2} + C$ d) $\dfrac{x^2(3x+1)^3}{3} + C$

Solución:

Se desarrolla la multiplicación para después integrar:

$$\begin{aligned}\int x(3x+1)^2 dx = \int x(9x^2+6x+1)dx = \int (9x^3+6x^2+x)dx &= \int 9x^3 dx + \int 6x^2 dx + \int x dx \\ &= 9\int x^3 dx + 6\int x^2 dx + \int x dx \\ &= 9\left(\frac{x^4}{4}\right) + 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{9x^4}{4} + 2x^3 + \frac{x^2}{2} + C\end{aligned}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

La integral $\int(4\text{senx}+5\cos x)dx$ es:

a) 4cosx + 5senx + C
b) 4senx – 5cosx + C
c) 4senx + 5cosx + C
d) – 4cosx + 5senx + C

Solución:

$$\int(4\text{senx}+5\cos x)dx = \int 4\text{senxdx}+\int 5\cos x dx = 4\int \text{senxdx} + 5\int \cos x dx = 4(-\cos x)+5(\text{senx})+C$$

$$= -4\cos x + 5\text{senx} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

2. Cambio de variable

– Fórmulas:

1) $\int v^n dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1}+C$

2) $\int \dfrac{dv}{v} = \ln|v| + C$

3) $\int a^v dv = \dfrac{a^v}{\ln a}+C$

4) $\int e^v dv = e^v + C$

5) $\int \text{senv}\, dv = -\cos v + C$

6) $\int \cos v\, dv = \text{sen } v + C$

Ejemplo 1

La integral $\int 2(2x+1)^3 dx$ es:

a) $(2x+1)^4+C$
b) $\dfrac{(2x+1)^4}{4}+C$
c) $\dfrac{(2x+1)^3}{3}+C$
d) $\dfrac{(2x+1)^2}{2}+C$

Solución:

Se utiliza la fórmula $\int v^n dv$ donde:

$$v = 2x+1 \quad y \quad dv = 2dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\int 2(2x+1)^3 dx = \int (2x+1)^3 2dx = \int v^3 dv = \frac{v^4}{4}+C = \frac{(2x+1)^4}{4}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La integral $\int(3x^2+5x)^4(6x+5)dx$ es:

a) $\dfrac{(3x^2+5x)^5(6x+5)^2}{5}+C$
b) $4(3x^2+5x)^3+C$
c) $\dfrac{(6x+5)^2}{2}+C$
d) $\dfrac{(3x^2+5x)^5}{5}+C$

Solución:

Se utiliza la fórmula $\int v^n dv$, donde:

$$v = 3x^2+5x \quad y \quad dv = (6x+5)dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\int(3x^2+5x)^4(6x+5)dx = \int v^4 dv = \frac{v^5}{5}+C = \frac{(3x^2+5x)^5}{5}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La integral $\int \text{sen}^2 x \cos x dx$ es:

a) $\dfrac{\text{sen}^3 x}{3} + C$ b) $2\text{sen}x + C$ c) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{2} + C$ d) $\dfrac{\text{sen}\, x}{3} + C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$ donde:

$$v = \text{sen}\, x \quad y \quad dv = \cos x\, dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \int v^2 dv = \frac{v^3}{3} + C = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

La integral $\int 3 \cdot 2^{3x} dx$ es:

a) $2^{3x} + C$ b) $2^{3x+1} + C$ c) $\dfrac{2^3}{\ln 2} + C$ d) $\dfrac{2^{3x}}{\ln 2} + C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int a^v dv$, donde:

$$v = 3x \quad y \quad dv = 3dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\int 3 \cdot 2^{3x} dx = \int 2^{3x} \cdot 3dx = \int 2^v dv = \frac{2^v}{\ln 2} + C = \frac{2^{3x}}{\ln 2} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

La integral $\int 2 \cdot e^{2x} dx$ es:

a) $e^{2x} + C$ b) $e^x + C$ c) $2e^{2x} + C$ d) $2e^{2x+1} + C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int e^v dv$, donde:

$$v = 2x \quad y \quad dv = 2dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\int 2 \cdot e^{2x} dx = \int e^{2x} \cdot 2dx = \int e^v dv = e^v + C = e^{2x} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

La integral $\int 5\text{sen}(5x-3) dx$ es:

a) – sen (5x – 3) + C b) – cos (5x – 3) + C c) cos (5x – 3) + C d) sen (5x – 3) + C

Solución:

Se aplica la fórmula $\int \text{sen}\, v\, dv$, donde:

$$v = 5x - 3 \quad y \quad dv = 5dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\int 5\text{sen}(5x-3) dx = \int \text{sen}(5x-3) \cdot 5dx = \int \text{sen}\, v\, dv = -\cos v + C = -\cos(5x-3) + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

En todos los casos anteriores al obtener la diferencial, ésta, se tenía en la integral, sin embargo en algunas integrales se tiene que completar la diferencial para poder aplicar la fórmula.

Ejemplo 7

La integral $\int (3x+1)^2 dx$ es:

a) $\frac{(3x+1)^3}{3}+C$ b) $2(3x+1)+C$ c) $\frac{(3x+1)^3}{9}+C$ d) $\frac{(3x+1)}{3}+C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$ donde:

$$v = 3x + 1 \quad \text{y} \quad dv = 3dx$$

La diferencial es 3dx, entonces se completa la integral:

$$\int (3x+1)^2 dx = \int (3x+1)^2 \cdot \frac{1}{3}(3dx) = \frac{1}{3}\int (3x+1)^2 \cdot 3dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\frac{1}{3}\int (3x+1)^2 \cdot 3dx = \frac{1}{3}\int v^2 dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{v^3}{3}+C = \frac{v^3}{9}+C = \frac{(3x+1)^3}{9}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 8

La integral $\int (x^2+3)^5 x dx$ es:

a) $\frac{(x^2+3)^6}{6}+C$ b) $\frac{x(x^2+3)^6}{12}+C$ c) $\frac{x(x^2+3)^6}{6}+C$ d) $\frac{(x^2+3)^6}{12}+C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$, donde:

$$v = x^2 + 3 \quad \text{y} \quad dv = 2xdx$$

Se completa la integral:

$$\int (x^2+3)^5 x dx = \int (x^2+3)^5 \cdot \frac{1}{2}(2xdx) = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^5 (2xdx)$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\frac{1}{2}\int (x^2+3)^5 (2xdx) = \frac{1}{2}\int v^5 dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^6}{6}+C = \frac{v^6}{12}+C = \frac{(x^2+3)^6}{12}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 9

La integral $\int e^{5x} dx$ es:

a) $e^{5x}+C$ b) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$ c) $\frac{1}{5}e^{x}+C$ d) $e^{x}+C$

Solución:

Aplicando la fórmula $\int e^v dv$, donde $v = 5x$ y $dv = 5dx$, se completa la integral y se realiza el cambio de variable

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5dx = \frac{1}{5}\int e^v dv = \frac{1}{5}e^v + C = \frac{1}{5}e^{5x}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

3. Integración por partes

Es uno de los métodos más usados para la resolución de una integral y se define por:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Donde la segunda integral es más sencilla de integrar, se aplica cuando se tiene:

- Una función algebraica por una función trascendente y no se pueda realizar por cambio de variable.
- Funciones que no existen fórmulas directas, como lo son las logarítmicas o inversas trigonométricas.

Ejemplo 1

La integral $\int xe^x dx$ es:

a) $xe^x + C$ b) $\frac{x^2}{2} + e^x + C$ c) $xe^x - e^x + C$ d) $\frac{x^2e^x}{2} + C$

Solución:

Se eligen "u" y "dv" de la siguiente manera y se obtienen "du" y "v" respectivamente

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^x dx = e^x$$

De acuerdo a la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La integral $\int x\,\text{sen}\,x\,dx$ es:

a) $-x\cos x + \text{sen}\,x + C$ b) $x\cos x + \text{sen}\,x + C$ c) $-x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$ d) $x\,\text{sen}\,x - \cos x + C$

Solución:

Se eligen "u" y "dv" para obtener "du" y "v" respectivamente:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \text{sen}\,x\,dx \quad \rightarrow \quad v = \int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x$$

De acuerdo a la fórmula:

$$\int x\,\text{sen}\,x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \text{sen}\,x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

La integral $\int \ln x\,dx$ es:

a) $x\ln x + C$ b) $x(\ln x - 1) + C$ c) $x^2(\ln x + 1) + C$ d) $x\ln x - 1 + C$

Solución:

Se eligen u y dv: $u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$

$$dv = dx \quad \rightarrow \quad v = \int dx = x$$

Por tanto, $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

4. Integral definida

Sea y = f(x) una función continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida de f(x) de "a" a "b" es:

$$\int_a^b f(x) = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 1

El valor de la integral definida $\int_0^3 x^3 dx$ es:

a) $-\frac{81}{4}$ b) 3 c) – 3 d) $\frac{81}{4}$

Solución:

$$\int_0^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \left[\frac{(3)^4}{4}\right] - \left[\frac{(0)^4}{4}\right] = \frac{81}{4} - \frac{0}{4} = \frac{81}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El valor de la integral definida $\int_0^4 (x-1)^2 dx$ es:

a) $-\frac{26}{3}$ b) $\frac{28}{3}$ c) $\frac{26}{3}$ d) $-\frac{28}{3}$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$ donde v = x – 1 y dv = dx, entonces:

$$\int_0^4 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^4 = \frac{(4-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3} = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}x dx$

a) 1 b) 2 c) – 1 d) – 2

Solución:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = (-0) - (-1) = 0 + 1 = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

El valor de la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x \cos x dx$ es:

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{4}{3}$

Solución:

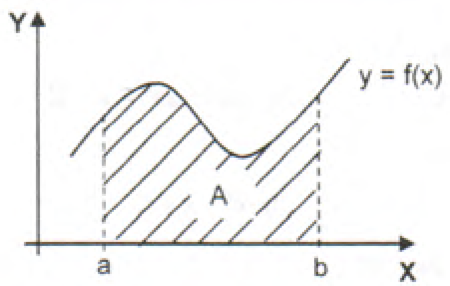
Se aplica la fórmula $\int v^n dv$, donde v = sen x y dv = cosx dx

Realizando el cambio de variable:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 dv = \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{(\text{sen}x)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - \frac{(\text{sen}\,0)^3}{3} = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

5. Área bajo una curva



Sea $y = f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$, entonces el área formada por la curva , el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 1

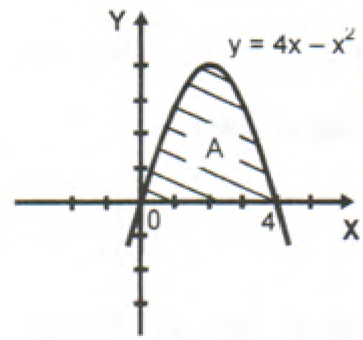
El área formada por la curva $y = 4x - x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$ es:

a) $\frac{64}{3}u^2$ b) $\frac{32}{3}u^2$ c) $\frac{16}{3}u^2$ d) $\frac{8}{3}u^2$

Solución:

El área esta dada por:

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)dx$$



Al resolver la integral definida se obtiene:

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3}\right] - \left[2(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}u^2.$$

El área es $\frac{32}{3}u^2$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

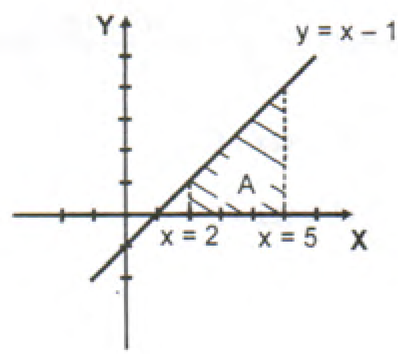
El área formada por la recta $y = x - 1$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 5$ es:

a) $\frac{35}{2}u^2$ b) $\frac{25}{2}u^2$ c) $\frac{15}{2}u^2$ d) $10u^2$

Solución:

El área está dada por:

$$A = \int_2^5 (x - 1)dx$$



Al resolver la integral definida, se obtiene:

$$\int_2^5 (x - 1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_2^5 = \left[\frac{(5)^2}{2} - 5\right] - \left[\frac{(2)^2}{2} - 2\right]$$

$$= \frac{25}{2} - 5 - 2 + 2 = \frac{15}{2}u^2.$$

El área es $\frac{15}{2}u^2$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejercicios

1. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$?

a) $x^3 + 2x^2 + x + C$ b) $x^3 + 2x^2 - x + C$ c) $x^3 + x^2 - x + C$ d) $2x^3 + 2x^2 - x + C$

2. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 2x - 1$?

a) $x^2 - 2x + C$ b) $x^2 + x + C$ c) $2x^2 - x + C$ d) $x^2 - x + C$

3. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 12x^2 - 2x + 6$?

a) $4x^3 - x^2 + 6x + C$ b) $4x^3 + x^2 + 6x + C$ c) $x^3 - x^2 + 6x + C$ d) $4x^3 - x^2 + x + C$

4. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $y = 1 - \cos x$?

a) $2x - \operatorname{sen}x + C$ b) $x + \operatorname{sen}x + C$ c) $x - \operatorname{sen}x + C$ d) $x^2 - \operatorname{sen}x + C$

5. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $y = \dfrac{1}{x-4}$?

a) $\ln(x-4)^2 + C$ b) $\ln(x+4) + C$ c) $2\ln(x-4) + C$ d) $\ln(x-4) + C$

6. La respuesta de $\int 9dx$ es:

a) $9x + C$ b) $\dfrac{1}{9}x + C$ c) $x + C$ d) $-9x + C$

7. El resultado de $\int (x^2 - 5x + 7)dx$ es:

a) $3x^3 - 5x^2 + 7x + C$ b) $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 7x + C$ c) $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + 7x + C$ d) $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 7x + C$

8. El resultado de $\int (4x^3 + x^2 - 8x + 12)dx$ es:

a) $\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 12x + C$ b) $x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + C$

c) $x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 12x + C$ d) $\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + C$

9. El resultado de $\int \left(\dfrac{x^3 - 3x^2 + 12x}{x}\right)dx$ es:

a) $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 12x + C$ b) $\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$

c) $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 12x + C$ d) $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 12x + C$

10. El resultado de $\int(2x-5)(6-x)dx$ es:

a) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-30x+C$

b) $-\frac{2}{3}x^3-\frac{17}{2}x^2-30x+C$

c) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2+30x+C$

d) $-x^3+\frac{17}{2}x^2-x+C$

11. El resultado de $\int\frac{2\,\text{senx}}{5}dx$ es:

a) $\frac{2}{5}\cos x+C$ b) $-\frac{2}{5}\cos x+C$ c) $-\cos x+C$ d) $-\frac{2}{5}\text{senx}+C$

12. El resultado de $\int\frac{4}{\csc x}dx$ es:

a) $-\frac{1}{4}\text{senx}+C$ b) $-\frac{1}{4}\cos x+C$ c) $-\cos x+C$ d) $-4\cos x+C$

13. El resultado de $\int(3x^2-5\cos x)dx$ es:

a) $x^3-5\text{senx}+C$ b) $x^3+5\text{senx}+C$ c) $5x^3-\text{senx}+C$ d) $x^3-\text{senx}+C$

14. El resultado de $\int(7\cos x-\text{senx})dx$ es:

a) $7\text{senx}-\cos x+C$ b) $7\text{senx}+\cos x+C$ c) $\text{senx}+\cos x+C$ d) $\text{senx}+7\cos x+C$

15. El resultado de $\int\frac{2}{\sec x}dx$ es:

a) $-2\text{senx}+C$ b) $2\text{senx}+C$ c) $\text{senx}+C$ d) $4\text{senx}+C$

16. El resultado de $\int(x-4)^2dx$ es:

a) $(x-4)^3+C$ b) $\frac{(x+4)^3}{3}+C$ c) $\frac{2(x-4)^3}{3}+C$ d) $\frac{(x-4)^3}{3}+C$

17. El resultado de $\int 2x(x^2-9)^3dx$ es:

a) $\frac{(x^2-9)^4}{5}+C$ b) $(x^2-9)^4+C$ c) $\frac{(x^2-9)^4}{4}+C$ d) $\frac{(x^2-9)^3}{4}+C$

18. El resultado de $\int\frac{10x}{(5x^2-2)^4}dx$ es:

a) $-\frac{1}{3(5x^2-2)^3}+C$ b) $\frac{1}{3(5x^2-2)^3}+C$ c) $-\frac{1}{3(5x^2-2)^4}+C$ d) $-\frac{3}{(5x^2-2)^3}+C$

19. El resultado de $\int x(3x^2+2)^5\,dx$ es:

a) $\frac{(3x^2+2)^6}{6}+C$ b) $-\frac{(3x^2+2)^6}{36}+C$ c) $\frac{(3x^2+2)^6}{36}+C$ d) $\frac{(3x^2-2)^6}{3}+C$

20. El resultado de $\int \cos 3x\,dx$ es:

a) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+C$ b) $\operatorname{sen}3x+C$ c) $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+C$ d) $3\operatorname{sen}3x+C$

21. El resultado de $\int x^2\cos x^3\,dx$ es:

a) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}x+C$ b) $\operatorname{sen}x^3+C$ c) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}x^3+C$ d) $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}x^3+C$

22. El resultado de $\int 3x\operatorname{sen}x^2\,dx$ es:

a) $-\frac{3}{2}\cos 2x^2+C$ b) $-\frac{3}{2}\cos x+C$ c) $\frac{3}{2}\cos x^2+C$ d) $-\frac{3}{2}\cos x^2+C$

23. El resultado de $\int e^{5x}\,dx$ es:

a) $\frac{2}{5}e^{5x}+C$ b) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$ c) $-\frac{1}{5}e^{5x}+C$ d) $\frac{1}{5}e^{x}+C$

24. El resultado de $\int 6xe^{x^2}\,dx$ es:

a) $3e^{-x^2}+C$ b) $e^{x^2}+C$ c) $-3e^{x^2}+C$ d) $3e^{x^2}+C$

25. El resultado de $\int 3\cos x\, e^{\operatorname{sen}x}\,dx$ es:

a) $3e^{\cos x}+C$ b) $-3e^{\operatorname{sen}x}+C$ c) $3e^{\operatorname{sen}x}+C$ d) $3\operatorname{sen}x e^{x}+C$

26. El resultado de $\int 5xe^{x}dx$ es:

a) $5(x-1)+C$ b) $5e^{x}(x-1)+C$ c) $-5e^{x}(x-1)+C$ d) $e^{x}(x-1)+C$

27. El resultado de $\int 2x\operatorname{sen}x\,dx$ es:

a) $\operatorname{sen}x - x\cos x + C$ b) $\operatorname{sen}x - 2x\cos x + C$ c) $2\operatorname{sen}x + 2x\cos x + C$ d) $2\operatorname{sen}x - 2x\cos x + C$

28. La integral de $\int \frac{\ln x}{2}\,dx$ es:

a) $\frac{x}{3}(\ln x-1)+C$ b) $\frac{3x}{2}(\ln x-1)+C$ c) $\frac{x}{2}(\ln x+1)+C$ d) $\frac{x}{2}(\ln x-1)+C$

29. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_0^1 x^2 dx$?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 3

30. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx$?

a) 10 b) 6 c) 4 d) 0

31. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_1^2 \left(1 - x^3\right) dx$?

a) $\frac{15}{4}$ b) $-\frac{11}{16}$ c) $-\frac{11}{4}$ d) $-\frac{7}{4}$

32. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_{-1}^{3} \left(x^3 - 1\right) dx$?

a) -5 b) 16 c) 26 d) 0

33. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

a) $18u^2$ b) $9u^2$ c) $-9u^2$ d) $-18u^2$

34. El área formada por la curva $y = 4 - x^2$, el eje X y las rectas $x = -1$, $x = 2$.

a) $-9u^2$ b) $16u^2$ c) $9u^2$ d) $29u^2$

35. Hallar el área limitada por la curva $y = x - x^3$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

a) $\frac{1}{4}u^2$ b) $\frac{2}{3}u^2$ c) $-\frac{1}{2}u^2$ d) $\frac{1}{3}u^2$