Enseñando Matemáticas

Material de apoyo para profesores de secundaria

Serie Enseñando Ciencias

Enseñando Matemáticas

Material de apoyo para profesores de secundaria

Coordinadores

Manuel Jesús Falconi Magaña
Francisco de Jesús Struck Chávez
Juan González Hernández
Miguel Lara Aparicio
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

Autores

Manuel Jesús Falconi Magaña
Alejandro Bravo Mojica
Francisco de Jesús Struck Chávez
Kenya Verónica Espinosa Hurtado
Guadalupe Eunice Campirán García
Juan González Hernández
Jésica Hernández Rojano
Mucuy Kak Guevara Aguirre
Miguel Lara Aparicio
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

Coordinación general
Rosaura Ruiz Gutiérrez

Coordinación académica
Alfredo Arnaud Bobadilla

Coordinación editorial
Rosanela Álvarez Ruiz

Asistencia académica
Daniela Franco Bodek

Diseño y formación digital
Intidrinero, S. A. de C. V.

Diseño de portada
Miguel Marín

Corrección
Paula Buzo Zarzosa

Enseñando matemáticas. Material de apoyo para profesores de secundaria.
1.ª edición, 2020.

ISBN:

Hecho en México

Índice

BLOQUE 3.
Manejo de la información

BLOQUE 4.
Actitudes hacia el estudio de las matemáticas

Presentación

Estimados maestros y maestras:

Quisiera, en primer lugar, destacar que su labor como docentes de Educación Básica es de enorme relevancia, toda vez que están trabajando con los niños y jóvenes en la construcción de los conocimientos, de una estructura mental, de las habilidades y las aptitudes que les permitirán convertirse en ciudadanos, futuros profesionistas y protagonistas en la toma de decisiones y resolución de los grandes retos del país.

Consciente de su papel como Universidad Nacional, y preocupada por la educación en todos sus niveles educativos, la UNAM, a través de esta Secretaría General, y la Academia Mexicana de Ciencias (AMC) han combinado sus esfuerzos para preparar esta serie "Enseñando ciencias", compuesta de cuatro libros dirigidos particularmente a profesores de secundaria de las asignaturas de Biología, Física, Matemáticas y Química.

Para la realización de esta serie, nos hemos dado a la tarea de reunir a equipos de profesores e investigadores de amplia experiencia universitaria, con el fin de diseñar y elaborar estos materiales, cuyo objetivo es proporcionar a nuestros colegas profesores elementos valiosos en los ámbitos disciplinar y metodológico, y con ellos coadyuvar a preservar una educación de calidad, basada en el rigor, la constancia, el compromiso y el manejo de conceptos que cuentan con el sustento de la investigación científica de vanguardia que se realiza en las aulas y laboratorios universitarios.

Me congratulo, pues, de poner a disposición de los profesores de secundaria de nuestro país y de cualquier docente de habla hispana, estos materiales que seguramente serán perfectibles, pero que también representarán, estoy seguro, una oportunidad de contrastar ideas y proseguir con este diálogo continuo que motiva la adquisición y actualización permanente de nuestros conocimientos, mismos que irán en beneficio de los alumnos.

Dr. Leonardo Lomelí Vanegas
Secretario General de la UNAM

Presentación

Estimados colegas:

Como parte de las tareas fundamentales que tiene la Facultad de Ciencias en el ámbito de la formación, la investigación y de la divulgación científica, me es grato presentar este libro que forma parte de la serie "Enseñando ciencias".

Este texto, dirigido a profesores de secundaria, constituye uno más de los apoyos con los que podrán contar los maestros para diseñar y dirigir sus actividades diarias; sobre todo, ha de verse como un libro de referencia para su labor docente, en tanto aporta recomendaciones didácticas, actividades y contenido disciplinar adaptados al ciclo de secundaria, pero pensando al mismo tiempo en ofrecer mayores elementos y recursos: un panorama más completo y profundo de su disciplina.

La participación de la Facultad de Ciencias en este libro da cuenta del interés por contribuir en la permanente y ardua labor de formar individuos del siglo XXI responsables, informados, críticos, comprometidos con su sociedad y con el ambiente, y preocupados por sumarse al desarrollo de este país. Pero ese desarrollo, que hasta hace apenas unas décadas dependía de la industrialización y de la mecanización de los procesos, el día de hoy y hacia el futuro cercano exigirá cada vez más de profesionales en el ámbito de la biotecnología, la física y las matemáticas, capaces de actuar y pensar en el terreno de la interdisciplina, de la ciencia de datos y de la complejidad.

En este marco, resulta indispensable despertar vocaciones científicas desde temprana edad, fomentar el pensamiento complejo y apostar por la alfabetización científica con el fin de contar con una masa crítica extendida que sepa tomar decisiones bien informadas en lo individual y para su sociedad; que pueda prevenir, anticipar e identificar posibles problemas, afectaciones y amenazas, pero también oportunidades y beneficios.

Por lo anterior, sostengo que la educación es una enorme responsabilidad que debe tomarse con la seriedad y con toda la dedicación que merece ya que es el único recurso con el que realmente cuenta una sociedad para crecer, desarrollarse, vivir en armonía, ser justa, equitativa y productiva.

Quisiera, en este sentido, agradecer la dedicación y esfuerzo de los profesores de la Facultad de Ciencias, de la UNAM y de la Academia Mexicana de las Ciencias, por darse el tiempo de reflexionar, trabajar su disciplina a un nivel que no es en el que desarrollan cotidianamente su labor docente; por esforzarse, por plantearse continuamente retos, por preocuparse en difundir los temas que los apasionan y por estar siempre dispuestos al diálogo, a la discusión constructiva y, sobre todo, por contribuir a que los jóvenes se acerquen a la ciencia en un momento en el que nos es tan necesaria.

Y a ustedes, estimados maestros y maestras, agradezco el trabajo que realizan día a día, no sólo para educar, sino para formar a nuestros jóvenes, que serán las generaciones encargadas de conducir el destino de nuestro país. Espero que este libro les sea de utilidad para cumplir con esta gran misión que tienen en sus manos y resulte oportuno para ayudar a abrir horizontes y nuevos adeptos a la ciencia.

Dra. Catalina Stern Forgach
Directora General de la Facultad de Ciencias de la UNAM

Presentación serie "Enseñando ciencias"

En las últimas décadas, instituciones educativas de varios países han volteado a ver y a estudiar de manera muy seria el problema de la enseñanza en general y de las ciencias en particular. Lo anterior, en función de la demanda creciente de profesionistas que ha observado este ámbito y que tendrá en los próximos años, pero sobre todo porque la alfabetización científica es ahora, más que nunca, un derecho y una responsabilidad ciudadana en vistas del vertiginoso avance que han conocido las ciencias y la tecnología desde el último cuarto del siglo pasado y que, al día de hoy, tienen una aguda penetración en prácticamente todos los ámbitos de nuestra cotidianeidad.

Este escenario nos lleva a considerar que mejorar el aprendizaje de los alumnos es una prioridad, y que alfabetizar en ciencias no es una tarea fácil: implica formar ciudadanos que conozcan los principales conceptos y teorías de los distintos campos de conocimiento, que sean capaces de usarlos en la resolución de problemas, que conozcan la naturaleza social de la ciencia y sus implicaciones para la sociedad; supone también la formación de capacidades cognitivas, como la interpretación de fenómenos naturales, el procesamiento de información de distintas fuentes y la evaluación de dicha información. El reto para los docentes no es trivial; por ello, fortalecer su formación se convierte en una necesidad inaplazable.

Es, justamente, a partir de este compromiso que la UNAM y Academia Mexicana de las Ciencias (AMC) hemos asumido la tarea de elaborar la serie "Enseñando ciencias", donde se analizan teorías y conceptos centrales de la Biología, las Matemáticas, la Física y la Química, con el propósito de apoyar a los profesores en el fortalecimiento de sus conocimientos disciplinarios, ya que éstos constituyen un elemento central del proceso didáctico. Los nuevos enfoques en el campo de la didáctica de las ciencias señalan que es fundamental que los docentes, además de una sólida formación pedagógica y didáctica, tengan una comprensión profunda sobre la ciencia a enseñar y que conozcan las dificultades en la enseñanza-aprendizaje inherentes a los distintos saberes científicos. Por tanto, deben contar con criterios disciplinarios claros que les permitan determinar los conceptos, teorías, modelos, entre otros, que son relevantes en la comprensión de las disciplinas científicas en la educación secundaria.

Por lo anterior, me es muy gratificante ver consolidado el esfuerzo de varios colegas en esta serie que se pone al alcance de aquellos que tienen la gran tarea de preparar y formar a nuestros jóvenes en estas áreas de especial relevancia para el contexto actual.

Dr. José Luis Morán
Presidente de la Academia Mexicana de Ciencias

Prólogo

Estimados maestros:

Es un verdadero gusto para mí presentar este libro que forma parte de la serie "Enseñando ciencias", resultado de la labor que desde la Secretaría General de la UNAM y la Academia Mexicana de Ciencias venimos realizando desde hace más de una década en apoyo al fortalecimiento de la Educación Básica, Media Superior y Superior.

En efecto, he tenido el privilegio de coordinar e impulsar, desde el año 2008, diversos proyectos institucionales en apoyo a profesores de todo el país, que se han visto consolidados en cursos, diplomados, estudios diagnósticos y materiales que a lo largo de los años se han ido ajustando y optimizando, con el único fin de coadyuvar al esfuerzo que muchas instituciones y grupos de académicos hemos venido realizando en pro del mejoramiento continuo y permanente de la educación en nuestro país.

A pesar de la trascendencia que tiene la formación científica para los ciudadanos, un buen número de trabajos muestran que los alumnos tienen dificultades para comprender teorías y conceptos científicos. Existe, asimismo, una gran dificultad para que modifiquen sus ideas previas, asimilen nuevas concepciones y para que apliquen los conocimientos adquiridos. A esto se suma la frustración de los profesores debido a los insuficientes resultados en su práctica docente. Son diversos los factores que han originado esta crisis, y entre los más importantes encontramos: la distancia entre las necesidades formativas de los estudiantes y los currículos de ciencia; la gran cantidad de temas que abordan los contenidos escolares y lo poco significativos que resultan para los estudiantes; en muchos casos, una enseñanza de la ciencia basada en visiones deformadas de la actividad científica y en estrategias memorísticas que poco alientan la formación que requiere la sociedad actual; las deficiencias en los enfoques didácticos empleados para abordar las estrategias de razonamiento y solución de los problemas propios de la ciencia.

El trabajo realizado durante estos años parte de la consideración de que la formación científica en campos como Matemáticas, Física, Química y Biología es fundamental para todos los ciudadanos, ya que cada una de estas disciplinas ofrece distintas maneras de leer, comprender, transformar y preservar el mundo que nos rodea. Los conocimientos que se derivan de estos campos de conocimiento pueden emplearse en la solución de problemas socialmente relevantes y ayudan a tomar decisiones argumentadas y razonadas; fomentan la formación de capacidades cognitivas como la interpretación de fenómenos, el procesamiento y la evaluación de información, la solución de problemas, entre muchos otros aspectos. Por estas razones es tan relevante que los estudiantes de secundaria conozcan teorías y conceptos centrales de estas ciencias y comprendan cómo cada una de ellas explica el mundo que nos rodea. Esto les aportará herramientas para configurar un pensamiento científico que les permita explicar situaciones que los afectan en su vida cotidiana y entender problemas de relevancia científica y social.

En este contexto, el presente libro, producto de la experiencia recabada a lo largo de muchos años de trabajo hombro con hombro con maestros y maestras de todo el país y del conocimiento y compromiso de expertos de la Universidad Nacional Autónoma de México en estos campos del saber, busca ofrecer a los profesores de secundaria un apoyo especialmente pensado para fortalecer sus conocimientos disciplinarios, que acompañados por su experiencia en el aula y su conocimiento pedagógico y didáctico, seguramente aportarán elementos para reforzar su práctica docente, tarea fundamental en estos momentos en que el país requiere de ciudadanos educados y comprometidos con ellos mismos, con la sociedad y con el cuidado de la naturaleza.

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
Profesora de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias, UNAM

Introducción al libro *Enseñando Matemáticas*

Estimados colegas:

Este libro, que forma parte de la serie "Enseñando ciencias", es un texto dirigido y pensado para apoyar en su labor diaria a los profesores de secundaria que imparten la asignatura de Matemáticas.

El libro está construido en cuatro grandes apartados escritos por experimentados profesores de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en sus muy particulares áreas de especialización al interior de las matemáticas mismas. Se dio total libertad a cada grupo de autores para escribir el bloque temático que les fue asignado, de manera que vamos a encontrar estilos y formas distintas de abordar cada uno de los temas, lo que le da mucha riqueza y versatilidad al conjunto.

Siguiendo, pues, los ejes temáticos del Plan de Estudios oficial 2011, el libro se divide en cuatro bloques temáticos que se describen de manera muy sucinta a continuación.

El primer bloque, "Medida y número", sobre los conceptos que se enuncian en el título mismo. En este apartado, los autores exponen ejercicios que van deshilvanando hasta llegar a la expresión matemática que explica y desentraña cada uno de los problemas planteados por los mismos autores.

El bloque "Forma, espacio y medida" es también una aproximación muy directa y lógica es una aproximación muy didáctica y lógica a la geometría, que muestra cómo desglosar los problemas para resolverlos con instrumentos y técnicas sencillas que no requieren de otra cosa más que la aplicación de las reglas básicas de la geometría y de ánimos para pensar, reflexionar y poner en práctica nuestros conocimientos.

"Manejo de la información" es un apartado muy ágil y ameno para introducir a los alumnos a interesarse en la estadística y la probabilidad, y cómo esta área de la matemática se encuentra en un sinnúmero de aplicaciones de la vida real. El entendimiento y manejo de la probabilidad y la estadística pueden ser una verdadera ayuda para resolver problemas o tomar decisiones en nuestra cotidianeidad.

Por último, el apartado "Actitudes hacia el estudio de las matemáticas" tiene el objetivo de ofrecer herramientas y estrategias para desarrollar el gusto por el pensamiento y razonamiento matemáticos, útiles, entre otras cosas, para buscar soluciones creativas y alternativas, así como también para forjarse una estructura mental rigurosa y disciplinada desde el enfoque del razonamiento matemático.

Es así como estos cuatro bloques fueron planeados y desarrollados para entablar un diálogo con los profesores de matemáticas de secundaria, quienes encontrarán, sin lugar a dudas, estrategias, herramientas y valiosos consejos para la mejora y profundización de su práctica cotidiana.

Dr. Alfredo Arnaud Bobadilla
Coordinador Académico de la serie "Enseñando ciencias"

1 | Medida y número

Manuel Jesús Falconi Magaña
Alejandro Bravo Mojica

1.1. Introducción

El número es la noción fundamental de la matemática y le ha permitido a ésta convertirse en el lenguaje de la ciencia y en una herramienta esencial para resolver problemas en los más diversos ámbitos. Casi cualquier hecho de interés para la sociedad requiere ser medido; para ello, los factores o elementos de un proceso se identifican por su valor numérico y las interacciones entre éstos se convierten en relaciones de variables numéricas. Por lo tanto, el manejo de los números es una cuestión básica.

En este apartado mostraremos cómo, a partir de la idea de contar, el número se convierte en un elemento para medir. También veremos que el proceso de medir nos conduce a definir una clase de números que no se pueden expresar como fracción de dos enteros, motivo por el cual se llaman números irracionales.

1.2. ¿Qué significa medir?

Toda persona tiene una idea de volumen y de número. Si ponemos juntos dos cúmulos de azúcar, como en la figura 1-1, seguramente, cualquiera contestará que el de la derecha es mayor o tiene más azúcar. También podemos distinguir, de entre dos grupos de personas, cuál es el más numeroso. En ambos casos hemos realizado una comparación directa, con la cual también podemos indicar, por ejemplo, de entre dos cintas de diferente longitud, cuál es la más larga. Sin embargo, no siempre podemos hacer estas comparaciones directas; por ejemplo, si Juan y Pedro tienen cada quien una cinta, pero viven en ciudades distintas, no tenemos cómo compararlas de manera directa y, por lo tanto, no podemos darnos cuenta de cuál tiene mayor longitud.

Figura 1-1. Dos cúmulos de diferentes tamaños.

¿Qué hacer entonces? Podemos representar una cinta estirada con un segmento de recta (véase la figura 1-2); así, el problema consiste en saber si un segmento recto es mayor que otro.

Figura 1-2.
La cinta tiene la misma longitud que el segmento inferior.

Para resolver estos problemas, aun en el caso de que no sea posible realizar una comparación directa, la humanidad creó un método que conocemos como medición. Para describirlo, trataremos de saber si un segmento es más largo que otro. El primer paso consiste en elegir un segmento *M,* que será nuestra unidad de medida. Si *M* cabe exactamente tres veces en un segmento *L*, quiere decir que este último tiene una longitud de 3 (véase la figura 1-3); en tanto, *L* tiene una longitud de 20 si *M* cabe 20 veces en él, y así sucesivamente.

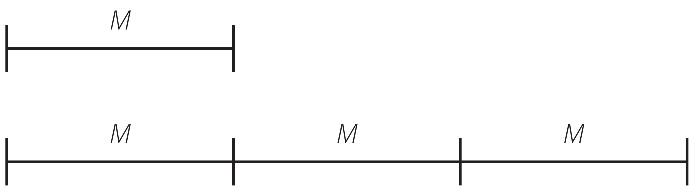


Figura 1-3.
El segmento superior es el segmento unitario. El inferior mide 3 unidades.

No obstante, hay segmentos para los cuales la unidad de medida no cabe un número exacto de veces. En la figura 1-4 vemos que *M* cabe dos veces en el segmento de color verde, pero sobra una porción; por otra parte, si yuxtaponemos tres veces la unidad, sobrepasamos al segmento. Por lo tanto, el segmento verde tiene una longitud > 2 y < 3.

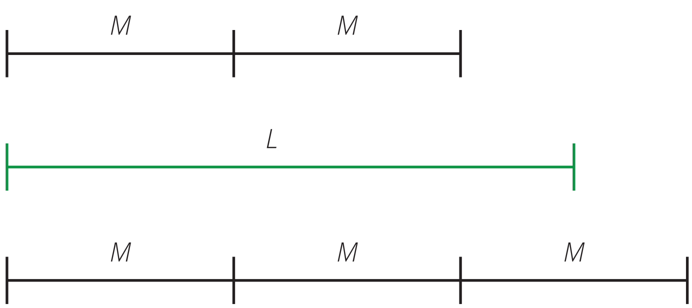


Figura 1-4.
El segmento *L* mide > 2 y < 3 unidades.

Como ejercicio, sugerimos formar varios grupos con los alumnos y a cada uno asignarle una unidad diferente. Deberán medir la longitud de diversas partes del salón de clases y hacer una tabla con los resultados de sus mediciones. Con el ejercicio mostrarán que:

1. El número de unidades en una misma longitud medida depende de la unidad utilizada.
2. Para algunas de las longitudes medidas, aunque sean diferentes, se requerirán, por ejemplo, más de dos y menos de tres unidades.

Estas observaciones nos llevan, respectivamente, a las preguntas siguientes:

1. ¿Cómo se puede convertir la longitud obtenida de una unidad a otra?
2. ¿Cómo podemos mejorar el método para comparar dos longitudes cuando no tienen un número exacto de unidades?

Después de esta reflexión podríamos concluir que, si resolvemos la segunda pregunta, entonces tendremos la respuesta de la primera. Supongamos que el segmento dado tiene una longitud de entre 3 y 4 unidades (véase la figura 1-5).

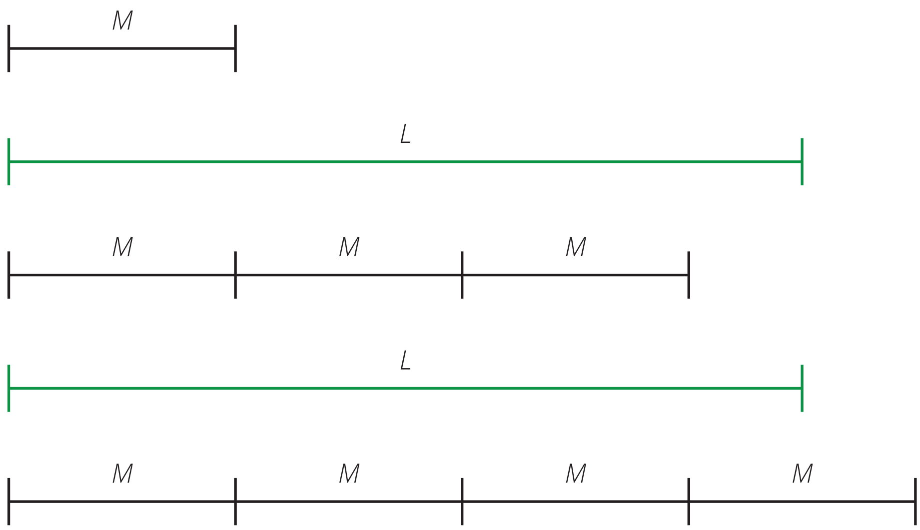


Figura 1-5. El segmento L mide > 3 y < 4 unidades.

Dividimos a la unidad en dos partes iguales y establecemos que cada una mide $1/2$ de la unidad. Luego, yuxtaponemos tres unidades y un segmento de longitud $1/2$; si cubren exactamente al segmento dado, entonces decimos que este último mide tres unidades más la mitad de una unidad, lo que podemos representar con $3 + 1/2$ (véase la figura 1-6). En términos de la mitad de la unidad, el segmento mide siete mitades, lo cual representamos con $7/2$. Con lo anterior, vemos que para medir longitudes necesitamos usar los números fraccionarios. Del ejemplo, además obtenemos que $3 + 1/2 = 7/2$.

Si al yuxtaponer las tres unidades más la mitad de la unidad no cubrimos totalmente el segmento, concluimos que la longitud es $> 7/2$; pero, si lo sobrepasamos, entonces su longitud es $< 7/2$. En ambos casos, ya sea que la longitud resulte $> 7/2$ o $< 7/2$, para intentar medir con mayor exactitud, dividimos a la unidad en tres partes iguales y decimos que cada parte mide $1/3$. Si después de yuxtaponer tres unidades cubrimos el sobrante del segmento con una parte de longitud

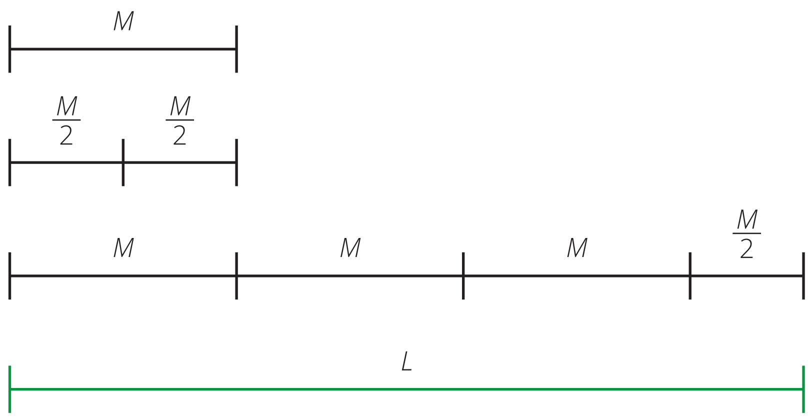


Figura 1-6.
El segmento L mide $3 + 1/2$ unidades.

$1/3$, tenemos que la longitud total es $3 + 1/3$. Observemos que como cada unidad es igual a $3/3$, entonces, $3 + 1/3 = 9/3 + 1/3 = 10/3$. Si la parte sobrante se cubre con dos partes de longitud $1/3$ cada una, entonces la longitud de todo el segmento es $3 + 2/3$; así, $3 + 2/3 = 11/3$. En este procedimiento se puede continuar dividiendo a la unidad en tantas partes como sea necesario. En general, si para cubrir un segmento ha sido necesario partir en n partes a la unidad y tomar m de ellas, la longitud del segmento es m/n.

Este método para medir longitudes nos conduce a los problemas que planteamos a continuación.

1. Si un segmento mide m/n y el otro mide p/q, ¿cómo podemos saber cuál es el más largo?
2. Si a un segmento que mide m/n le unimos otro que mide p/q, ¿cuánto mide el segmento en total?

Para contestar la primera pregunta, nos basamos en el hecho de que si un número x es mayor que otro número y, entonces r veces el número x también será mayor que r veces el número y; es decir, si $x > y$, entonces $rx > ry$ (suponemos que r es > 0). Por ejemplo, $5 > 3$, por lo tanto, $20 \times 5 > 20 \times 3$. El recíproco también es verdadero; si $rx > ry$, entonces $x > y$ (nuevamente, suponemos que $r > 0$).

Ahora usemos la última afirmación. Tomamos un segmento de longitud m/n y lo yuxtaponemos $n \times q$ veces, entonces obtenemos un segmento de longitud $m \times q$; esto equivale a la siguiente operación: $nq \times m/n = mq$.

Si yuxtaponemos el segmento p/q el mismo número de veces ($n \times q$), tenemos un segmento de longitud $n \times p$. Como en ambos casos hemos colocado el mismo número de veces cada segmento, concluimos que $m/n > p/q$ si $mq > np$. En caso contrario, resulta que $p/q > m/n$.

Veamos: un segmento mide $19/6$ y otro mide $21/7$, ¿cuál es mayor?

Como $7 \times 19 > 6 \times 21$, la respuesta es que $19/6 > 21/7$.

Analicemos ahora la segunda pregunta. Denotemos con L_1 al segmento que mide m/n y con L_2 al segmento que mide p/q. Sea L el segmento que resulta al unir L_1 con L_2 (véase la figura 1-7). Para medir el segmento L_1 hemos dividido a la unidad en n partes, y se requirieron m de éstas para cubrirlo. Si tomamos una parte de longitud $1/n$ y la dividimos en q partes iguales, cada una de las divisiones mide $1/nq$, y se requieren q de estas partes para obtener un intervalo de longitud $1/n$. Entonces, $1/n = q/nq$ y, consecuentemente, $m/n = mq/nq$. Luego hacemos lo análogo, pero dividimos cada parte de longitud $1/q$ en n partes, lo que da como resultado que el segmento de longitud p/q es igual a np/nq. De lo anterior, vemos que para cubrir el segmento L se necesitan $mq + np$ segmentos de longitud $1/nq$. Es decir, L mide $\frac{mq+np}{nq}$; por lo tanto, $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$.

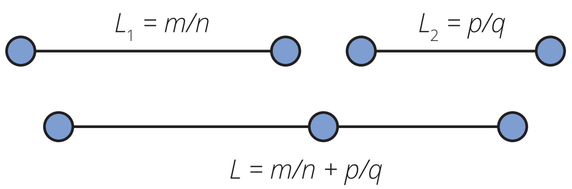


Figura 1-7. La longitud del segmento inferior es la suma de las longitudes de los segmentos superiores.

El proceso descrito para medir longitudes nos conduce a los siguientes problemas:

1. ¿Cómo dividir un segmento en n partes iguales?
2. Con el procedimiento descrito para medir longitudes, ¿se puede medir cualquier segmento?

Para responder a la primera de estas preguntas, debemos recordar el siguiente resultado de la geometría: si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces los lados correspondientes son proporcionales.

A continuación mostramos cómo dividir a un segmento L en n segmentos de la misma longitud. Dado el segmento L, por uno de sus extremos (que llamaremos A) trazamos un segmento H. Abrimos el compás, ponemos el centro en A y cortamos al segmento en un punto P_1 (véase la figura 1-8); con la misma abertura del compás, ponemos el centro en P_1 y trazamos el punto P_2 en H. Repetimos este proceso hasta obtener n puntos. Ahora unimos el punto P_n con el otro extremo de L, que llamaremos B, y por cada punto P_i trazamos una paralela a P_nB que corte a L en el punto x_i; todos los segmentos x_ix_{i+1} son iguales. Notemos que x_0 es el punto A y x_n, el punto B.

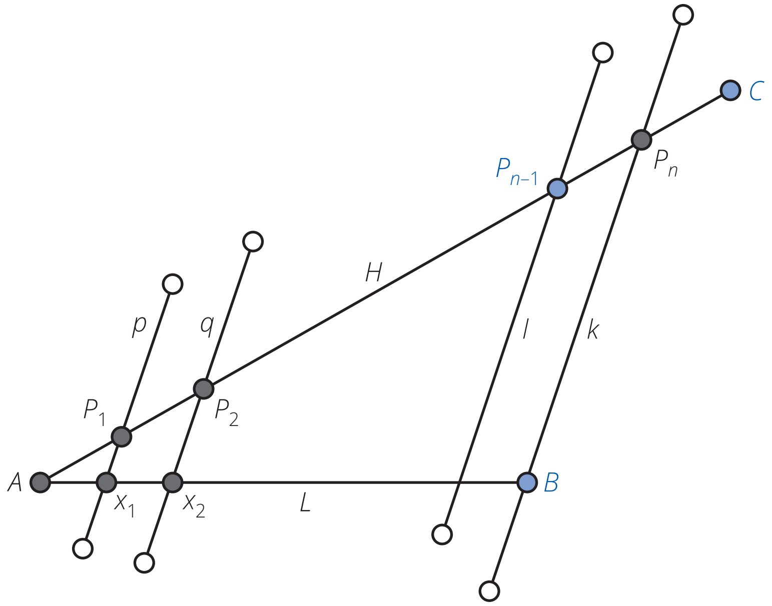


Figura 1-8. Los segmentos Ax_1, x_1x_2 ... tienen la misma longitud.

En el segundo problema se plantea si una vez elegido un segmento *U* como unidad, cualquier segmento *L* es exactamente un número entero de unidades o un número entero de partes iguales del segmento *U*. La respuesta es negativa. La diagonal *D* de un cuadrado de lado unitario no es igual a un número entero de partes de la unidad; es decir, *D* es diferente de *m*/*n* para todo *m* y para todo *n*; su longitud no es un número fraccionario. ¿Cómo se sabe esto? Por el teorema de Pitágoras; si *l* es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, entonces $l^2 = 2$; así, $l = \sqrt{2}$. En el apéndice, hacemos una demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número fraccionario.

1.2.1. Medición de áreas

El área de una región nos da una idea de su extensión. ¿Cómo podemos saber si una región tiene mayor extensión que otra? Una forma consiste en superponer las dos regiones, como se muestra en la figura 1-9.

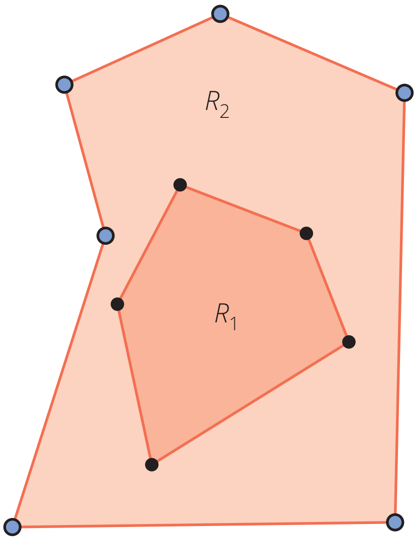


Figura 1-9.
La región R_2 tiene una mayor extensión que la región R_1.

Sin embargo, esto no es siempre posible; por ejemplo, si queremos saber cuál estado, Chihuahua o Tlaxcala, tiene mayor extensión. Incluso, en caso de que podamos superponer las regiones, podría ser difícil determinar la respuesta con certeza (véase la figura 1-10).

Como en el caso de la medición de longitudes, debemos buscar una forma de asociar un número con cada región, de modo que si una región es dividida en dos partes, el número asociado a la región entera sea la suma de los números asociados a cada parte. En general, postulamos que si una región *A* cabe *k* veces en otra región *B*, entonces el área de *A* es 1/*k* del área de la región *B*. El número asociado será el área de la región. A continuación explicamos la forma de asignarle un área a cada región.

El procedimiento da inicio al elegir una unidad de longitud. Decimos que el área de un cuadrado de lado 1 es igual a una unidad cuadrada; por ejemplo, 1 m². Para una región arbitraria, el procedimiento consiste en contar el número de cuadrados de lado 1 que cubren exactamente a la región. Una región mide 10 m² si se cubre con 10 cuadrados de lado 1. Para asociarle un número (o área) a aquellas regiones que no se pueden cubrir exactamente con cuadrados de área 1, se procede a dividir el cuadrado en un número entero de partes iguales. Por ejemplo, si lo dividimos en tres partes iguales, cada parte tendrá un área igual a $1/3$ unidades cuadradas. Podemos dividir al cuadrado unitario en cuatro cuadrados iguales si partimos cada lado en segmentos de longitud $1/2$, y decimos que el área de cada uno de estos cuadrados es $1/4$. Al dividir cada lado en tres segmentos iguales obtenemos nueve cuadrados, cada uno de área $1/9$. En la figura 1-11, hemos dividido al cuadrado en seis partes iguales, por lo tanto, cada parte tiene un área igual a $1/6$ unidades cuadradas. En general, si cada lado del

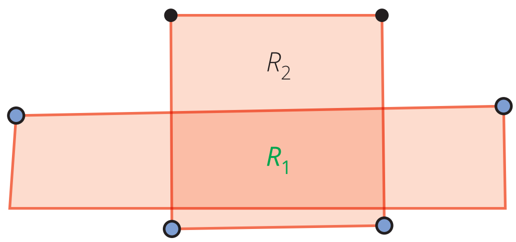


Figura 1-10.
A simple vista no es posible decidir cuál es la región con mayor extensión.

cuadrado unitario se divide en segmentos de longitud $1/n$, cada cuadrado de lado $1/n$ tendrá un área igual a $1/n^2$.

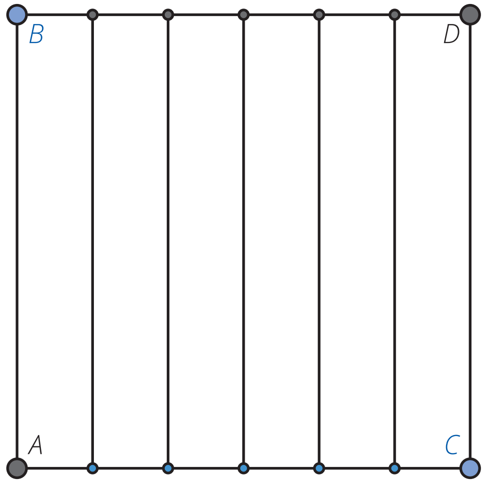


Figura 1-11. El cuadrado *ABCD* se ha dividido en 6 rectángulos de la misma área.

En un rectángulo que tiene un lado que mide m unidades y otro que mide n unidades, caben exactamente mn cuadrados de lado 1 y, por lo tanto, de área 1. Entonces, el rectángulo tiene un área de mn unidades cuadradas (véase la figura 1-12); es decir, el área del rectángulo es igual al producto de sus lados.

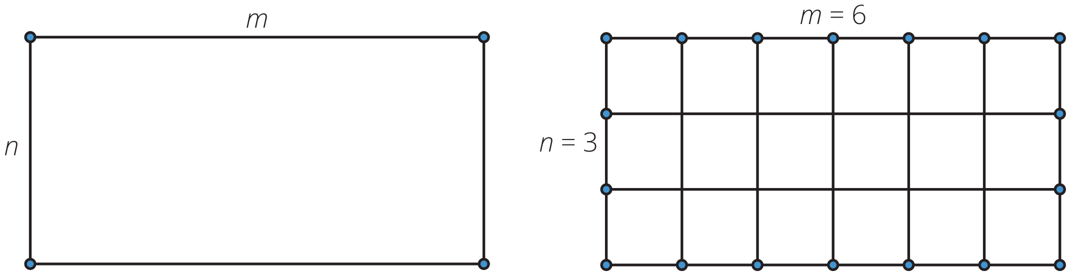


Figura 1-12. El rectángulo cuyos lados miden 6 unidades y 3 unidades tiene un área de 18 unidades cuadradas.

Ahora veamos cómo asociar un área a un rectángulo cuyos lados tienen longitudes fraccionarias. En la figura 1-13 se tiene un rectángulo de lados $5/3$ y $3/4$.

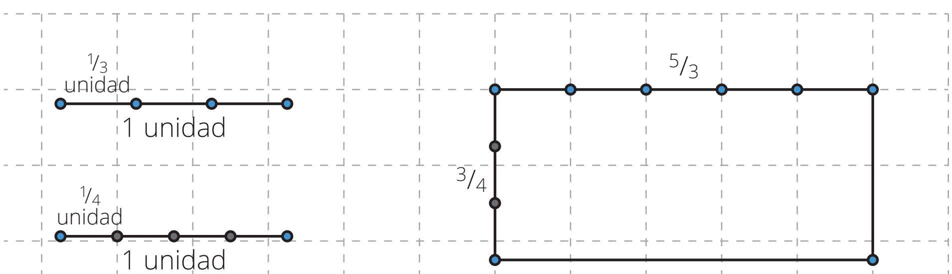


Figura 1-13. Rectángulo de lados $5/3$ y $3/4$.

Si cada segmento de longitud $1/3$ es dividido en cuatro partes iguales, se obtiene que la longitud $5/3 = 20/12$. Análogamente, al dividir cada segmento de longitud

$1/4$ en tres partes iguales se obtiene que $3/4 = 9/12$. De este modo, el rectángulo queda dividido en cuadrados de lado $1/12$ de unidad y, por lo tanto, de área igual a $20/12^2 = 20/144$. Como se requieren 9×20 de estos cuadrados para cubrir el rectángulo, entonces el área es igual a $\frac{9\times 20}{12\times 12}$. El área del rectángulo es igual al producto de sus lados si definimos que el producto $\frac{9}{12}\times\frac{20}{12}$ es igual a $\frac{9\times 20}{12\times 12}$. Más aún, como $5/3 = 20/12$ y $3/4 = 9/12$, entonces, $\frac{9}{12}\times\frac{20}{12}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}=\frac{15}{12}$. En general, si tenemos un rectángulo de lados m/n y p/q, el procedimiento anterior nos da un área igual a $A = \frac{mqnp}{n^2q^2}$; con la definición del producto vemos que $A = \frac{mqnp}{n^2q^2}=\frac{mq}{nq}\times\frac{np}{nq}$. Como $\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n}$ y $\frac{np}{nq}=\frac{p}{q}$, se llega a que $A = \frac{np}{nq}=\frac{p}{q}$; es decir, el área es el producto de los lados.

Hasta ahora hemos justificado que el área de un rectángulo con lados fraccionarios es igual al producto de sus lados. Por otra parte, podemos calcular el área de un triángulo si conocemos uno de sus lados y la altura, como se muestra en la figura 1-14a.

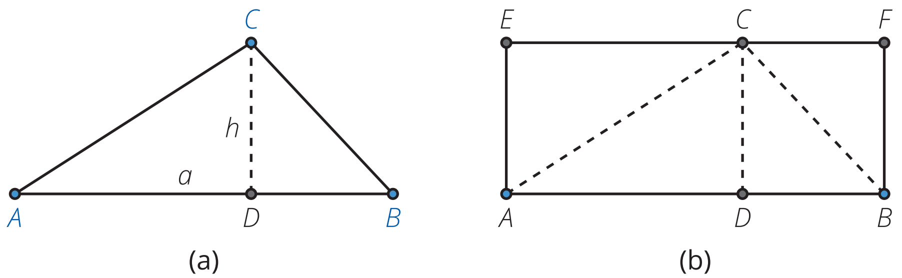


Figura 1-14. El área del rectángulo *ABFE* es dos veces el área del triángulo *ABC*.

Construimos un rectángulo como en la figura 1-14b. Representamos con a la longitud del segmento *AB* y denotamos con h la altura del triángulo, la cual es igual a la longitud del segmento *CD*. El triángulo *ABC* está formado por los triángulos *ADC* y *DCB*. Por otra parte, el triángulo *ADC* es congruente con el triángulo *AEC,* y el triángulo *CBD* es congruente con el triángulo *CBF;* por lo tanto, el área del rectángulo *ABFE* es dos veces el área del triángulo *ABC*. De manera equivalente, el área del triángulo *ABC* es igual a $\frac{ah}{2}$.

1.3. Fracciones decimales

Una variante del procedimiento descrito para medir consiste en dividir cada parte entre 10 cada vez que sea necesario. De igual manera, para medir la longitud de un segmento contamos cuántas veces cabe la unidad de medida en el segmento, pero si es más largo que un número entero de veces la unidad, para medir la parte restante dividimos a la unidad en 10 partes iguales y contamos cuántas de estas partes la cubren.

Por ejemplo, si elegimos como unidad al metro (m), y para medir la cerca de un jardín se requieren 3 m, pero sobra un pedazo de la cerca que es < 1 m, entonces partimos al metro en 10 partes iguales y vemos que la cerca restante se cubre con cuatro pedazos de longitud $1/10$ m; por lo tanto, la longitud de la cerca es de tres metros más $4/10$ o, simplemente, $3 + 4/10$ m. Como una unidad es igual a

10 décimas partes, tenemos que $3 = \frac{30}{10}$ y, por tanto, $3 + \frac{4}{10} = \frac{34}{10}$. En caso de que al cubrir la parte restante con cuatro partes de longitud $1/10$, sobrara una parte de la cerca $< 1/10$, entonces dividimos el segmento nuevamente en 10 partes iguales, cada una de las cuales mide $1/100$ m; luego contamos cuántas partes de longitud $1/100$ cubren la cerca que falta de medir. Si se requirieran seis partes de $1/100$, diríamos que la cerca mide $3 + 4/10 + 6/100$ m. Como 1 es igual a 100 veces $1/100$ y $1/10$ es igual a 10 veces $1/100$, tenemos que $3 + 4/10 + 6/100 = 346/100$. Notemos que $10^2 = 100$ y $10^3 = 1000$, etcétera; entonces, $3 + 4/10 + 6/100 = 3 + 4/10 + 6/10^2$, o bien $7 + 1/10 + 8/100 + 4/1000 = 7 + 1/10 + 8/10^2 + 4/10^3$.

En principio, este proceso se puede repetir tantas veces como sea necesario, pero presenta dificultades técnicas. Por ejemplo, podemos distinguir a simple vista que un milímetro es igual a $1/1000$ m, pero no $1/10$ mm, o sea, $1/10000$ m. Sin embargo, actualmente es posible medir la longitud de organismos tan pequeños como las bacterias, cuyos tamaños se expresan en micras ($1\ \mu = 1/1000000$ m). Algunas otras fracciones del metro tienen nombres especiales; por ejemplo, $1/10$ m se llama decímetro (dm), $1/100$ m es centímetro (cm), etcétera.

1.3.1. Notación decimal

Con la llamada notación decimal, un número como $6 + 1/10 + 5/10^2 + 8/10^3$ se expresa como 6.158. Después del número entero se coloca un punto decimal y, a continuación, los numeradores de las potencias consecutivas de $1/10$. Por otra parte, $6 + 1/10 + 5/10^2 + 8/10^3 = 6000/1000 + 100/1000 + 50/1000 + 8/1000 = 6158/1000$; luego, $6158/1000 = 6.158$. El número de ceros en el denominador de la fracción decimal corresponde al número de dígitos que hay después del punto decimal.

Por ejemplo, $2.072 = 2 + 7/10^2 + 2/10^3$, que en fracción decimal es $2072/1000$. Así, $24516/1000 = 24.516 = 24 + 5/10 + 1/100 + 6/1000$. Si interpretamos el número $24516/1000$ como la longitud de un segmento, significa que hemos partido a la unidad en 1000 partes iguales y se han requerido 24516 de esas partes para cubrir el segmento; la interpretación de 24.516 es que el segmento mide 24 unidades, más cinco segmentos de longitud $1/10$, más un segmento de longitud $1/100$, más seis de longitud $1/100$.

1.3.2. Conversión de fracciones a fracciones decimales

Ahora deseamos saber cómo convertir a una fracción decimal la longitud de un objeto expresada en fracciones. Por ejemplo, ¿cómo expresar $3/4$ m en fracciones decimales? Si dividimos cada $1/4$ en 25 segmentos, cada uno medirá $1/100$ m, y $1/4$ m $= 25/100$ m; por lo tanto, $3/4$ m $= 75/100$ m $= 0.75$ m. De un modo más directo, lo que hicimos fue buscar un número que multiplicado por 4 diera como resultado una potencia de 10; en este ejemplo, $25 \times 4 = 10^2$; ahora se multiplican tres y cuatro por el número 25 y se obtiene el resultado, $75/100 = 0.75$.

¿Cuánto es $1/8$ en fracción decimal? Para responder esto es necesario encontrar un número que multiplicado por 8 sea un múltiplo de 10^k, para algún número entero k. En este caso, $8 \times 125 = 1000$, por lo tanto, $1/8 = 125/1000$. Recordemos que $125/1000$ también se puede escribir como 0.125. Por otra parte, si dividimos 1 entre 8, obtenemos 0.125.

Para expresar $17/40$ en fracción decimal, vemos que $40 \times 25 = 1000$ y $17 \times 25 = 425$, por lo tanto, $\frac{17}{40} = \frac{425}{1000}$; esto último, expresado en decimales, es 0.425. Nuevamente, al dividir 17 entre 40 obtenemos 0.425.

¿A cuánto equivale $1/3$ en fracción decimal? Es claro que no hay ningún número entero que multiplicado por 3 resulte en una potencia de 10; por lo tanto, $1/3$ no se puede expresar como una fracción decimal. ¿Qué hacer entonces? Observemos que $3/10 < 1/3$, y que, a su vez, $1/3 < 4/10$; es decir, $3/10 < 1/3 < 4/10$. Recomendamos como ejercicio verificar esta desigualdad.

Tenemos que $4/10$ difiere de $3/10$ en $1/10$, por lo tanto, $1/3$ difiere de $3/10$ en menos de $1/10$. Una fracción decimal que se aproxima mejor a $1/3$ es $33/100$. Vemos que $33/100 < 1/3 < 34/100$. Como antes, sugerimos verificar esta desigualdad.

La diferencia entre $34/100$ y $33/100$ es $1/100$; por lo tanto, la diferencia entre $1/3$ y $33/100 = 0.33$; es menor que $1/100$. Si nos queremos aproximar a $1/3$ con una fracción decimal aún más cercana, tomemos $333/1000$, la cual difiere de $1/3$ en menos de $1/1000$, ya que $333/1000 < 1/3 < 334/1000$.

Así, 0.333 difiere de $1/3$ en menos de $1/1000$. Conforme agregamos el dígito 3 vamos logrando mejores aproximaciones a $1/3$. Por ejemplo, $0.333333 = 333333/1000000$ difiere de $1/3$ en menos de $1/1000000$; sin embargo, por más larga que hagamos la cadena, el número obtenido nunca será igual a $1/3$. Recordemos que $0.333333 = 3/10 + 3/10^2 + 3/10^3 + 3/10^4 + 3/10^5 + 3/10^6$. Conforme agreguemos más términos de la forma $3/10^k$, más cercano a $1/3$ será su valor; sin embargo, no será igual a $1/3$. Por eso, se dice que $1/3$ es igual a la serie $3/10 + 3/10^2 + 3/10^3 + \ldots$

Ejercicios

1. Aproximar $2/3$ con una fracción decimal que difiera en menos de $1/1000$.
2. Aproximar $8/3$ con una fracción decimal que difiera en menos de $1/1000$.
3. Encontrar una fracción decimal que aproxime a $1/7$ en menos que $1/100$.
4. Ahora, comparar con el procedimiento acostumbrado para dividir.

1.4. ¿Qué tan grande es?

Ejemplo 1

Frecuentemente, para expresar de manera adecuada el valor de una cierta magnitud, es mejor hacerlo en términos relativos; es decir, debemos compararlo con el valor de otra magnitud. Por ejemplo, saber que el precio usual de una comida en cierto país es de \$259 no ayuda mucho si no lo comparamos, por ejemplo, con el salario mínimo de ese país. Por decir, en 2014 en México el salario mínimo en la zona A era de \$67.29 diarios; por lo tanto, una comida de \$259 era muy cara. Si en el país ficticio que planteamos, el salario mínimo alcanza para comprar una comida y media, ¿cuál debería ser el precio de una comida equivalente en México para que esté en la misma proporción con el salario mínimo mexicano? Dicho de otro modo, ¿cuánto debe costar una comida en México para que el salario mínimo alcance para pagar una comida y media?

El costo desconocido de una comida lo denotamos con C, que multiplicado por 1.5 debe ser igual a \$67.19; es decir, $1.5\, C = 67.29$. Por lo tanto, $C = \$67.19/1.5$; de esta igualdad obtenemos que el costo de la comida en México debería ser \$44.86. Entonces, si la comida cuesta \$44.86 en México y \$259 en el país ficticio, decimos que el costo de la comida respecto al salario mínimo es igual en ambas naciones.

Ejemplo 2

En otro ejemplo, ¿podemos saber dónde es más cara la gasolina, en México o en Estados Unidos de América? En cierto momento se tenían los siguientes datos: en Texas el costo de un galón de gasolina es de \$3.39 USD; en México un litro de gasolina de la misma calidad cuesta \$13.20 MXN, y el dólar se cotiza en \$12.97 MXN. Entonces, en México el costo de un litro de gasolina es $13.20/12.97 = 1.01773$ dólares. Un galón es igual a 3.785 litros, por lo tanto, en México un galón cuesta $3.785 \times 1.01773 = 3.852$ dólares. La conclusión es que la gasolina es más cara en México que en Estados Unidos de América.

Recuadro 1. Concentración y densidad

Concentración y *densidad* son dos términos con significados diferentes que suelen causar confusión. Al disolver un soluto en un solvente se obtiene una mezcla homogénea llamada solución. El soluto se mide en unidades de masa, por ejemplo, gramos; el solvente, en unidades de volumen, como litros o cm^3.

La cantidad de unidades de masa de soluto que hay por cada unidad de volumen de la solución se llama concentración de la solución. Por ejemplo, el agua de los océanos es una mezcla de agua con cloruro de sodio con una concentración de 35 g/l.

La densidad es un concepto asociado a la estructura molecular de los materiales; la densidad de un material es la cantidad de masa que hay por cada unidad de volumen. Por ejemplo, la densidad de la plata es 10.5 g/cm^3; es decir, si se tiene 1 cm^3 de plata, éste pesará 10.5 g. Por otra parte, la densidad del oro es 19.32 g/cm^3. En realidad, la densidad depende de la temperatura y la presión; sin embargo, por ahora podemos hacer caso omiso de este hecho. Por último, la densidad también se utiliza para expresar el número de personas que hay por unidad de área.

Ejemplo 3

Se tiene agua salada en una proporción de 10 gramos de cloruro de sodio (NaCl) por litro, se toman 45 l de esta salmuera y se introducen en otro tanque, que contiene agua con una concentración de sal de 12 g/l. Si la concentración baja a 11 g/l, calculemos el volumen inicial del tanque.

Ejemplo 4

En una pequeña represa se ha detectado que la concentración de cierto contaminante es de 200 g/m^3; después, durante 30 días la represa recibió un líquido libre de contaminante a razón de 200 m^3 por día, y la concentración del contaminante disminuyó a 190 g/m^3. ¿Cómo se calcula la cantidad de contaminante que hay en el lago?

La concentración es igual a la cantidad de contaminante entre el volumen. Sin embargo, no conocemos el volumen ni la cantidad de contaminante que hay inicialmente en la presa. La cantidad de contaminante la denotamos con S_0 y el volumen inicial de la represa, con V_0. Sabemos que la concentración inicial es $\frac{S_0}{V_0} = 200$ g/m^3.

Al cabo de 30 días, el volumen aumentó $30 \times 200 = 6000$ m^3, por lo tanto, el volumen será igual a $V_0 + 6000$ m^3 y la cantidad de contaminante permanecerá igual a S_0. Así, después de 30 días, la concentración es igual a $\frac{S_0}{V_0+6000}$; esta concentración es igual a 190 g/m^3, por lo tanto, tenemos la igualdad $\frac{S_0}{V_0+6000} = 190$.

En esta expresión, $V_0 + 6000$ está dividiendo y pasa multiplicando al otro lado de la igualdad (despeje), por lo que $S_0 = 190\,(V_0 + 6000)$.

Al despejar S_0 de la ecuación $\frac{S_0}{V_0} = 200$ g/m^3, tenemos que $S_0 = 200\ V_0$. Sustituimos este valor de S_0 en la ecuación $S_0 = 190\,(V_0 + 6000)$ y el resultado es la igualdad $2000\ V_0 = 190\ V_0 + 190 \times 6000$.

Simplificamos esta ecuación y llegamos a $10\ V_0 = 190 \times 6000 = 1140000$; finalmente, $V_0 = 1140000$.

Para conocer el valor de S_0 sustituimos este valor de V_0 en la ecuación $\frac{S_0}{V_0} = 200$ g/m^3 o en la ecuación $S_0 = 190\,(V_0 + 6000)$ y obtenemos $S_0 = 22800000$ g = 22 800 kg.

Ejemplo 5

Una página impresa contiene 1200 palabras en letras de tamaño grande y 1500 en tamaño pequeño. Si se deben imprimir 30000 palabras en 22 páginas, ¿cuántas páginas se deben escribir en tipo pequeño?

1.4.1. Porcentajes

Ahora utilizaremos otra forma de expresar la comparación de los precios de las comidas que se trató en el ejemplo 1 de esta sección. Dividamos \$388.50 en cien partes iguales; así, la centésima parte es \$3.885 y decimos que \$3.885 es 1 % de \$388.50, que se escribe \$3.885. Si queremos obtener el 12 % de \$388.50 debemos multiplicar \$3.885 por 12; así, \$46.62 es el 12 % de \$388.50. Para obtener lo anterior realizamos los siguientes cálculos: dividimos \$388.50 entre 100 y al resultado lo multiplicamos por 12; se obtuvo \$46.62, o sea, $\frac{\$388.50}{100} \times 12 = \$46.62$. De esta igualdad vemos que $\frac{\$46.62}{\$388.50} \times 100 = 12$. De acuerdo con esto, si queremos saber qué porcentaje es 15.54 de 388.50, debemos realizar la siguiente operación: $\frac{\$15.54}{\$388.50} \times 100$, cuyo resultado es 4; por lo tanto, 15.54 es 4 % de 388.50.

¿Qué porcentaje del salario mínimo cuesta una comida en el país ficticio que planteamos? Para contestar esta pregunta se debe calcular $\frac{\$259.00}{\$388.50} \times 100$, y obtenemos que una comida cuesta el 66.6666 % de un salario mínimo. Si el precio de la comida en México fuera de \$44.86, ¿a qué porcentaje del salario mínimo equivale?; en este caso, el cálculo $\frac{44.86}{67.29} \times 100$ nos da también 66.6666 por ciento.

Ejercicios

1. En una cierta localidad el precio de venta de unos terrenos es de \$2711 por hectárea. A este precio se le debe agregar 2.3 % del impuesto. ¿Cuánto debe pagar una persona que adquiere un terreno de $3/4$ de hectárea?
2. Un río, que inicialmente tiene 2 m de profundidad, está creciendo a razón de 50 cm por hora. ¿Al cabo de cuántas horas su profundidad creció 16.66 por ciento?
3. Un banco cobra 1.5 % de interés mensual. Supongamos que inicialmente la deuda era de \$2500, ¿cuánto se debe al cabo de un año?

En lo que sigue de este capítulo daremos un gran vuelco a la manera de exponer; trataremos de utilizar un lenguaje más coloquial y, por lo tanto, menos riguroso. Nos dedicaremos directamente a la solución de problemas sin precisar la teoría utilizada, y después analizaremos el aprendizaje obtenido al resolverlos. Así, más que un texto, tendremos una especie de plática o diálogo entre profesores, en el que haremos hincapié en el enorme potencial de las matemáticas (desde la más elemental), así como en la conveniencia de utilizar una notación adecuada y en lo importante de tratar de generalizar. De hecho, plantearemos así una propuesta de cómo aprender haciendo.

1.5. ¿Promedio para todo?

Tenemos una serie de números para mostrar el precio del kilo de huevo en los últimos 12 meses: \$24, \$26, \$25, \$27, \$28, \$26, \$30, \$34, \$38, \$34, \$33, \$31.

El precio promedio (*P*) se calcula sumando estas cantidades y dividiendo entre 12; en este caso, resulta

$$P=\frac{24+26+25+27+28+26+30+34+38+34+33+31}{12}=\frac{356}{12}\ .$$

Como $^{356}/_{12}$ es aproximadamente igual a 29.666, podemos decir que el precio promedio del huevo en los últimos 12 meses es \$29.666. Si en cada uno de estos meses se hubiera comprado un kilo de huevo, se habrían pagado en total \$356, lo que es igual a $12 \times P$, o bien aproximadamente igual a 12×29.666.

En el problema anterior se muestra lo esencial que debe estar presente cuando queremos calcular el promedio: hay dos cantidades, una de las cuales varía respecto a la otra. En este caso, las dos cantidades corresponden al precio del kilo de huevo y al tiempo; el precio del kilo de huevo depende del mes considerado.

Otro ejemplo muy común es el consumo promedio de gasolina de un automóvil. Una cantidad es el número de litros consumidos y la otra es el número de kilómetros recorridos. Supongamos que cada 100 km se registró el consumo de un vehículo y se obtuvieron los siguientes datos: 12.5 l, 11.2 l, 13.3 l, 12.4 l; entonces, el consumo promedio (*C*) es

$$C=\frac{12.5+11.2+13.3+12.4}{4}=\frac{49.4}{4}=12.35 \text{ l por cada } 100 \text{ km}.$$

Si el recorrido fue de 450 km y en el último tramo de 50 km se consumieron 6.4 l, entonces, dado que 50 km es $^{1}/_{2}$ de 100 km, el consumo promedio será

$$C=\frac{12.5+11.2+13.3+12.4+6.4}{4.5}=\frac{55.8}{4.5}=12.4 \text{ l por cada } 100 \text{ km}.$$

Si queremos calcular el promedio en número de litros por cada kilómetro, debemos convertir la unidad de distancia, de 100 km, a 1 km. Así, el promedio es

$$C=\frac{55.8}{450}=0.124 \text{ l/km}.$$

Al invertir el cociente anterior, obtenemos el promedio de distancia que se recorrió por cada litro consumido. Si este promedio lo denotamos con S, tenemos que $S = \frac{450 \text{ km}}{55.8 \text{ l}}$; de la división resulta que S es aproximadamente igual a 8.06 km/l.

Otro promedio de uso frecuente es la velocidad promedio de un móvil. Si éste recorre una distancia de x kilómetros en un tiempo de t horas, la velocidad promedio se define como el cociente x/t. Si denotamos con v la velocidad promedio, tenemos que $v = \frac{x}{t}$. Por ejemplo, un autobús parte de una terminal a las dos de la tarde y arriba a otra terminal, a 120 km de distancia, a las tres de la tarde con 30 minutos el mismo día. Como 30 minutos es $\frac{1}{2}$ de hora y $\frac{1}{2}$ es igual a 0.5, el tiempo que tardó el autobús en llegar de una terminal a otra es 1.5 h; por lo tanto, su velocidad promedio es $v = \frac{120 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Por otra parte, está el concepto del promedio aritmético de una serie de números $x_1, x_2, \ldots x_k$, que no es más que el cociente $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}$. Por ejemplo, el promedio aritmético de 2, 5, 9, 6 es igual a $\frac{2+5+9+6}{4} = 5.5$. Al promedio aritmético también se le conoce como media aritmética, y si no tenemos cuidado, podemos utilizarlo incorrectamente, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Problema 1

Un automóvil le da dos vueltas a un circuito. La velocidad promedio es 120 km/h en la primera y 60 km/h en la segunda. ¿Cuál es la velocidad promedio del recorrido total?

La respuesta inmediata es 90 km/h, ya que $\frac{120+60}{2} = 90$.

Pero si nos atenemos a que la velocidad promedio es la distancia recorrida entre el tiempo empleado en recorrerla, obtenemos una respuesta distinta. En efecto, si la longitud del circuito es l, prescindimos de las unidades de tiempo y distancia, y si t_1 es el tiempo empleado en la primera vuelta y t_2 es de la segunda, tenemos que: $120 = \frac{l}{t_1}$ y $60 = \frac{l}{t_2}$. Entonces,

$$t_1 = \frac{l}{120} \text{ y } t_2 = \frac{l}{60}.$$

Por último, denotamos con v la velocidad promedio del recorrido total:

$$v = \frac{2l}{t_1 + t_2} = \frac{2l}{\frac{l}{120} + \frac{l}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{3}{120}} = \frac{240}{3} = 80.$$

Naturalmente, no es la media aritmética de 120 y 60, sino su media armónica.

Si bien la velocidad promedio para tiempos iguales es la media aritmética, para distancias iguales la velocidad promedio es la media armónica. En general, la media armónica de dos números positivos *a* y *b* es $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, que en este caso resultó menor que la media aritmética $\frac{a+b}{2}$.

¿Esto será siempre así? La respuesta es no, ya que si $a = b$,

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=\frac{2}{\frac{2}{a}}=a=\frac{a+a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Entonces, ¿será siempre menor o igual? Para averiguarlo, procedemos como frecuentemente se hace en álgebra, de adelante hacia atrás. Si

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{a+b}{2},$$

entonces,

$$4ab\leq(a+b)^2,$$

por lo que

$$4ab\leq a^2+2ab+b^2$$

y

$$0\leq a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Ahora, de atrás hacia adelante:

$$0\leq(a-b)^2,$$

de donde

$$0\leq a^2-2ab+b^2,$$

por lo que

$$4ab\leq a^2+2ab+b^2.$$

Se puede seguir de dos maneras:

1.
$$4ab\leq(a+b)^2,$$
$$\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}\leq\frac{a+b}{2},$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2},$$

con lo que se demuestra que la media aritmética es mayor que la armónica.

2.

$$\begin{aligned} 4ab &\leq (a+b)^2, \\ \sqrt{4ab} &\leq \sqrt{(a+b)^2}, \\ 2\sqrt{ab} &\leq a+b, \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Si $\sqrt{ab}$ se conoce como la media geométrica de a y b, hemos demostrado, pues, que la media aritmética de dos números positivos es mayor o igual que su media geométrica. Queda pendiente saber si hay alguna desigualdad entre la media geométrica y la armónica.

Una forma de comparar dos números es mediante su diferencia: se parecen más mientras más parecida a 0 es su diferencia; pero es así sólo dentro de cierto rango. Por ejemplo, 73 es tan parecido a 75 como 82 lo es a 84; sin embargo, tendríamos cierto recelo al decir que 1 es tan parecido a 2 como 1001 lo es a 1002.

Otra forma de comparar dos números es mediante su cociente, pues son más parecidos mientras más cercano a 1 es su cociente; así, la media geométrica de dos números positivos a y b es el número que se parece lo mismo a a que a b, ya que $\frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$.

En el otro sentido, la media aritmética de dos números a y b es el número que se parece lo mismo a a que a b, ya que $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - b$.

Por cierto, la media geométrica de dos números positivos es la media geométrica de su media arimética y su media armónica, ya que:

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}\frac{a+b}{2}} = \sqrt{ab}.$$

En general, si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números positivos,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}};$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}, \text{ y}$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

se conocen como las medias armónica, geométrica y aritmética de ellos, respectivamente, y se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n},$$

las cuales son igualdades si y sólo si

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n.$$

Una manera de convencernos de lo anterior es que si dos números tienen suma constante, su producto es mayor mientras más parecidos son; en efecto, si c es un número constante, x y y son dos números cualesquiera y $x + y = c$, para

$$z = x - \frac{c}{2}, \quad x = \frac{c}{2} + z \quad \text{y} \quad y = \frac{c}{2} - z,$$

por lo que

$$xy = \left(\frac{c}{2} + z\right)\left(\frac{c}{2} - z\right) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2,$$

Ya que $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ es constante, y como todo cuadrado es mayor o igual que 0, xy es mayor mientras z^2 sea menor. Como $x - y = 2z$, xy es menor, mientras z sea más parecida a 0; es decir, mientras más parecidas son x y y, en particular, el producto es máximo cuando x y y son iguales, pero si x es distinta de y, $xy < \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Con lo anterior podemos ver que la media geométrica es menor o igual que la aritmética; en efecto, si

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a,$$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

pero si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son todas iguales, por ejemplo, a_1 es diferente de a_2, como

$$a_1 + a_2 = \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2},$$

entonces,

$$a_1a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2.$$

Así,

$$a_1a_2\ldots a_n < \frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_1+a_2}{2}a_3a_4\ldots a_n,$$

por lo que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_1+a_2}{2}a_3 a_4 \ldots a_n}\ ,$$

y como

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = \frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+a_4+\ldots+a_n\ ,$$

si a_1, a_2, ..., a_n no son todas iguales, el producto se puede agrandar sin alterar la suma, por lo que $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ es máxima sólo cuando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, en cuyo caso

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ .$$

Para convencernos de la veracidad de la otra desigualdad basta aplicar lo anterior a

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}.$$

Así,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}$$

y la igualdad es cierta sólo cuando

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n}\ ,$$

o sea, cuando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, por lo que las siguientes desigualdades son ciertas:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \quad \text{y}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ .$$

Y son igualdades sólo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, y el hecho de que sean iguales sólo cuando se cumple la igualdad $a_1 = a_2 = ... = a_n$, resulta útil en la solución de algunos problemas prácticos.

1.6. Problemas de máximos

Problema 1

¿Cuál es el producto mayor de enteros positivos cuya suma es 2015?

En la resolución de muchos problemas, de alguna manera hay que jugar al detective. Primero se encuentra cómo es la solución y luego cuál es; algunas veces resulta útil simplificar el problema para ver cómo es la solución. En este caso, una simplificación del problema es sustituir en el enunciado 2015 por un número menor. ¿Cuál es el producto mayor de enteros positivos cuya suma es n? Para n igual a 5, 6, 7 y 8, las respuestas son:

- $n = 5$, $2(3) = 6$
- $n = 6$, $3(3) = 9$
- $n = 7$, $2(2)3 = 4(3) = 12$
- $n = 8$, $2(3)3 = 18$

Algo que casi siempre resulta útil es encontrar patrones; con lo que hemos hecho, aparentemente encontramos algunos:

1*) El 1 no aparece en la solución.
5*) Los números mayores o iguales que 5 no aparecen en la solución.

En efecto, si $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ son enteros positivos que suman n:

1*) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_k$, y si $a_1 = 1$, $(a_1 + a_2) + a_3 + a_4 + ... + a_k = n$, pero $a_1 a_2 a_3 ... a_k < (a_1 + a_2)\, a_3 a_4 ... a_k$.

5*) Y si para para alguna j, $1 \leq j \leq k \leq a_j \geq 5$, entonces, $2(a_j - 2) = 2\,a_j - 4 + a_j \geq 1 + a_j > a_j$, por lo que, $a_1 a_2 a_3 ... a_k < a_1 a_2 a_3 ... a_{j-1} 2(a_j - 2)\, a_{j+1} ... a_k$; aunque $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{j-1} + 2 + (a_j - 2) + a_{j+1} + ... + a_k = n$.

En la solución, dos números 2 dan lo mismo que un número 4, ya que $2 + 2 = 4$ y $2(2) = 4$; sin embargo, no aparecen tres números 2, pues $2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3$, pero $2(2)2 = 8 < 9 = 3(3)$.

Así pues, podemos pensar que en la solución sólo aparecen números 3 y uno o dos números 2. Dado que $2015 = 671(3) + 2$, la solución es $2(3^{671})$.

Problema 2

Si tenemos material para construir 400 m de cerca y con ella hacer un corral rectangular, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la cerca para que tenga la mayor capacidad?

Esta pregunta se reduce al problema geométrico siguiente. ¿Cuál es el rectángulo de perímetro 200 con el área mayor? Si prescindimos de las unidades, llamamos l a la longitud del rectángulo y a al ancho; entonces, $400 = 2l + 2a$ y $200 = l + a$, por lo que el área del rectángulo, o sea, la, es máxima cuando $l = a$; es decir, cuando $l = a = 100$, por lo que el rectángulo es un cuadrado.

¿Qué pasa en el problema anterior si el perímetro no es necesariamente 200, sino cualquier otro número? La respuesta ideal, conociendo el resultado anterior, es: tomamos la unidad de medida de longitud para que el perímetro sea 200 y el rectángulo de área mayor es el cuadrado.

Otra posible respuesta al problema es que si P es el perímetro del rectángulo, y llamamos l y a al largo y al ancho, respectivamente, entonces, $2l + 2^a = P$, de donde $l + a = \frac{P}{2}$, si $l = a$, $l = a = \frac{P}{4}$. Entonces, si $l > a$ y llamamos x a lo que l se pasa de $\frac{P}{4}$, o sea, si $x = l - \frac{P}{4}$ y, por lo tanto, $l = \frac{P}{4} + x$, entonces $a = \frac{P}{4} - l$, de donde el área es

$$la = \left(\frac{P}{4} + x\right)\left(\frac{P}{4} - x\right) = \left(\frac{P}{4}\right)^2 - x^2 .$$

Puesto que $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ es constante y x es el doble de la diferencia entre l y a, el área la es mayor mientras más parecidos son l y a, y es máxima cuando son iguales. Hemos resuelto este problema práctico usando sólo el hecho de que la suma por la diferencia es la diferencia de cuadrados y los cuadrados de números distintos de 0 son > 0; o sea, con matemática elemental, aunque es un problema de máximos y mínimos, que por lo general se resuelve mediante el cálculo diferencial, disciplina ampliamente aceptada como el principio de la matemática superior.

Problema 3

Si en el caso del corral dispusiéramos de una pared para usarla como uno de los lados de éste, el problema geométrico correspondiente sería: ¿cuál es el rectángulo de área máxima si la suma de las longitudes de tres de sus lados es un número fijo?

Una buena solución es que si P es la suma de las longitudes de tres lados (y al cuarto lado lo llamamos lado falso), consideremos uno de dichos cuadriláteros y reflejémoslo sobre ese lado, el falso, con lo que obtenemos un rectángulo de perímetro P y del doble del área que el primero, por lo que el área de éste será máxima cuando el área del obtenido mediante la reflexión lo sea; es decir, como ya sabemos, cuando es un cuadrado. Así, la solución es: el rectángulo en el que el largo es el doble del ancho.

Naturalmente, también podemos encontrar una solución partiendo de que el producto de dos números cuya suma permanece constante es máximo cuando son iguales. Por cierto, podemos olvidarnos de los términos *largo* y *ancho*, y, en cambio, llamar a las longitudes de los lados x y y, donde el lado de longitud x es el opuesto al lado falso. Si P es como en la solución anterior, tenemos que $x + 2y = P$. El área del rectángulo es $A = xy$, así, $2A = x(2y)$, por lo que $2A$ es el producto de dos cantidades cuya suma es constante, y será máxima cuando dichas cantidades sean iguales, esto es, cuando $x = 2y$.

Problema 4

¿Cuál es la máxima suma de los cuadrados de dos cantidades cuya suma es constante? Si x, y y c son tres números, c es constante, x y y son variables y $x + y = c$, entonces, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = c^2$, ya que $2xy$ es mínimo cuando $x = 0$ o si $y = 0$, la suma máxima de cuadrados es c^2.

Problema 5

Tenemos una lámina cuadrada de acrílico blanco y transparente para hacer una pecera, de la manera siguiente: colocamos la lámina de manera horizontal, en las esquinas recortamos cuadrados iguales y nos queda un cuadrado con rectángulos iguales pegados a sus lados; doblamos la lámina por los lados del cuadrado para que los rectángulos queden verticales y, por último, lo sellamos con silicón. ¿Cuándo es máxima la capacidad de la pecera? Si el lado de la lámina es de longitud a y los lados de los cuadrados recortados tienen longitud x, la forma de la pecera es de una caja sin tapa, de base cuadrada de lado $a - 2x$, y de altura x, por lo que su capacidad es $C = (a - 2x)(a - 2x)x$, que es el producto de tres cantidades cuya suma $(a - 2x) + (a - 2x) + x = 2a - 3x$ no es constante, como C es máxima cuando $4C$ lo es, y $4C = (a - 2x)(a - 2x)(4x)$ es el producto de tres cantidades con suma constante, ya que $(a - 2x) + (a - 2x) + (4x) = 2a$, entonces, $4C = (a - 2x)(a - 2x)(4x)$ es máxima cuando sus tres factores son iguales; es decir, cuando $a - 2x = 4x$, o sea, cuando $a = 6x$, o lo que es lo mismo, $x = \frac{a}{6}$.

Problema 6

De todos los triángulos de perímetro constante, ¿cuál es el área mayor? La fórmula de Herón para el área de un triángulo de lados de longitudes a, b, c es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde s es el semiperímetro, $s = \frac{a+b+c}{2}$. Así, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ es máximo cuando $s(s-a)(s-b)(s-c)$ lo es, y, a su vez, éste es máximo cuando $(s-a)(s-b)(s-c)$ lo es. Ahora, como la suma $(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s$ es constante, $(s-a)(s-b)(s-c)$ es máximo cuando $(s-a) = (s-b) = (s-c)$; o sea, cuando $a = b = c$.

La fórmula de Herón para el área de un cuadrilátero cíclico, es decir, para un cuadrilátero cuyos vértices están en una misma circunferencia, de lados de longitudes a, b, c, d, es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ lo que nos lleva al siguiente problema.

Problema 7

Si el perímetro de un cuadrilátero cíclico es constante, ¿cuándo es máxima su área? Ya que $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ es máxima cuando $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ lo es, y $(s-a)+(s-b)+(s-c)+(s-d) = 4s-(a+b+c+d) = 4s-2s = 2s$ es constante, $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ es máxima cuando $(s-a) = (s-b) = (s-c) = (s-d)$ lo es, o sea, cuando $a = b = c = d$, por lo que el cuadrilátero de área máxima es un cuadrado.

Larson (1983) hace hincapié en que la manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; desgraciadamente, esto no lo hemos entendido muchos profesores de matemática y, de hecho, tenemos una frase tan desafortunada como la de “problema modelo”. Sólo les enseñamos a los alumnos a resolver un problema y luego los ponemos a “resolver” otro que es el mismo, pero con los datos cambiados; es decir, no hemos entendido que se aprende haciendo. En cambio, los museógrafos lo han comprendido muy bien, ya que, por ejemplo, los museos de ciencias se han transformado, de tener interminables filas de vitrinas que sólo se podían observar a cierta distancia, ahora cuentan con salas y equipamientos interactivos en los que los visitantes pueden confrontar sus expectativas con la realidad.

Problema 8

Si un entero positivo N se encuentra entre dos cuadrados consecutivos, y sus diferencias positivas con ellos son x y y, $N - xy$ es un cuadrado; por ejemplo, para 7, que está entre 4 y 9, y $x = 7 - 4 = 3$, así como $y = 9 - 7 = 2$, por lo que $N - xy = 7 - 3(2) = 7 - 6 = 1^2$.

La solución de este problema está en el enunciado, ya que los enteros que están entre n^2 y $(n + 1)^2$ son $n^2 + 1$, $n^2 + 2$, $n^2 + 3$, ..., $n^2 + 2n - 2$, $n^2 + 2n - 1$, $n^2 + 2n$; esto es, un número par de enteros consecutivos, donde los dos de en medio, n^2 y $n^2 + 1$, tienen la misma x y la misma y, sólo que intercambiadas, por lo que los cuadrados que generan de acuerdo a la fórmula $N - xy$ difieren en 1, y tienen que ser 0 y 1. En nuestro ejemplo, los enteros que están entre n^2 y $(n + 1)^2$ son 5, 6, 7, 8 y, para 6, $x = 6 - 4 = 2$ y $y = 9 - 6 = 3$, por lo que $N - xy = 6 - 2(3) = 0^2$; mientras que, para 7, $x = 7 - 4 = 3$ y $y = 9 - 7 = 2$, por lo que $N - xy = 7 - 3(2) = 7 - 6 = 1^2$.

Análogamente, los que están junto a ellos difieren en 3, por lo que los cuadrados que generan deben ser 1 y 4, etcétera. Así, para n grande, los cuadrados que se generan en la parte de en medio, entre n^2 y $(n + 1)^2$, son: ..., 3^2, 2^2, 1^2, 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...

Calculemos el cuadrado que genera $n^2 + n + k$. Para éste, $x = (n^2 + n + k) - n^2 = n + k$ y $y = (n + 1)^2 - (n^2 + n + k) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - n - k = n + 1 - k$. Así, $N - xy = n^2 + n + k - (n + k)(n + 1 - k) = n^2 + n + k - (n^2 + k^2 + n + k) = k^2$.

Como se puede observar, en realidad no tuvo nada que ver que N estuviera entre dos cuadrados cosecutivos, si en vez de las diferencias positivas tomamos las diferencias $x = N - n^2$ y $y = (n + 1)^2 - N$.

De hecho, tomar las diferencias positivas induce a ver que los enteros entre n^2 y $(n + 1)^2$ están apareados de tal forma que los de cada pareja tienen x y y intercambiadas. Notemos lo conveniente que resultó encontrar una buena notación, ya que el denotar N con $n^2 + n + k$ nos llevó a que el cuadrado buscado era k^2.

Una dificultad que surge al entrenar a los alumnos en la resolución de problemas es que los “problemas” que vienen en casi todos los libros no son más que ejercicios rutinarios o mecanizaciones; sin embargo, dicha dificultad es sólo aparente, ya que de muchos ejercicios podemos proponer una actividad interesante. Por ejemplo, en el caso del siguiente problema, que es uno de los de bostezo pronto, interés nulo, rutina diaria y respuesta rápida.

Problema 9

El alcance a, en kilómetros, de un observador situado a una altura de h metros es $3.5\sqrt{h}$:

1. Si el alcance es de 3 km, ¿a qué altura está el observador?
2. Si el observador está a una altura de 27 m, ¿cuál es su alcance?

Si imaginamos un corte de la Tierra por el plano que pasa por el centro, *O*, de ésta, el observador y el punto T de la Tierra más alejado de su vista, obtenemos una circunferencia de centro O y un triángulo rectángulo de hipotenusa OA, donde A es el punto en el que se encuentra el observador, y catetos OT y AT. Así, $OA = r + h$, $AT = a$ y $OT = r$, que es la longitud del radio de la Tierra. De acuerdo con Pitágoras, $(r + h)^2 = a^2 + r^2$, de donde $r^2 + 2rh + h^2 = a^2 + r^2$, por lo que $2rh + h^2 = a^2$. Así, $a = \sqrt{2rh + h^2} = \sqrt{2r + h}\sqrt{h}$, en donde vemos que $3.5\sqrt{h}$ km, o sea, $3500\sqrt{h}$ m, es una fórmula aproximada en la medida en que 3500 se aproxime a $\sqrt{2r + h}$.

Para ponderar lo anterior, veremos que la diferencia $\sqrt{2r + h} - \sqrt{2r}$ es pequeña si h lo es. En efecto, ya que el radio polar de la Tierra es de 6357 km y el radio ecuatorial es de 6378 km, supongamos que el radio es de 6367 km, o sea, 6367000 m.

Si $h < 100$, $\sqrt{2r + h} - \sqrt{2r} < \sqrt{2(6367000) + 100} - \sqrt{2(6367000)} = 0.014012$.

Ya que $\sqrt{2r} = \sqrt{2(6367000)} = 3568.5$, $3500\sqrt{h}$ m, que es una fórmula bastante aproximada.

Si despejamos r de $2rh + h^2 = a^2$, podemos calcular

$$r = \frac{a^2 - h^2}{2h}.$$

Bibliografía

Falconi, M. y Hoyos, V. (eds.), *Instrumentos y matemáticas, historia, fundamentos y perspectivas educativas,* Ciudad de México, Las Prensas de Ciencias, 2005.

Gardiner, A., *Understanding Infinity, the Mathematics of Infinite Processes,* Nueva York, Dover Publications, 2002.

Larson, Loren C., *Problem-Solving Through Problems,* Nueva York, Springer-Verlag, 1983.

Toeplitz, O., *The Calculus, a Genetic Approach,* Chicago, The University of Chicago Press, 2007.

Apéndice

Notemos:

1. El cuadrado de un número par $p = 2k$ es un número par divisible entre 4. En efecto, $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
2. El cuadrado de un número impar $m = 2s + 1$ es un número impar. Veamos que $m^2 = (2s + 1)^2 = 4s^2 + 4s + 1 = 2(2s^2 + 2s) + 1$. Si denotamos $2s^2 + 2s$ con t, obtenemos $m^2 = 2t + 1$, lo que demuestra que m^2 es impar.

Para demostrar que no es igual a ningún número fraccionario m/n, haremos ver que la suposición de que existan dos números m y n tales que $\sqrt{2} = m$ nos lleva a una situación lógicamente imposible.

Si $\sqrt{2} = m$, con m y n sin factores comunes, obtenemos que $2 = m^2/n^2$; por lo tanto, $2n^2 = m^2$. Consecuentemente, m^2 es par y, por lo tanto, m es par, ya que, de acuerdo con el punto 2, el cuadrado de un impar es impar.

Ahora, el punto 1 nos lleva a que $m^2 = 4k$ para algún número k. Así, se tiene la igualdad $2n^2 = 4k$, de la cual se sigue que n^2 es par y, nuevamente por el punto 2, n es par. De esta forma, llegamos a que n y m son pares, aunque esto es imposible —o como se dice frecuentemente, es una contradicción—, ya que m y n no tienen factores comunes.

Esta demostración es parte del libro X de los *Elementos de Euclides*, pero suele no aparecer en las versiones modernas de estos libros. Otra demostración pitagórica basada en un proceso de construcción iterativo de cuadrados cada vez más pequeños se encuentra en Toeplitz (2007).

2 | Forma, espacio y medida

Francisco de Jesús Struck Chávez
Kenya Verónica Espinosa Hurtado

Los ejercicios que trataremos a continuación conciernen al eje Forma, espacio y medida de los Programas de estudio 2011 de Educación Básica Secundaria, en su mayor parte relacionados con el tema de figuras y cuerpos. Estos ejercicios están diseñados para que los profesores de secundaria profundicen en el estudio de la geometría y, aunque los problemas no están contextualizados, los adecuen para sus estudiantes dependiendo del nivel y el grado de dificultad requeridos.

El presente capítulo se compone de dos partes. La primera está dedicada a la geometría euclidiana; el segundo apartado, a la división de figuras planas en ciertas condiciones.

2.1. Geometría euclidiana

En la tradición griega, todas las construcciones geométricas debían trazarse exclusivamente con regla y compás. Otros instrumentos, como escuadras, reglas T y reglas graduadas, que son de uso común en el dibujo constructivo, no se emplean en la geometría de Euclides. Además, en ésta nunca se utilizan las medidas de los segmentos ni de los ángulos; tampoco se calculan las áreas.

Hay tres problemas que se plantearon desde la época de los griegos y que a pesar de los innumerables intentos que se hicieron durante 20 siglos nunca se han resuelto: la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. En el siglo XIX se demostró que ninguna de estas tres construcciones se puede trazar solamente con regla y compás. Sin embargo, los dos primeros se pueden resolver usando otros instrumentos.

Aunque en la geometría clásica las construcciones se basan en el uso exclusivo de la regla y el compás, hay otros instrumentos para hacer construcciones geométricas. En este apartado utilizaremos el doblado de papel y un rectángulo de vidrio o acrílico.

A continuación, presentamos una serie de problemas de construcción e invitamos al lector a que los resuelva de tres formas:

1. De la manera tradicional, es decir, con regla y compás.
2. Utilizando solamente una hoja de papel.
3. Con un rectángulo de acrílico transparente, que puede ser una caja para discos compactos.

Aseguramos, sin demostrarlo, que toda construcción que se pueda hacer con regla y compás será realizable con cualquiera de estos otros dos instrumentos; pero, además, con éstos podemos obtener construcciones que con regla y compás son imposibles, como la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Seguramente, el lector ya encontró una construcción que no se puede trazar sin compás: una circunferencia; no obstante, es posible encontrar los puntos sobre la circunferencia que se requieren para la construcción solicitada. Este hecho será más claro tras resolver los primeros ejemplos.

Empezaremos por enunciar las reglas para hacer las construcciones, aunque no nos detendremos en explicar el uso de la regla y el compás.

Para el doblado de papel, diremos que una recta queda definida por un doblez, en tanto que un punto, por la intersección de dos rectas.

Permitiremos el uso de un lápiz sólo para dos propósitos, uno es dar los puntos iniciales de un problema y otro consiste en remarcar puntos previamente encontrados para poder verlos mejor. Recomendamos usar un papel que deje ver a través de él (papel copia, albanene o encerado, del que se usaba en las cocinas); este último es el más recomendable, pues, además de barato, es traslúcido y los dobleces se marcan de forma muy clara, desafortunadamente, las bolsas de plástico lo han desplazado del mercado y hoy es difícil de conseguir.

En el caso de la caja para discos compactos se usa también lápiz y papel. La caja puede servir como regla para trazar rectas, pero la característica que nos permitirá aprovecharla como un instrumento geométrico especial consiste en que es transparente y reflejante a la vez; si la colocamos de modo perpendicular a la hoja de papel en la que hemos dibujado una recta, ésta se refleja y se transparenta, por lo que detrás del acrílico veremos dos rectas (figura 2-1a).

Si colocamos la caja perpendicular al papel —lo cual es muy fácil si la mantenemos abierta— y la giramos, podemos ver cómo el ángulo que forman las dos rectas detrás del plástico cambia (figura 2-1b). Incluso, hay una posición en la que ambas se enciman (figura 2-2), entonces la recta y la caja son perpendiculares, y

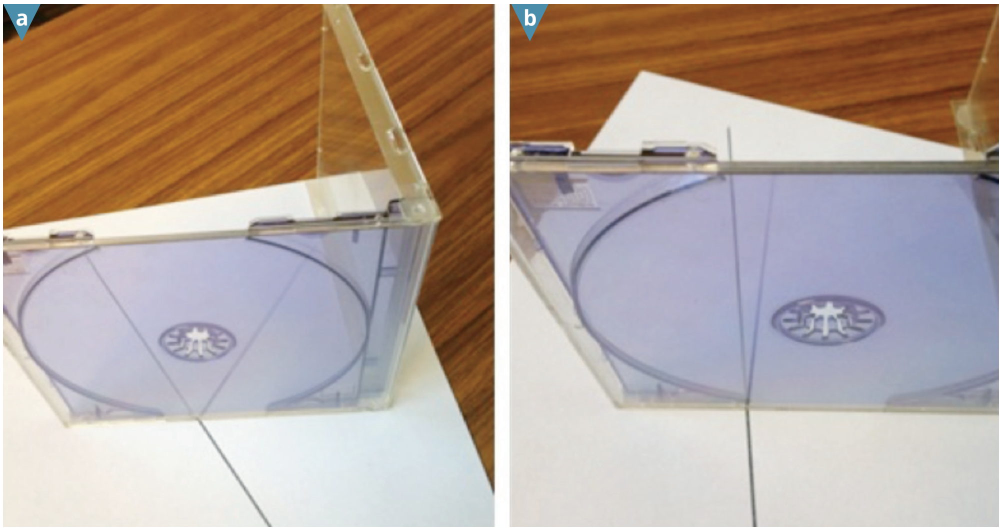


Figura 2-1.

si utilizamos esta última como regla, podemos trazar una recta perpendicular a la primera.

Figura 2-2.

2.1.1. Primera serie de problemas

1. Dados dos puntos *A* y *B,* trazar un cuadrado del cual el segmento *AB* sea un lado.
2. Dados dos puntos *A* y *C,* trazar un cuadrado del cual el segmento *AC* sea una diagonal.
3. Dados dos puntos *A* y *B,* construir un triángulo equilátero con lado *AB*.

Probablemente, más adelante en este texto, podamos encontrar algunas ideas que nos sugieran cómo resolver estos problemas, pero es conveniente que el lector detenga aquí la lectura e intente resolverlos primero.

Aun si no obtuvimos la solución, seguramente nos dimos cuenta de que con cualquiera de los tres instrumentos podemos realizar las siguientes construcciones básicas:

1. Trazar una recta que pase por dos puntos.
2. Prolongar un segmento tanto como se quiera (o tanto como quepa en la hoja de papel).
3. Construir un ángulo recto.
4. Construir la mediatriz de un segmento.
5. Encontrar el punto medio entre dos puntos.
6. Construir la bisectriz de un ángulo.
7. Trazar una paralela a una recta dada por un punto dado.

Si el lector no ha logrado dibujar el triángulo equilátero, le recordamos que, en éste, las mediatrices, las bisectrices, las medianas y las alturas coinciden. Unimos *A* con *B* y trazamos la mediatriz del segmento *AB*. Hacemos un doblez que pase por *A* y que coloque a *B* sobre la mediatriz; o bien colocamos la caja de discos sobre *A* y buscamos que el reflejo de *B* caiga sobre la mediatriz para encontrar el tercer vértice.

En la figura 2-3, la línea punteada roja corresponde al doblez o a la posición de la caja. El segmento *AB′* es la imagen de *AB*, mientras *B′* es el tercer vértice.

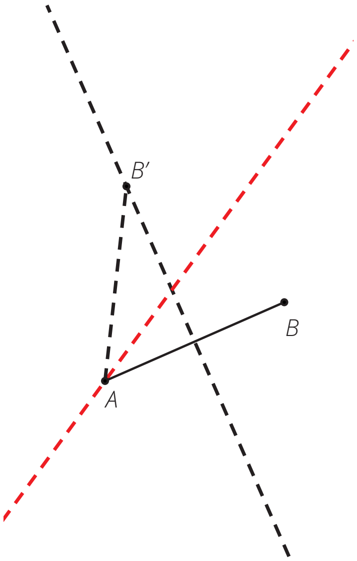


Figura 2-3.

2.1.2. Segunda serie de problemas

1. Dividir un segmento *AB* dado en cinco partes iguales.
2. Dado un segmento *AB*, una recta *m* y un punto *P,* construir un punto *Q* sobre *m,* tal que la distancia de *P* a *Q* sea la misma que de *A* a *B*.

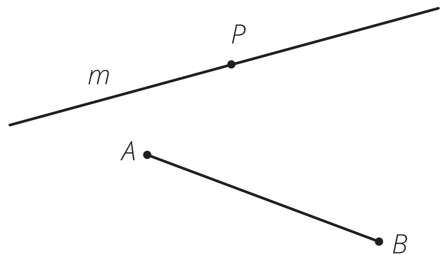


Figura 2-4.

3. Dado un ángulo *AOB,* una recta *m* y un punto *P,* construir sobre *m* una recta que pase por *P* y que haga con *m* un ángulo igual a *AOB*.

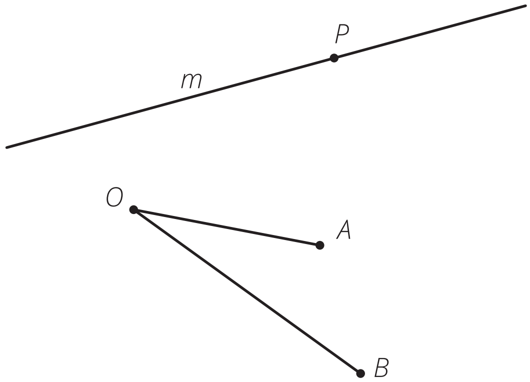


Figura 2-5.

Al igual que en la primera serie de problemas, sugerimos detener la lectura para intentar solucionarlos.

Un método sencillo para dividir un segmento *AB* en *n* partes iguales es trazar *n* + *1* paralelas a distancias iguales (a una distancia entre ellas adecuada para la longitud del segmento) y colocar *A* en la primera y *B* en la última. Las paralelas marcarán las divisiones en el segmento. En la figura 2-6, dividimos *AB* en siete partes, la línea punteada es el doblez o la posición de la caja.

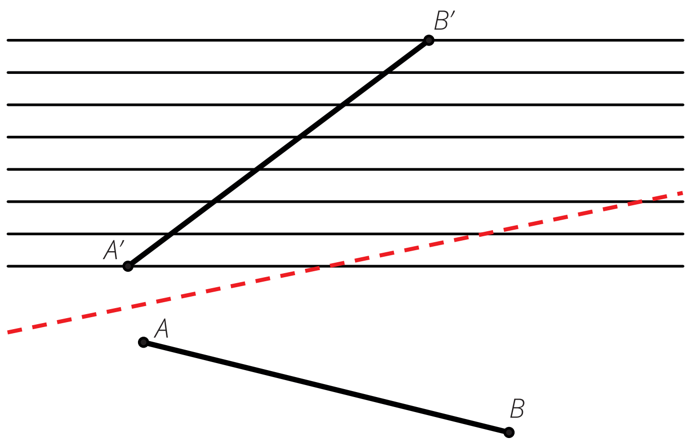


Figura 2-6.

Para el segundo problema, hacemos coincidir *A* con *P* (con un doblez o con el reflejo) y marcamos la imagen de *B,* que llamaremos *B′*. Luego encontramos la bisectriz entre la recta *m* y el segmento *PB′*. Cuando doblemos o reflejemos en la bisectriz, *B′* caerá sobre *m* en el punto *Q* buscado.

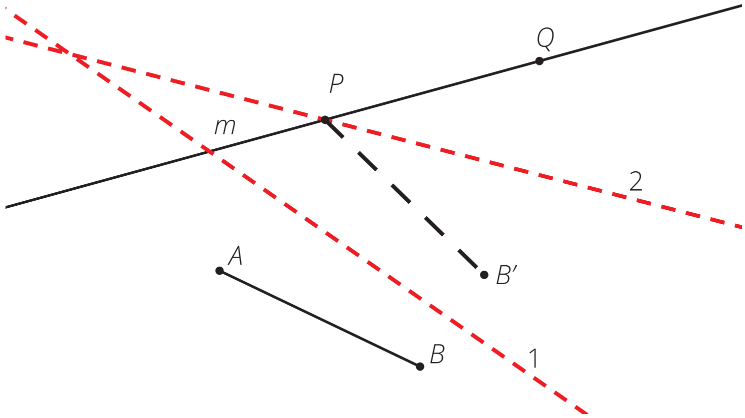


Figura 2-7.

Observemos que esta construcción —sin importar con qué instrumento la realizamos— nos permite sumar segmentos, ya que podemos poner un segmento a continuación del otro en la misma recta.

Ahora, con el segmento *OA,* hacemos lo mismo que en la construcción anterior con el segmento *AB;* el ángulo que se indica en el tercer problema queda donde lo queremos.

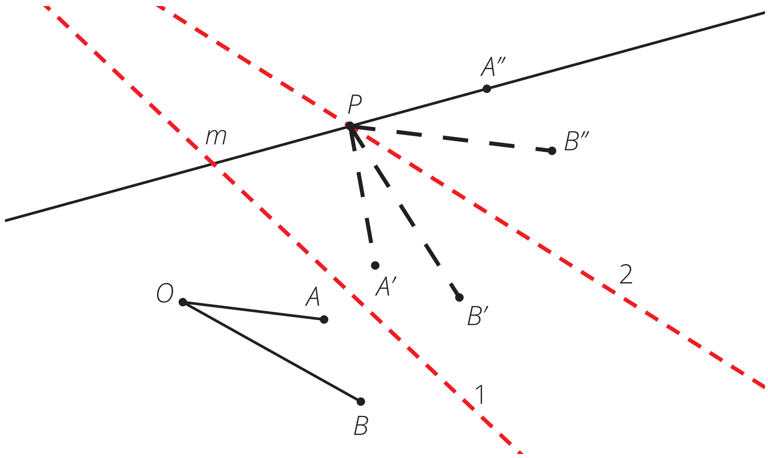


Figura 2-8.

2.1.3. Tercera serie de problemas

1. Trasladar un triángulo dado, en una dirección dada, una distancia dada.
2. Rotar un triángulo dado, en un ángulo dado, alrededor de un punto dado (figura 2-9).

Para esta serie de problemas recomendamos resolverlos primero con regla y compás, no porque sea más fácil, sino para que nos hagamos conscientes, con el uso de instrumentos conocidos, de la dificultad que implican.

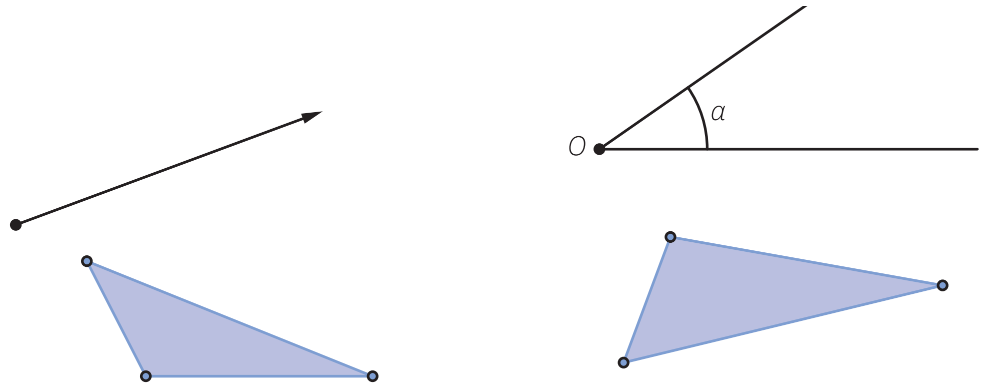


Figura 2-9.

En realidad, no es difícil descubrir la forma de hacerlo, pero se requieren muchos trazos.

Ahora que ya los trazamos con regla y compás, daremos algunas ideas para resolverlos con los otros instrumentos.

Empecemos por trasladar un solo punto *P* en una dirección dada. Si reflejamos el punto en una recta perpendicular a la dirección de la traslación, obtenemos un punto *P*′; la recta *PP*′ será paralela a la dirección de traslación.

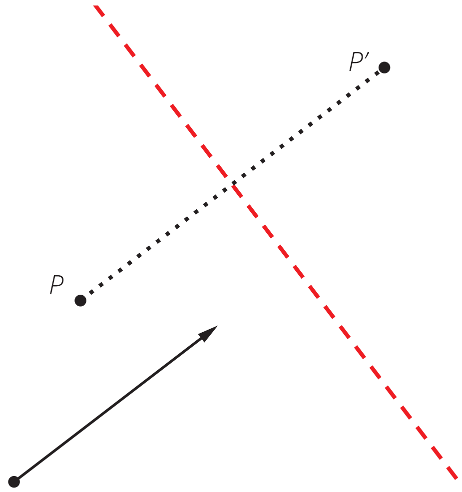


Figura 2-10.

Desde luego, el lector ya habrá notado que nuestras dos herramientas nuevas no son otra cosa que instrumentos para reflejar.

Si ahora reflejamos los vértices *A*, *B* y *C* de un triángulo en una recta perpendicular a la dirección en que queremos trasladarlo, obtenemos los puntos *A*′, *B*′ y *C*′ para que las rectas *AA*′, *BB*′ y *CC*′ sean las tres paralelas a la dirección deseada. Sin embargo, el triángulo está al revés (figura 2-11).

Pero si una reflexión voltea las cosas, una segunda reflexión las endereza (figura 2-12).

De este modo, para trasladar una figura en una dirección dada, debemos reflejarla en una línea perpendicular a la dirección dada y reflejar la imagen en una recta paralela a la primera. Hemos resuelto la mitad del primer problema al trasladar en una dirección dada, pero nos falta determinar la longitud de la traslación.

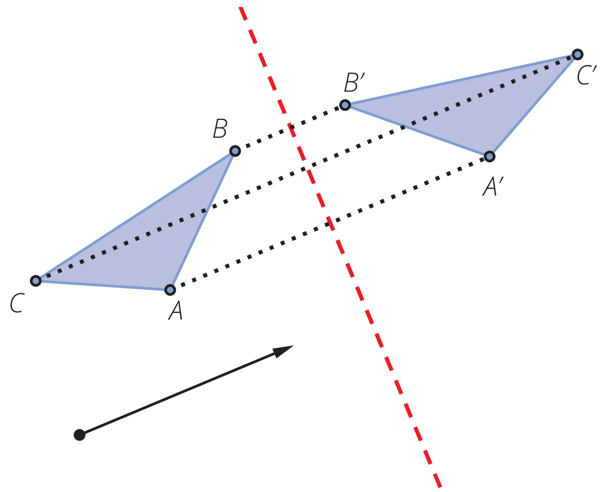


Figura 2-11.

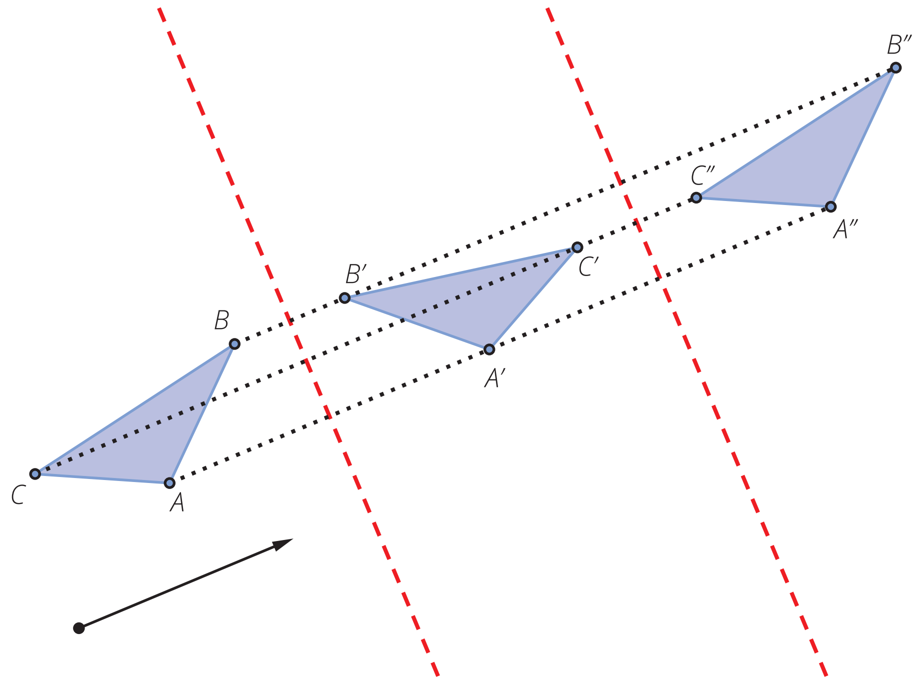


Figura 2-12.

La figura 2-13 es casi igual a la anterior. La distancia de *B* a *B1* es la misma que la de *B1* a *B′*, y la distancia de *B′* a *B2* es igual a la de *B2* a *B″*. De ahí, observamos que la distancia de *B* a *B″* es el doble de la distancia de *B1* a *B2*. Para las *A′* y las *C′* sucede lo mismo.

La longitud de la traslación es el doble de la distancia entre las rectas paralelas *n* y *m* en las que estamos reflejando. Podemos poner la primera recta *m* en donde queramos, con la única condición de que sea perpendicular a la traslación que buscamos hacer, y la segunda recta *n* debe ser paralela a *m* y estar a una distancia de ésta igual a la mitad de la distancia que se quiera trasladar.

No resulta lo mismo de reflejar primero en *m* y luego en *n* que hacerlo al revés.

Acabamos de descubrir un teorema muy importante: la composición de dos reflexiones en dos líneas *m* y *n* paralelas es una traslación en la dirección perpen-

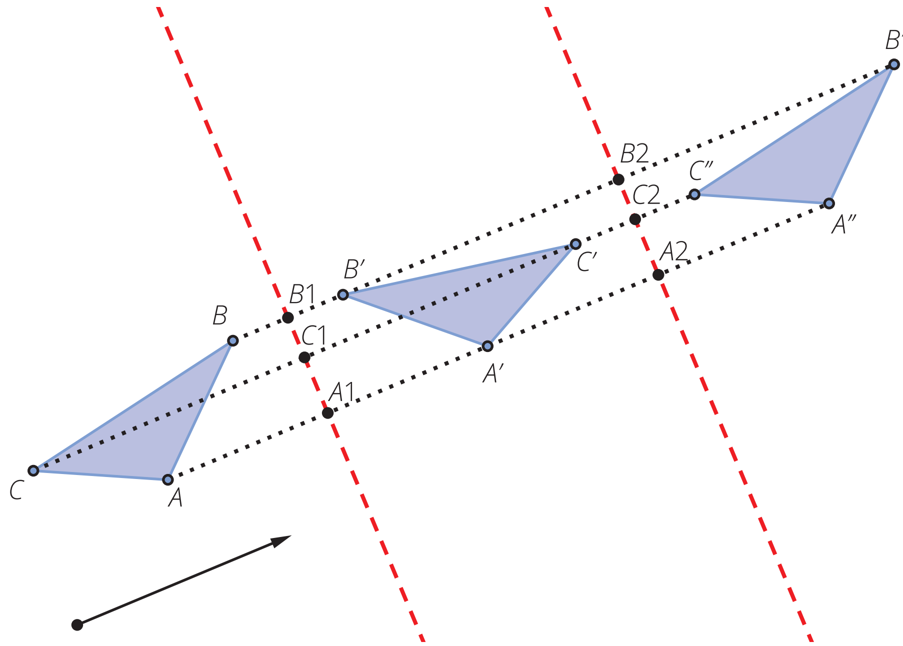


Figura 2-13.

dicular a *m* y *n* con una longitud de traslación del doble de la distancia entre las paralelas.

Para rotar un triángulo *ABC* alrededor de un punto *O*, reflejemos el triángulo en una recta *m* que pase por *O,* para así obtener los puntos *A′*, *B′* y *C′*. Reflejemos estos nuevos puntos en otra recta *n* que pase por *O,* para obtener *A″*, *B″* y *C″*.

Comprobamos que el triángulo *A″B″C″* es una rotación del triángulo *ABC*. El centro de rotación es *O* y el ángulo de rotación es el doble del ángulo que forman *n* y *m*.

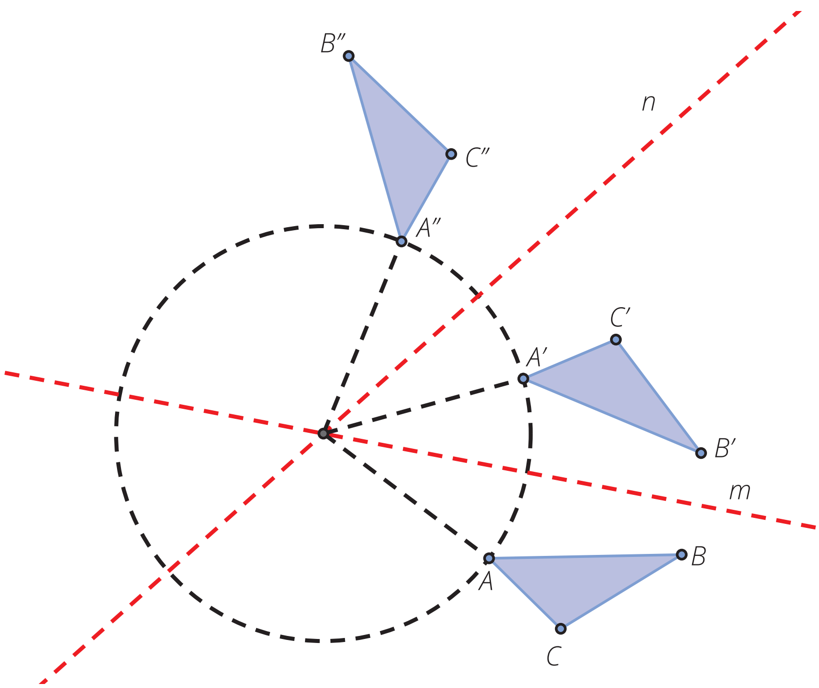


Figura 2-14.

La circunferencia punteada nos permite ver que *A*, *A′* y *A″* están a la misma distancia del centro y los radios ayudan a demostrar que el ángulo *AOA″* es el doble del que forman las rectas *n* y *m*.

Descubrimos otro teorema importante: la composición de dos reflexiones en dos líneas *m* y *n* que se cortan en *O* es una rotación con centro en *O* y con un ángulo de rotación del doble del ángulo que forman *n* y *m*.

Si bien los dos teoremas anteriores son importantes, también debemos destacar que los descubrimos intentando resolver un problema. Aun más relevante es que con una adecuada dirección también nuestros alumnos pueden descubrirlos.

Hasta aquí hemos visto que con instrumentos muy distintos se pueden hacer las construcciones básicas de la geometría y también es posible realizar las tres transformaciones rígidas: reflejar, trasladar y rotar.

Nuestro siguiente reto es lograr una cuarta transformación: la homotecia, que consiste en agrandar o achicar una figura al seguir ciertas reglas.

A manera de definición, si dados dos triángulos *ABC* y *A′B′C′* las tres rectas *AA′*, *BB′* y *CC′* pasan por un punto *O* y si $A'O/AO = B'O/BO = C'O/CO = k$, se dice que los dos triángulos son homotéticos, con centro de homotecia *O* y razón de homotecia *k*.

Para un mejor entendimiento, en la figura 2-15 *k* es igual a 2.

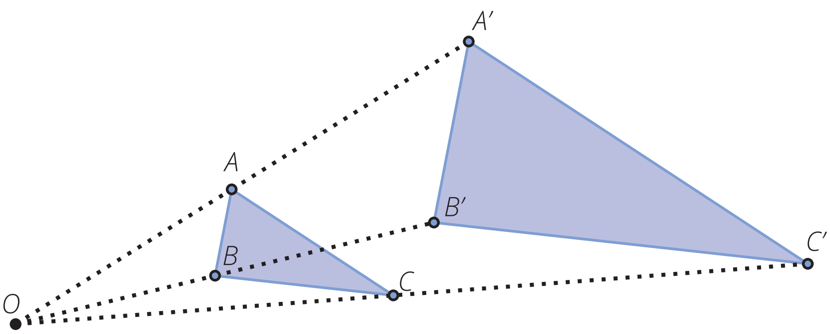


Figura 2-15.

La definición se puede generalizar fácilmente para polígonos y —aunque con un poco más de dificultad— para otras figuras en general.

Para hacer una homotecia tenemos que saber multiplicar un segmento por un número o, mejor aún, multiplicar un segmento por otro segmento; es decir, si tenemos dos segmentos *a* y *b*, construir un segmento cuya longitud sea el producto de las longitudes de *a* y *b*.

2.1.4. Cuarta serie de problemas

1. Dada la unidad y un segmento *OA,* encontrar un punto *A′* sobre la recta *OA,* tal que *OA′* mida el triple que *OA*.
2. Dada la unidad, un segmento *OA* de longitud *a* y otro segmento *OB* de longitud *b*, construir un segmento *OC* de longitud *ab*.

3. Dada la unidad, un segmento *OA* de longitud *a* y otro segmento *OB* de longitud *b*, construir un segmento *OD* de longitud *a/b*.
4. Dada la unidad, un segmento *OA* de longitud *a* y otro segmento *OB* de longitud *b*, construir un segmento *OE* de longitud *b/a*.

Para el segundo problema, trazamos dos rectas *m* y *n* que se intersecan en *O*; en *m* colocamos el segmento *OA,* mientras en *n* colocamos la unidad y el segmento *OB*. Unimos la unidad con *A* y pasamos una paralela por *B*, el punto donde ésta interseca a *m* dista *ab* de *O*. Proponemos al lector que realice la demostración, con base en la semejanza de triángulos.

En la figura 2-16, *OU* es la unidad y *OP* es el producto buscado.

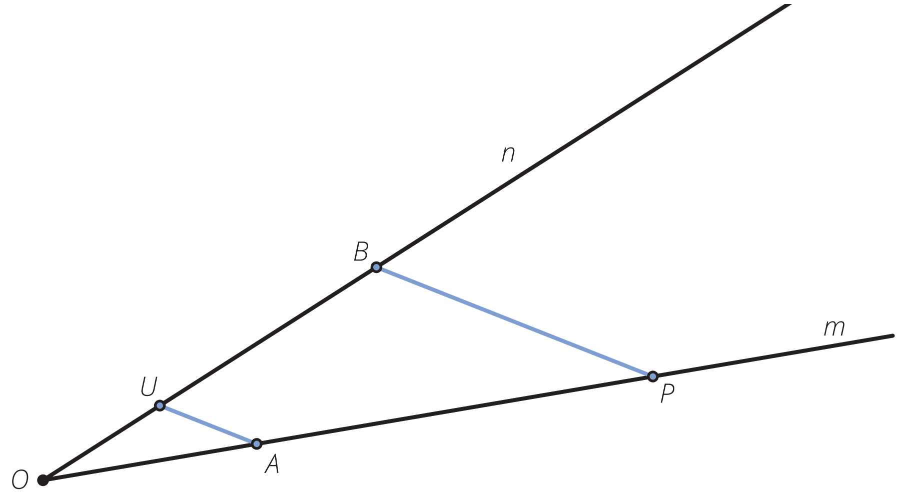


Figura 2-16.

Observemos que esta forma de multiplicar respeta las leyes de los signos.

El primer problema es un caso particular del segundo; para el tercero y el cuarto, sólo tenemos que recordar que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Ahora ya podemos hacer homotecias.

Vale la pena hacer notar que con lo que hemos hecho hasta ahora, podemos, a partir de la unidad, construir cualquier número racional; si a la unidad la multiplicamos por *p* y al producto lo dividimos entre *q*, obtenemos el racional *p/q*.

Antes de proponer la siguiente serie de problemas, analicemos la figura 2-17, que nos ayudará más adelante para solucionarlos.

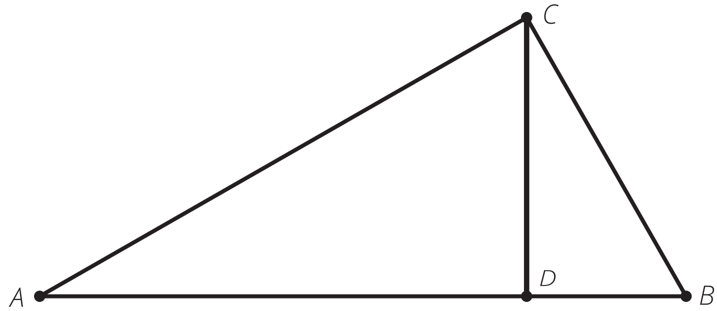


Figura 2-17.

La figura 2-17 es un triángulo rectángulo con la altura de la hipotenusa al ángulo recto. Observemos que los triángulos *ABC*, *CBD* y *ACD* son semejantes. Asimismo,

1. Si comparamos *ABC* con *CBD* (figura 2-18), tenemos que $AB/BC = BC/BD$, o sea, $(BC)^2 = AB \times BD$; es decir, el cuadrado azul tiene la misma área que el rectángulo azul ($AB' = AB$).
2. Al comparar *ABC* con *ACD,* vemos que $AB/AC = AC/AD$, o bien $(AC)^2 = AB \times AD$. Esto muestra que el cuadrado amarillo tiene la misma área que el rectángulo amarillo.

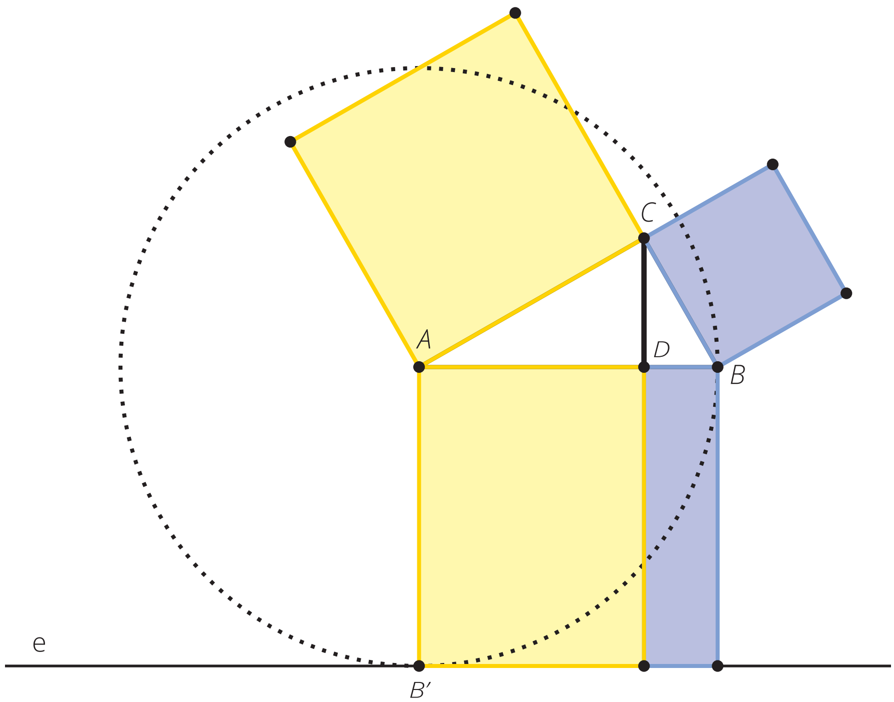


Figura 2-18.

Si juntamos los rectángulos azul y amarillo obtenemos un cuadrado de lado *AB,* con lo cual demostramos el teorema de Pitágoras.

3. Para finalizar, comparamos los triángulos *ACD* y *CBD*. Tenemos que $AD/DC = DC/DB$, lo que podemos escribir como $(DC)^2 = AD \times DB$. Es decir, el cuadrado de la altura es el producto de los dos segmentos que conforman la hipotenusa.

2.1.5. Quinta serie de problemas

1. Dados un segmento *AB* y un punto *D* en éste, así como una recta *m* perpendicular a *AB* por *D*, construir un triángulo rectángulo con hipotenusa *AB,* tal que el vértice *C*, correspondiente al ángulo recto, quede sobre *m*.

2. Dado un segmento de longitud 1, construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$.
3. Dado un segmento de longitud 1, construir un segmento de longitud $\sqrt{6}$.
4. Dado un segmento de longitud 1, construir un segmento de longitud $\sqrt{7}$.
5. Dar un algoritmo para construir cualquier raíz.

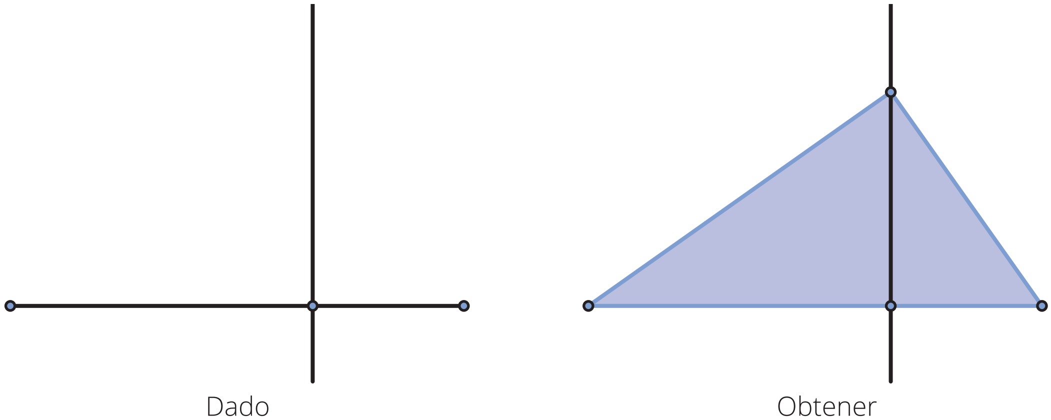


Figura 2-19. Problema 1 de la quinta serie.

Suponiendo que intentamos resolver los problemas primero, antes de continuar recordemos que si dos vértices *A* y *B* de un triángulo son los extremos del diámetro de una circunferencia y el tercer vértice *C* está sobre la circunferencia, el ángulo en *C* es necesariamente recto.

Para resolver este problema con el doblado de papel o con la caja de discos compactos, observamos la figura 2-20.

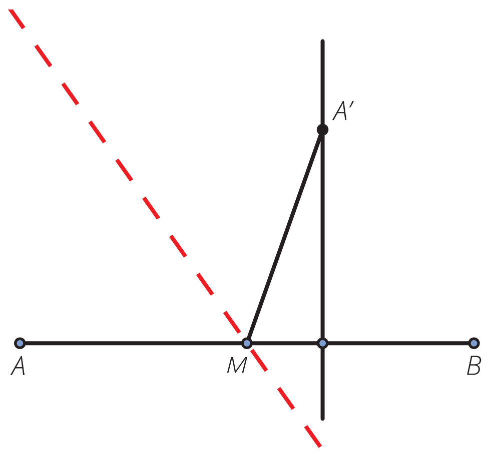


Figura 2-20.

En la figura 2-20, *M* es el punto medio de *AB,* y *A′* es el reflejo de *A,* el cual es el vértice buscado. ¿Por qué?

Para los otros problemas de esta serie usamos el resultado anterior y lo visto en el problema 3 de la cuarta serie.

A manera de resumen de lo que hemos logrado hasta aquí, tenemos que dado un segmento de longitud 1, mediante el doblado de papel, al emplear un reflector de acrílico, o bien con la regla y el compás podemos ubicar sobre la recta real cualquier número racional, así como la raíz cuadrada de cualquier número que sepamos construir. También sabemos sumar, restar, multiplicar y dividir segmentos; además de que podemos realizar las cuatro transformaciones básicas de la geometría: reflexión, traslación, rotación y homotecia.

Trabajar con instrumentos poco convencionales como la caja de discos o el doblado de papel nos permite, junto con los estudiantes, reflexionar de una manera más profunda acerca de la geometría. Asimismo, nos ayuda a desarrollar el ingenio y plantear problemas con los cuales los alumnos vayan construyendo su conocimiento matemático. Conscientes de que las figuras hechas con los materiales alternativos no son precisas —de hecho, la mayoría de las veces salen muy chuecas—, recordemos que lo importante en geometría no es trazar figuras bonitas, sino descubrir la forma de hacerlas.

Hay construcciones que son muy sencillas de obtener con regla y compás, pero con los otros instrumentos pueden ser sumamente difíciles, por ejemplo, un triángulo, dados sus tres lados.

Aunque intentar doblando el papel sería una locura, fácilmente podemos demostrar que es posible construirlo, pues la fórmula de Herón dice que el área de un triángulo de lados *a*, *b* y *c* es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde *s* es el semiperímetro.

Si tenemos segmentos con las longitudes de los tres lados de un triángulo, entonces, mediante sumas, productos, divisiones y raíces (operaciones que ya sabemos hacer) podemos construir un segmento cuya longitud coincida numéricamente con el área del triángulo. Dado que $A = b \times h/2$, si multiplicamos este segmento por 2 y dividimos entre uno de sus lados, obtenemos la altura sobre ese lado. El resto de la construcción no es difícil, como se muestra en la figura 2-21.

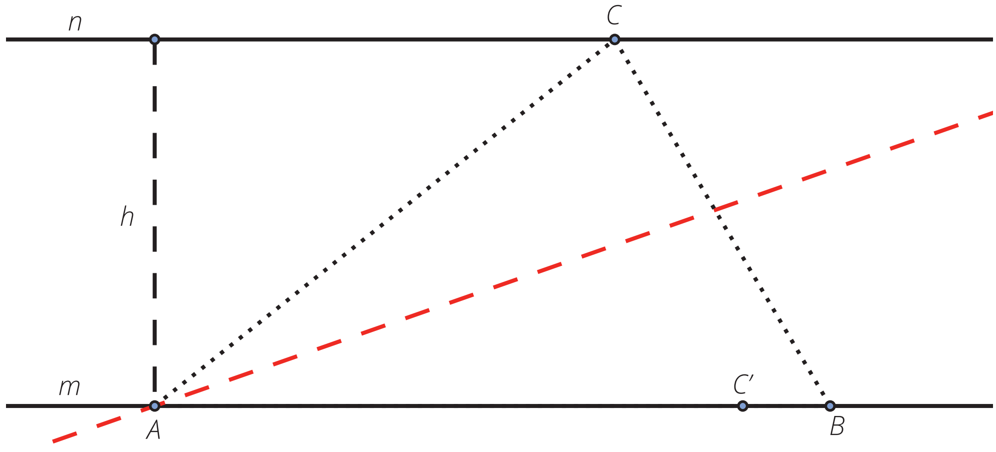


Figura 2-21.

Si *h* es la altura sobre el lado *AB*, trazamos dos paralelas, *m* y *n,* a una distancia *h,* en *m* ponemos el segmento *AB* y ubicamos el punto *C′,* de modo que *AC′* = *AC*. Buscamos una recta que haga que el reflejo de *C′* caiga en la recta *n*. Así ubicamos el vértice *C*.

Por otro lado, encontramos construcciones que no podemos hacer con regla y compás, pero que sí es posible obtener mediante el doblado de papel o con el reflejo de una caja de acrílico.

Dadas dos rectas *m* y *n* y dos puntos *M* y *N*, obtengamos una línea *k*, tal que al reflejar en ella el punto *M* caiga sobre la recta *m* y el punto *N* caiga sobre la recta *n*. Intentemos doblando el papel.

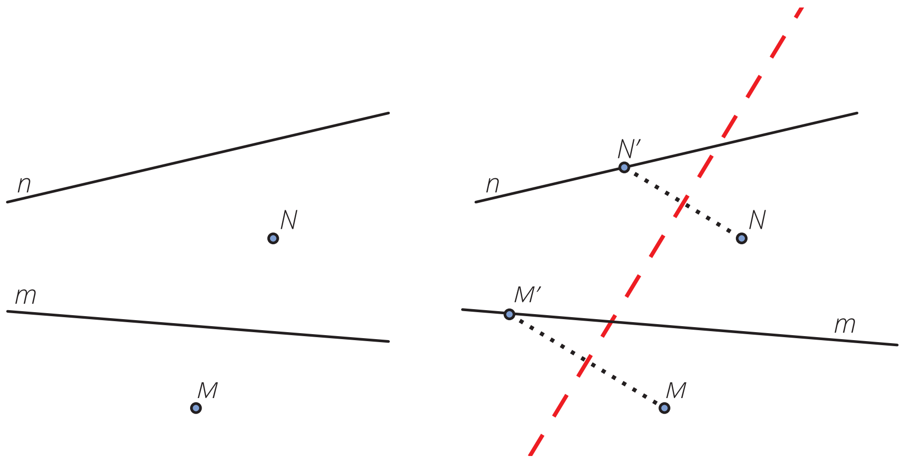


Figura 2-22.

Partiendo de que esto es posible, podemos trisecar un ángulo y duplicar el cubo, que dicho en forma moderna es construir un segmento que mida la raíz cúbica de 2.

Para concluir esta primera parte dedicada a la geometría euclidiana, mostramos en la figura 2-23 cómo trisecar un ángulo. La duplicación del cubo es un poco más complicada y sale de los alcances de este libro.

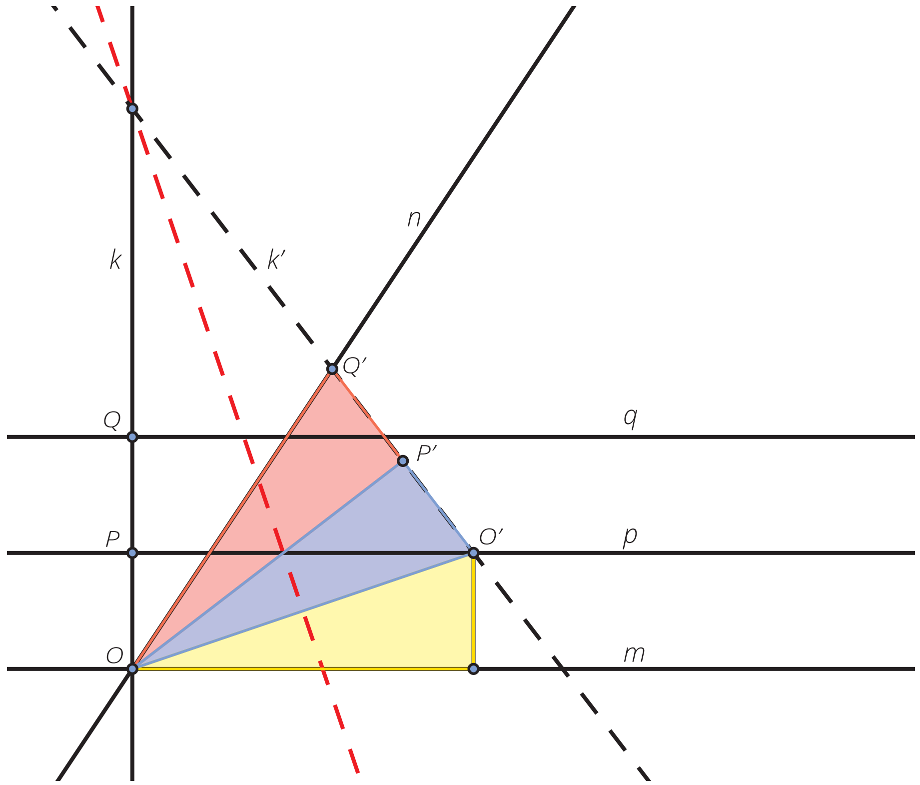


Figura 2-23.

Las rectas *m* y *n* forman un ángulo en *O*. Para trisecar ese ángulo, trazamos una perpendicular (*k*) a *m* por *O* y dos paralelas a *m* (*p* y *q*) a distancias iguales. Éstas determinan los puntos *P* y *Q* en *k*.

Buscamos un doblez (en rojo) que ponga a *O* sobre *p* y a *Q* sobre *n*. Los puntos *P′* y *Q′* —reflejos de *P* y *Q*— determinan las rectas que trisecan al ángulo. Si los triángulos azul, rojo y amarillo son congruentes, demostramos que los ángulos son iguales. Invitamos al lector a intentarlo.

2.2. División de figuras planas

Es común encontrarnos en situaciones en las que deseamos dividir algo entre dos personas, por ejemplo, una caja llena de naranjas. Esto lo podemos hacer fácilmente si contamos las naranjas y repartimos el mismo número de naranjas a cada quien; si sobra una, la partimos a la mitad y resolvemos el problema.

A continuación, enunciamos dos problemas de reparto en los cuales la solución puede sorprendernos.

En el primero, tres hermanos reciben una herencia de 35 camellos, pero no saben cómo repartirla porque el mayor debe quedarse con la mitad de esos camellos, el hijo de en medio obtendrá la tercera parte y el menor, la novena parte. Sin embargo, la división de 35 entre 2, 3 y 9 no es entera, ya que los resultados son 17.5, 11.6 y 3.8, respectivamente. Para resolver su problema piden a una persona que les preste su camello, entonces en lugar de 35 tendrán 36 camellos, y este número sí es divisible entre 2, 3 y 9. Cada hijo recibirá la parte que le corresponde: 18, 12 y 4 camellos, respectivamente, cuya suma da 34. Regresan el camello a quien los ayudó y como pago le ofrecen el camello sobrante. Para conocer el relato completo, y otros más, véase Tahan (2004).

El segundo problema consiste en que dos personas desean dividir un pastel entre las dos, de manera que ambas se sientan conformes con la parte que les tocó. ¿Cómo harían el reparto? La respuesta que por lo general obtenemos es que a cada quien le corresponde la mitad, pero de una manera práctica no queda muy claro cuál es exactamente la mitad. ¿Qué procedimiento eficiente pueden llevar a cabo estas dos personas para obtener su "mitad" de una forma que no se necesiten básculas ni métodos muy elaborados? Una posible respuesta es que una de ellas tome el cuchillo y parta el pastel en lo que considera que es la "mitad". La otra persona, quien observa, debe escoger uno de los dos pedazos y, así, las dos quedarán conformes.

Pero si en lugar de dos personas fueran tres, ¿cómo podrían partir el pastel para que cada una reciba una tercera parte? ¿Y si fueran más personas? Este problema y su solución se aborda en Stewart (2010).

En las situaciones anteriores no estamos considerando el hecho de que las naranjas o los camellos pueden ser de distintos tamaños, por lo que la solución no es tan exacta, y en el tercer problema ésta dependerá de la apreciación de los involucrados y no de la exactitud.

No obstante, en lo que concierne a las matemáticas, cuando hablamos de reparto, no podemos dar oportunidad a que la solución dependa de la apreciación de alguien, sino que necesitamos demostrar la igualdad de las partes repartidas. Para ello discutiremos a continuación algunos repartos de figuras geométricas planas que cumplan con ciertas restricciones, tanto para las figuras como para los repartos.

2.2.1. División de triángulos

¿Cómo podemos dividir un triángulo con un segmento de recta de manera que las dos partes resultantes tengan la misma área?

Una manera de resolverlo es trazando una de las medianas del triángulo. Ésta es el segmento de recta que une el punto medio de uno de los lados del triángulo con el vértice opuesto.

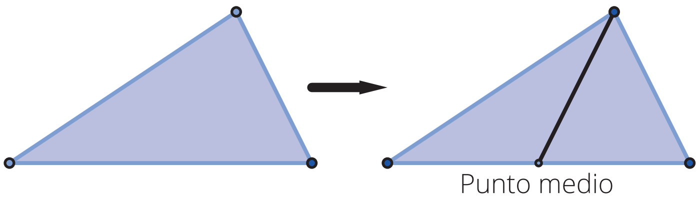


Figura 2-24.

Obtenemos dos triángulos cuyas bases y alturas tienen la misma longitud y, por lo tanto, al calcular su área, ésta será igual en ambas.

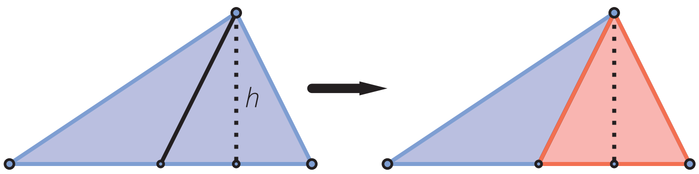


Figura 2-25.

¿Podemos dividir un triángulo en tres partes de igual área?

Si seguimos la idea de la construcción anterior, una posible respuesta es dividir la base entre el número de triángulos que deseamos obtener y luego trazamos los segmentos de recta que unen a cada uno de esos puntos con el vértice opuesto. De esta manera, obtendremos tres triángulos con longitudes iguales en la base y la altura; por lo tanto, al calcular el área, ésta será la misma para los tres.

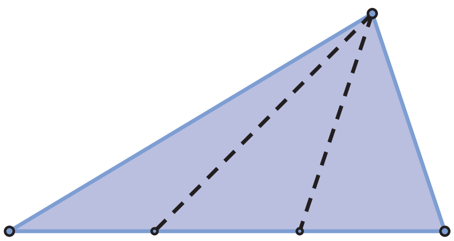


Figura 2-26.

La construcción anterior funciona para dividir el triángulo original en *n* número de triángulos con igual área.

¿Cómo podremos dividir el triángulo en tres partes de igual área con un procedimiento diferente al anterior?

Para contestar esto será necesario que analicemos el caso en que se trazan todas las medianas de un triángulo. Demostraremos que al hacer esto se obtienen seis triángulos con la misma área.

Consideremos un triángulo cualquiera y el punto donde se intersecan las medianas, llamado baricentro, que se denotará como *P*.

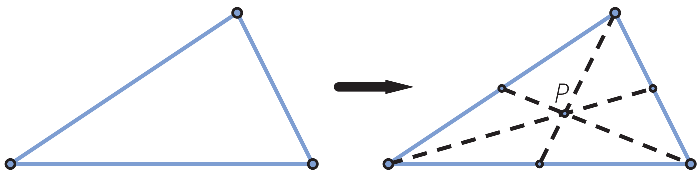


Figura 2-27.

Con cada una de las medianas que trazamos obtenemos dos triángulos de la misma área, como en la figura 2-28.

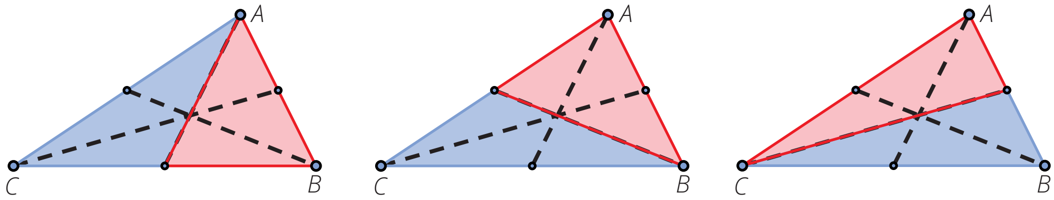


Figura 2-28.

Si etiquetamos cada una de las áreas de los triángulos pequeños como *a, b, c, d, e* y *f,* por lo dicho anteriormente, tendremos que:

1. $a + f + e = b + c + d$
2. $c + d + e = b + a + f$
3. $a + b + c = d + e + f$

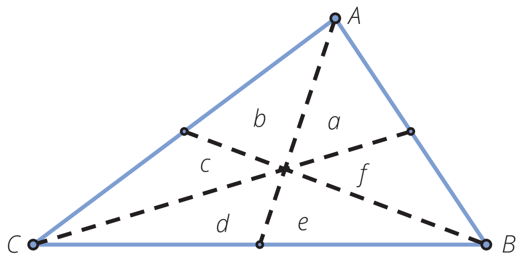


Figura 2-29.

Por otro lado, en la figura 2-30 podemos observar que el triángulo *CPB* está dividido en dos triángulos, a saber: *CPD* y *DPB,* los cuales resultan de la división del triángulo *CPB* por la mediana del triángulo *ABC,* que a su vez es mediana del triángulo *CPB*. Esto implica que la longitud de la base del triángulo *CPD* es igual a la longitud de la base del triángulo *DPB*. Además, ambos triángulos (*CPD* y *DPB*) tienen la misma altura; por lo tanto, si calculamos las áreas, resulta que $e = d$.

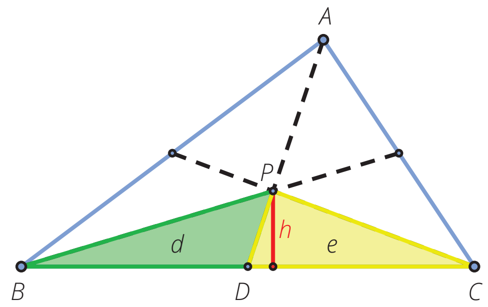


Figura 2-30.

De manera análoga, podemos obtener que $b = c$ y $a = f$.

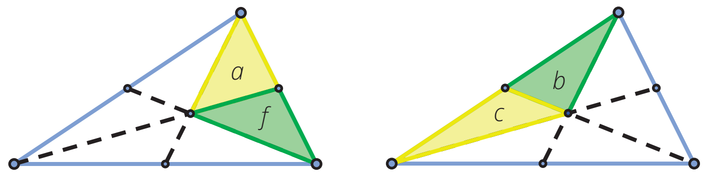


Figura 2-31.

Si queremos mostrar que $a = b = c = d = e = f$, podemos utilizar las ecuaciones 1) y 2), así como las igualdades $e = d$, $b = c$ y $a = f$.

Tenemos que $e = d$ y, de la ecuación 1), sabemos que $a + f + e = b + c + d$; entonces, $a + f = b + c$.

Como $b = c$ y $a = f$, entonces $2a = 2b$; es decir, $a = b$.

De la ecuación 2) tenemos que $e + d + c = b + a + f$. Como $e = d$ y $a = f$, entonces $2d + c = b + 2a$.

Como $b = c$, entonces $2d = 2a$; es decir, $a = d$.

Por lo tanto, demostramos que $a = b = c = d = e = f$.

¿Podemos usar esto para dividir un triángulo *ABC* en tres partes de igual área? Primero construimos el triángulo *ABD* de manera que *C* sea el punto medio del segmento *BD* y que el segmento *AC* sea una de las medianas del triángulo *ABD*. Después trazamos las demás medianas del triángulo *ABD* y éste queda dividido en seis triángulos de igual área. Borramos los segmentos de recta que no necesitamos y llegamos a la solución del problema.

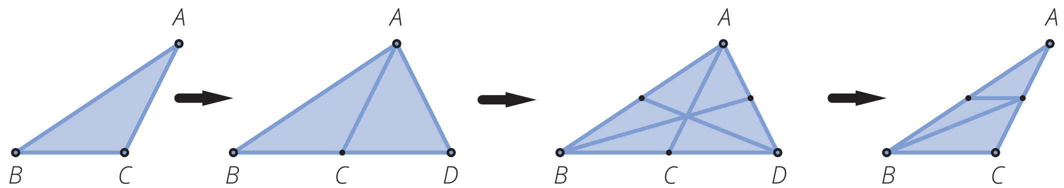


Figura 2-32.

¿Serán las únicas formas de dividir un triángulo en tres partes de igual área? Si no, ¿de qué otra manera se puede?

2.2.2. División de cuadrados

Pasemos ahora a dividir un cuadrado de manera que resulten dos partes con la misma área. Por lo general, usaríamos un segmento de recta, como se muestra en la figura 2-33.

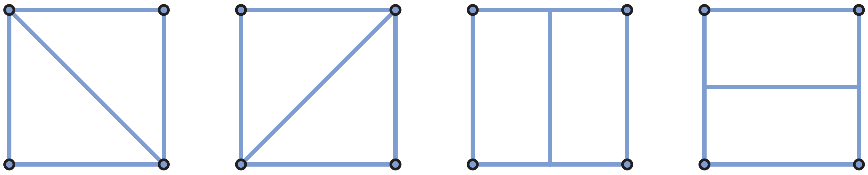


Figura 2-33.

Si hacemos todos estos trazos en un solo cuadrado, observamos que todos tienen un punto en común, el centro del cuadrado.

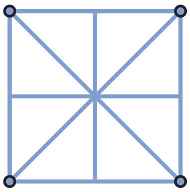


Figura 2-34.

Si trazamos cualquier segmento de recta que pase por el centro del cuadrado, ¿lo estamos dividiendo en dos partes de igual área?

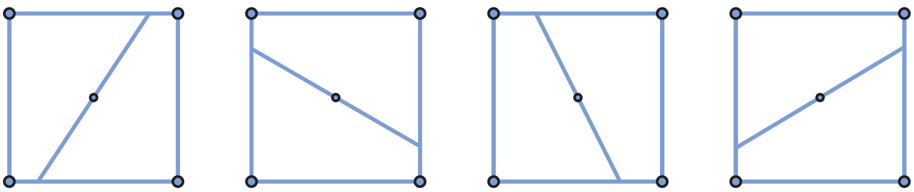


Figura 2-35.

La respuesta es sí, porque se forman dos figuras congruentes, lo cual vamos a verificar a continuación. Si *ABCD* es un cuadrado y *P,* el centro del cuadrado, trazamos una recta que pase por *P,* y las intersecciones de esa recta con los lados del cuadrado son *E* y *F* (figura 2-36).

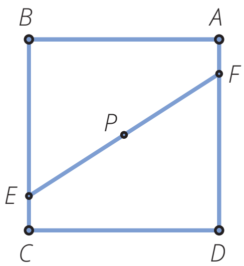


Figura 2-36.

Trazamos dos segmentos de rectas paralelas al lado *AB,* de manera que uno de éstos interseque al punto *E* y el otro, al punto *F*. Entonces se forman dos triángulos, *EFH* y *EFG*, los cuales son congruentes (figura 2-37).

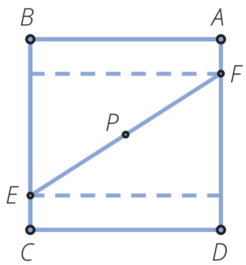


Figura 2-37.

Trazamos un segmento de recta perpendicular a *AB* que pase por *P*. Las intersecciones de ese segmento con los segmentos *AB* y *CD* son *I* y *J*, respectivamente. Por su parte, las intersecciones del segmento *IJ* con los segmentos *HE* y *FG* son *K* y *L,* respectivamente (figura 2-38).

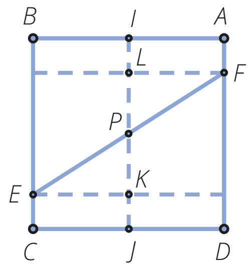


Figura 2-38.

Como los triángulos *EHF* y *EFG* son congruentes, la longitud del segmento *KP* es igual a la longitud del segmento *PL;* como la longitud del segmento *IP* es igual a la longitud del segmento *PJ,* entonces la longitud del segmento *IK* es igual a la longitud del segmento *LJ,* con lo cual queda demostrado que el polígono *ABEF* es congruente con el polígono *ECDF*.

¿Qué sucede si utilizamos dos segmentos de recta que no se intersecan para dividir al cuadrado? En la figura 2-39 mostramos una posible división.

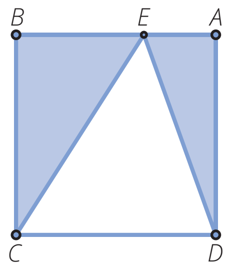


Figura 2-39.

¿La suma de las áreas de la parte sombreada es igual al área de la parte blanca?

La respuesta también es sí. Supongamos que cada lado del cuadrado tiene una longitud a. Entonces, el área del triángulo blanco es $a^2/2$. Podemos calcular el área de la parte sombreada como la suma de las áreas:

$$\begin{aligned}\text{Área}_{sombreada} &= \frac{Long(AE)\times Altura}{2}+\frac{Long(EB)\times Altura}{2}\\ &=\left(Long(AE)+Long(EB)\right)\frac{Altura}{2}=\frac{(a)\times Altura}{2}=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Cabe hacer notar que la única restricción del punto *E* es que tiene que estar sobre uno de los lados del cuadrado, para después trazar segmentos de recta que lo unan con los vértices del lado opuesto.

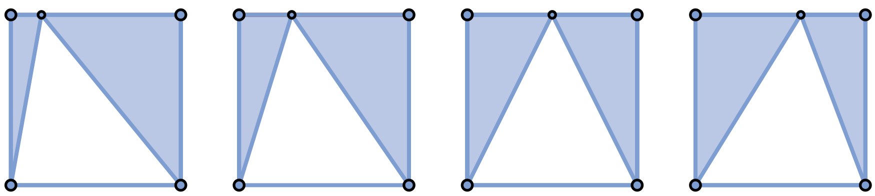


Figura 2-40.

Proponemos los siguientes ejercicios para los profesores:

1. En un cuadrado *ABCD, E* es un punto sobre el segmento *AB,* y *F,* un punto sobre el segmento *CD*. ¿Será cierto que la suma de las áreas de los triángulos *ADE* y *EFB* es igual a la suma de las áreas de los triángulos *DEF* y *FBC*?

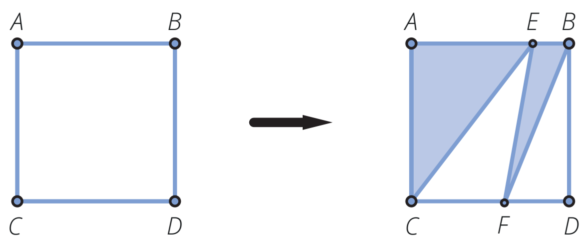


Figura 2-41.

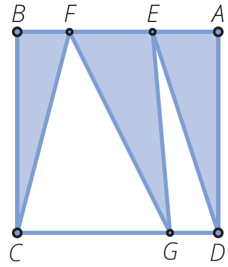


Figura 2-42.

2. En un cuadrado *ABCD, E* y *F* son dos puntos sobre el segmento *AB,* y *G* es un punto sobre el segmento *CD*. ¿Será cierto que la suma de las áreas de los triángulos *ADE, EGF* y *FCB* es igual a la suma de las áreas de los triángulos *DEG* y *GFC*?
3. En los cuadrados de la figura 2-43 mostramos varias divisiones. ¿La suma de las áreas sombreadas será igual a la suma de las áreas blancas? ¿Por qué? ¿Podemos generalizar este tipo de divisiones?

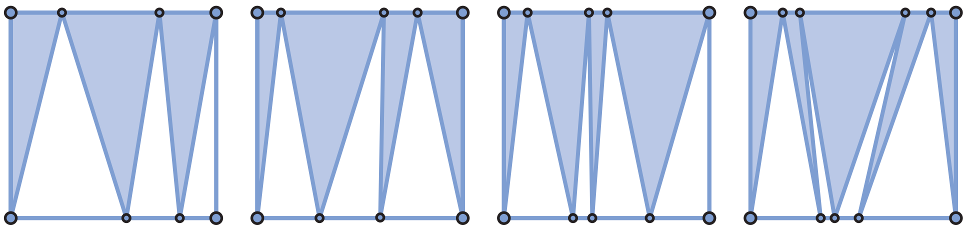


Figura 2-43.

4. Consideremos un cuadrado *ABCD* y tracemos una recta paralela al lado *BC*. Los puntos de intersección de esa recta con los lados del cuadrado serán *E* y *F*. Hagamos una recta perpendicular al segmento *EF;* los puntos de intersección de esa recta con los lados del cuadrado serán *G* y *H*. ¿El área del polígono *EHFG* es igual a la suma de las áreas de los triángulos *AEG*, *EBH*, *HCF* y *GFD*? ¿Por qué?

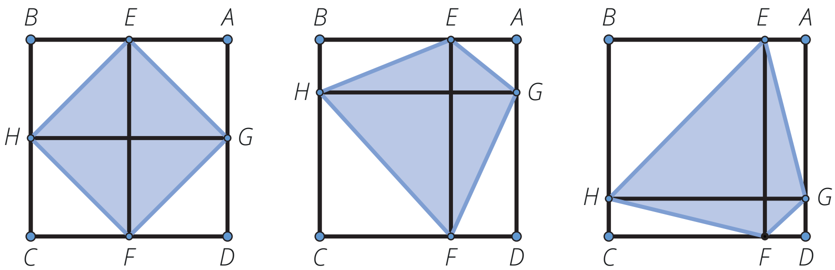


Figura 2-44.

Tracemos un cuadrado *ABCD* y construyamos un cuadrado *EFGH* que tenga sus vértices en los lados del cuadrado *ABCD*. ¿En qué condiciones el área del cuadrado *EFGH* es igual a la suma de las áreas de los triángulos *AEH*, *EBF*, *FCG* y *HGD*?

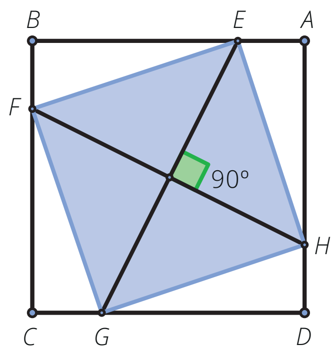


Figura 2-45.

La única manera posible para que las áreas sean iguales es si las rectas perpendiculares son paralelas a los lados, como en el caso anterior. Sin embargo, cuando no lo son, observamos algo interesante. Si tomamos el cuadrado *ABCD,* trazamos dos perpendiculares cualesquiera y a las intersecciones de esas rectas con los lados del cuadrado las denotamos como *E*, *F*, *G* y *H*, podemos confirmar que la longitud del segmento *EF* es igual a la longitud del segmento *GH*.

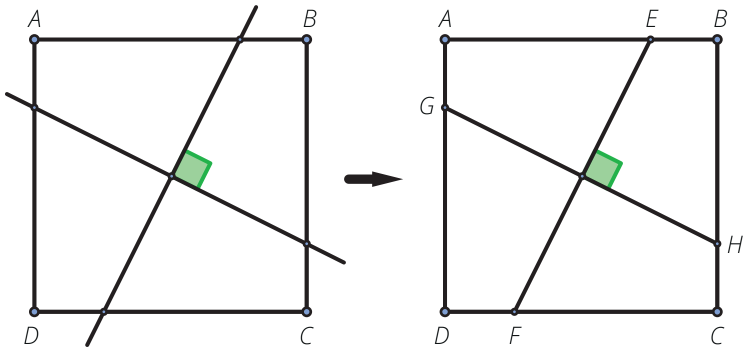


Figura 2-46.

Trazamos dos segmentos de recta paralelos a los lados que pasen por *E* y *G*, respectivamente, para obtener dos triángulos congruentes, *EFJ* y *GHI*.

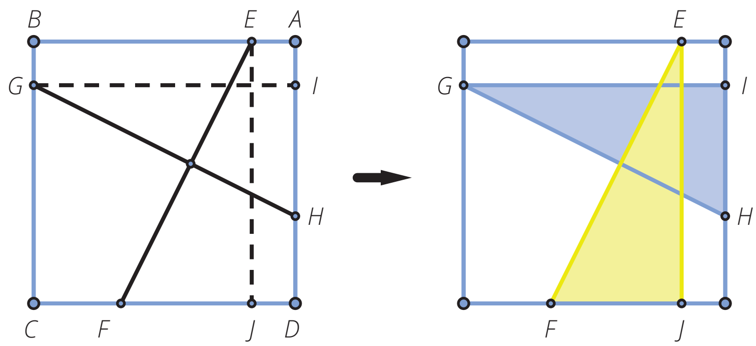


Figura 2-47.

Ahora, si usamos este resultado podemos demostrar sin palabras, como en la figura 2-48, el teorema de Pitágoras, el cual dice que, en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

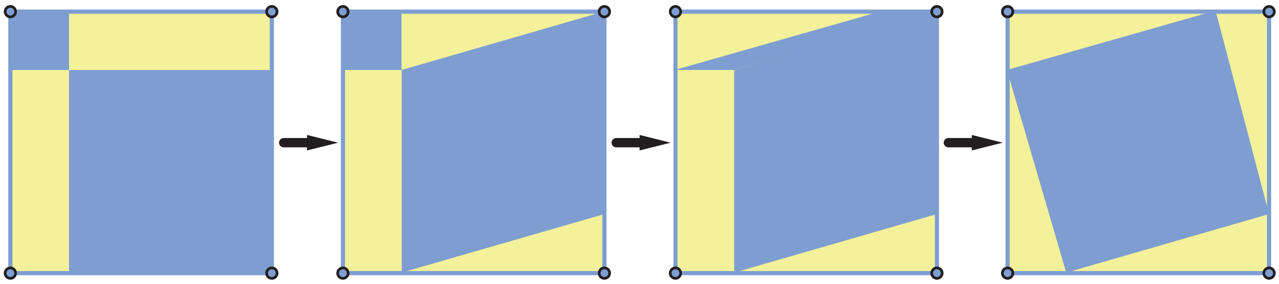


Figura 2-48.

A continuación proponemos otras maneras de demostrar el teorema de Pitágoras. En la figura 2-49 dividimos los cuadrados construidos sobre los catetos y construimos con las piezas un cuadrado sobre la hipotenusa.

¿Cómo argumentamos en cada uno de los casos la manera de hacer la división? ¿Podemos modificar estas divisiones para generar otras?

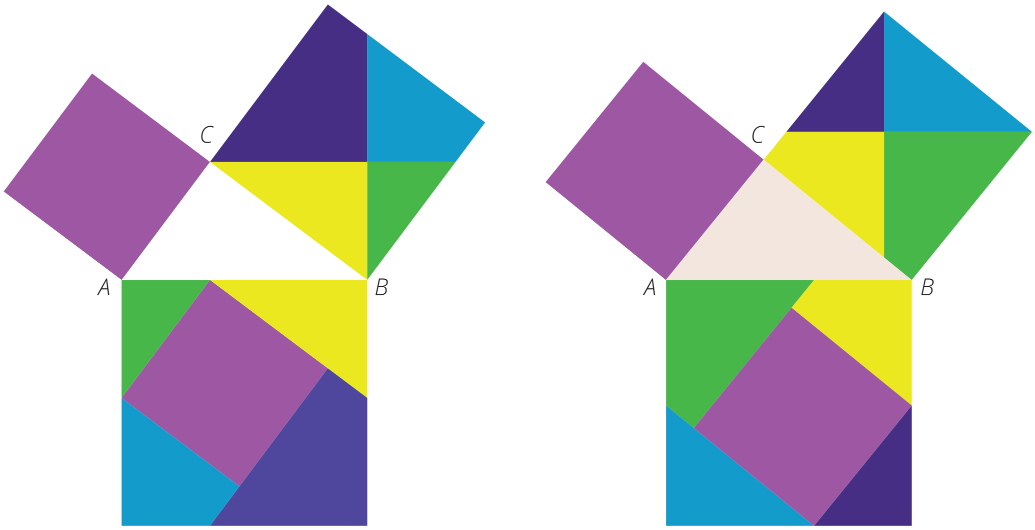


Figura 2-49. Modificada de <roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teorema-pitagoras.htm>.

Responder a las preguntas anteriores puede ser una tarea difícil. Para resolverlo proponemos analizar un famoso rompecabezas creado en 1902 por el matemático inglés Henry Ernest Dudeney, el cual consiste en dividir un cuadrado en cuatro piezas de manera que al reacomodarlas podamos construir un triángulo equilátero.

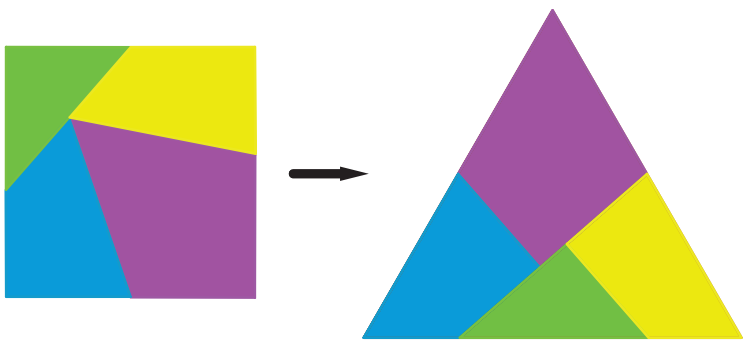


Figura 2-50. Modificada de <es.wikipedia.org/wiki/Henry_Dudeney>.

Para empezar, tracemos un triángulo equilátero *ABC* y construyamos una semicircunferencia exterior tomando como centro el punto medio entre *A* y *C*.

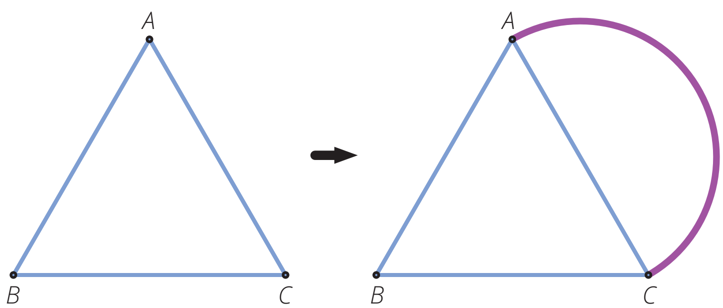


Figura 2-51.

Tracemos un segmento de recta que una el vértice *B* con el centro de la semicircunferencia y prolonguémoslo hasta que cruce a la semicircunferencia; este punto lo denotamos con *D*. Luego, encontremos el punto medio entre *B* y *D*, llamado *E*.

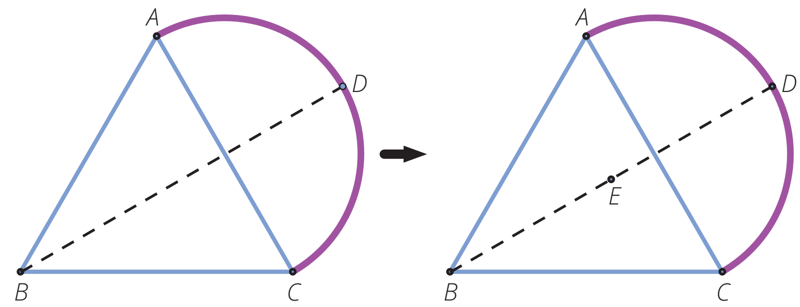


Figura 2-52.

Tracemos un circulo con el centro en *E* y radio *BE*. Prolonguemos el lado *AC* hasta que corte con la circunferencia.

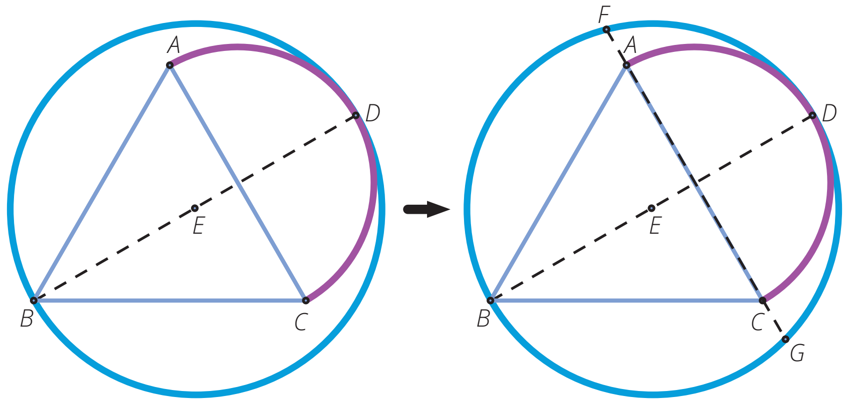


Figura 2-53.

Tracemos una circunferencia con el centro en el punto medio de *AC* y que pase por *F* y *G*. La intersección de la circunferencia con el segmento *BC* es *a*.

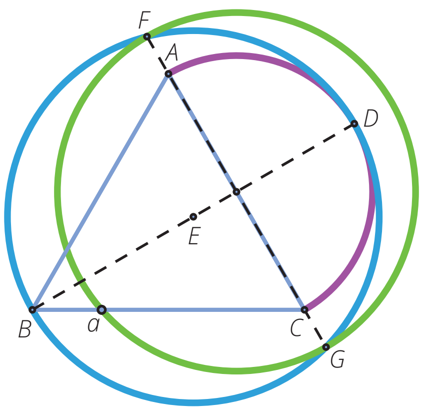


Figura 2-54.

Unamos *a* con el punto medio del segmento de recta *AC* (figura 2-55).

Tracemos una perpendicular al último segmento de recta que hicimos; veamos que pase por el punto medio de *AB* (figura 2-56).

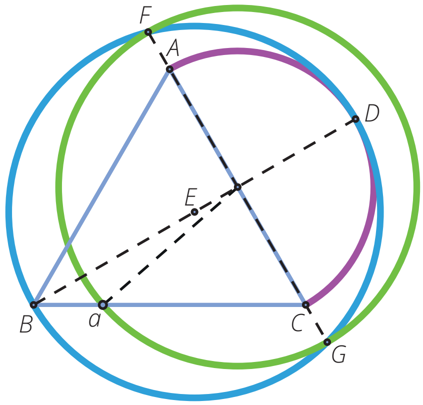


Figura 2-55.

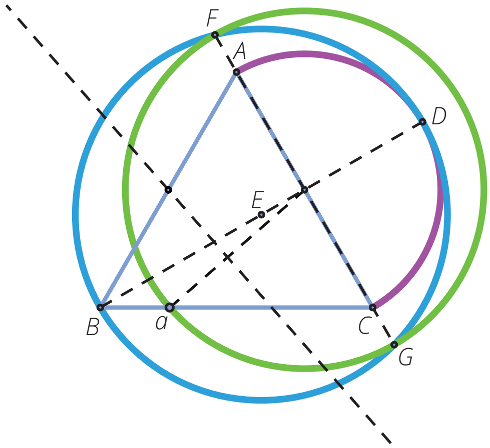


Figura 2-56.

Tracemos una circunferencia con centro en *a* que tenga por radio la mitad de la longitud de uno de los lados del triángulo. La intersección de esa circunferencia con el segmento de recta *BC* es *b*.

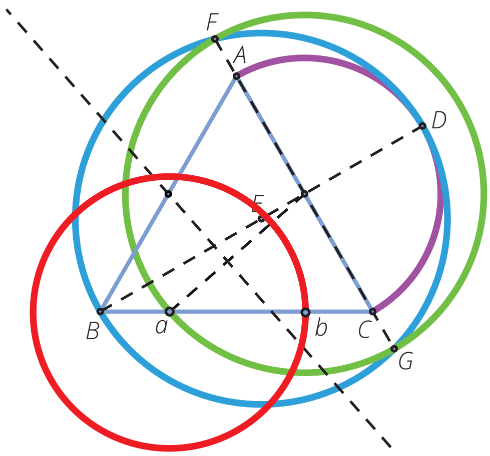


Figura 2-57.

Tracemos una recta paralela a *L1* que pase por *b* (figura 2-58).

Por último, coloreamos las piezas y obtenemos las divisiones (figura 2-59).

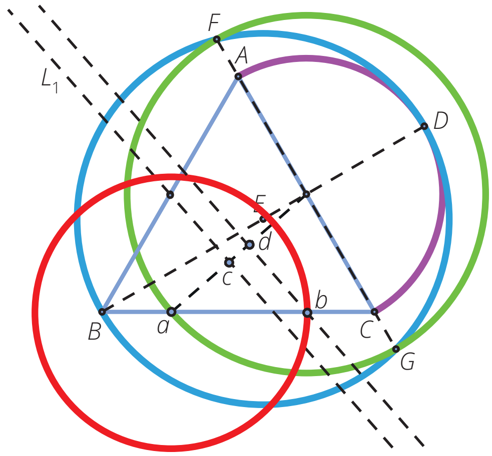


Figura 2-58.

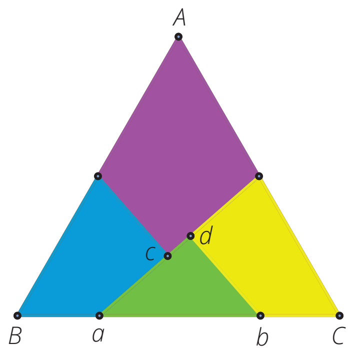


Figura 2-59.

Bibliografía

Boule, F., *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza,* México, Uribe y Ferrari Editores, 2005.

Engel, A., *Problem-Solving Strategies,* Estados Unidos de América, Springer, 1998.

Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas,* México, Trillas, 2007.

Santos-Trigo, M., "La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica", en *Memorias del Seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* España, Universidad de Extremadura, 2008.

SEP, *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas,* México, SEP, 2011.

Stewart, I., *Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos,* España, Crítica, 2010.

Tahan, M., *El hombre que calculaba,* México, Limusa, 2005.

Wentworth, J. y Smith, D., *Geometría plana y del espacio,* México, Porrúa, 2001.

3 | Manejo de la información

Guadalupe Eunice Campirán García
Juan González Hernández
Jésica Hernández Rojano

El objetivo de este capítulo es:

1. Proporcionar herramientas al maestro para que complemente los conocimientos básicos de probabilidad y estadística con los que ya cuenta.
2. Proponer actividades que permitan transmitir el interés del profesor en estos temas hacia los alumnos.
3. Dar herramientas al maestro que le ayuden a aclarar con sus alumnos los conceptos fundamentales, como independencia, probabilidad condicional, muestreo aleatorio y análisis exploratorio de los datos.

3.1. Probabilidad[1]

En esta sección abordamos el temario que se estudia en secundaria en torno a los primeros conceptos de probabilidad: el lenguaje de esta disciplina, como el espacio muestral, así como las propiedades elementales e intuitivas de la probabilidad, por ejemplo, qué valores toma y si la unión de dos eventos es la suma de sus respectivas probabilidades. Vemos el caso de cuando se tienen eventos independientes y la probabilidad de la intersección de éstos es su producto. Incluimos el ejemplo de la probabilidad clásica que corresponde a cuando tenemos casos equiprobables, es decir, si todos los puntos muestrales tienen la misma probabilidad, y para esto calculamos la probabilidad como casos favorables entre casos totales. Mostramos algunas técnicas de conteo, combinatoria, el principio multiplicativo y las ordenaciones. También incluimos algunos ejemplos en los que la probabilidad no es igual para todos los puntos muestrales.

1. Entre la bibliografía que recomendamos para complementar el contenido de este apartado están Goldberg (1986), Kazmier y Díaz (1993), Lipschutz y Lipson (2001) y Mendenhall y Reinmuth (1981).

3.1.1. Introducción a la probabilidad

Todos estamos acostumbrados a utilizar con frecuencia expresiones como: “probablemente el campeón de básquetbol sea el equipo de los Lakers de Los Ángeles”, “los momios están 3 a 1 en el juego de fútbol entre Universidad y Guadalajara”, “las posibilidades de que salga bien de la operación son de 90%”, “existe un 0.2 de probabilidad de que la pandemia de la influenza mute”, o bien “hay una posibilidad de 50% de que el PRI conserve la presidencia”. Usamos estas frases en el lenguaje coloquial, aunque de manera informal, como una medida de qué tan incierto es que un evento ocurra o no. La intuición de este concepto es algo que nos acompaña siempre, que usamos en el lenguaje común, pero que debemos aprender a aplicar en el campo de la probabilidad y la estadística.

Pensando un poco, podemos darnos cuenta de que las probabilidades de los eventos son números entre 0 y 1; que la probabilidad de que un evento no ocurra es 1 menos la probabilidad de que sí; si dos eventos se excluyen, la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es la suma de sus probabilidades individuales, etcétera. Estas propiedades intuitivas pueden aprovecharse para que nuestros estudiantes las utilicen. Por lo tanto, las enunciaremos y aplicaremos haciendo énfasis, en la medida de lo posible, en la intuición como una guía.

En la interpretación de los resultados que utilizan probabilidad y estadística, es importante evitar algunos errores comunes, para con ello lograr una comprensión correcta del fenómeno de estudio. A veces escuchamos en los medios de comunicación frases como: "el rendimiento promedio es de aproximadamente 3%", pero cuando se dice rendimiento promedio significa que ya fue calculado y no es aproximado. También se habla de que la esperanza de vida de los mexicanos nacidos en 2000 es de aproximadamente 73 años; sin embargo, se trata del mismo error, porque la esperanza de vida es un número fijo y no aproximado, a menos que no se sepa el dato con precisión. Por otro lado, a veces usamos como sinónimos en el lenguaje común *probabilidad* y *porcentaje*, aunque no es lo mismo tener 0.4 de probabilidad que 40%, porque cuando se toman como sinónimos ya está implícita una interpretación frecuentista de la probabilidad. Pero esta interpretación no es la única y en algunos casos no es adecuada. Otro error más es tomar como sinónimos *improbable* e *imposible*.

Por qué es importante el estudio de la probabilidad

A partir de lo anterior podemos ver que la probabilidad nos permite construir modelos en los que hay incertidumbre o ruido. Por eso se aplica en la física, química, biología, finanzas, economía, psicología, entre otras disciplinas; asimismo, en actividades prácticas, como el control de calidad en la industria, la predicción del clima, los modelos de estudio de la propagación de epidemias, las encuestas, etcétera.

La probabilidad es importante para entender el mundo actual, para comprender las afirmaciones que aparecen en la sección de economía de los periódicos, para conocer lo que reflejan las encuestas o para opinar acerca de las afirmaciones de los políticos. De esta forma, contamos con elementos que nos permiten darnos cuenta de cuándo algún partido, periódico o noticiario está mintiendo.

Asimismo, en la vida diaria tomamos decisiones de las que no sabemos cuál será el resultado final. Es decir, decidimos en un ambiente de incertidumbre. Ahí es donde la probabilidad nos puede dar algunos elementos de racionalidad que nos permitan tomar mejores decisiones. Por ejemplo, el matemático francés Pierre Simon de Laplace, uno de los pioneros de la probabilidad, afirmaba que esta disciplina es, en el fondo, "sentido común reducido a cálculos".

Actividad: la incertidumbre

Cada alumno buscará algunas frases en los periódicos que contengan palabras relacionadas con la incertidumbre. Luego, tendrá que reescribir cada frase de tal forma que a la incertidumbre le asigne un valor entre 0 y 1, según considere más adecuado, y de ello sacará una conclusión con respecto a la veracidad de la frase. Por ejemplo, 1 puede ser total certeza de que un evento sí va a pasar y 0, total certeza de que no ocurrirá. También es posible dar otros valores intermedios; por ejemplo, para algunos alumnos, 0.9 puede ser el valor de casi seguro de que pase, mientras que para otros, 0.95 puede significar que a lo mejor sucederá, etcétera.

Por último, se discutirá con los demás estudiantes cuáles son los valores numéricos entre 0 y 1 que corresponden a: muy seguro, seguro, casi seguro, posible, imposible, casi imposible, no es seguro, no es imposible.

Si algo es improbable, entonces, ¿es imposible?

3.1.2. Un poco de historia de la probabilidad

A veces, los científicos de áreas como la física, química o matemáticas, cuando se refieren a aspectos históricos, no son tan cuidadosos como sí lo son en sus temas de investigación. Así, en libros excelentes de ciencia, la historia se reduce a una fecha o a una anécdota; simplemente se usa para comenzar el texto, pero después no se regresa a ella. En particular, en probabilidad y estadística se ha tenido un gran avance en los conocimientos históricos en los últimos 40 años. Sin embargo, en los libros clásicos de probabilidad se sigue afirmando que el origen de la teoría de las probabilidades está en los juegos de azar; por ejemplo, esto se afirma en Lipschutz y Lipson (2001: iii), en Feller (1973: 21) o en Loève (1977: 1). Los autores señalan que la teoría nació cuando Le Chevalier (el Caballero) de Méré planteó un problema de división de apuestas a Pierre de Fermat y Blaise Pascal, pero esto no fue así.

En lo general, las ciencias no nacen por generación espontánea, sino que son el resultado de un proceso a lo largo del tiempo. Por ejemplo, no podemos precisar una fecha de nacimiento para la astronomía ni saber cuándo exactamente se separó de la astrología. Tampoco tenemos una fecha de cumpleaños para la biología.

Abordemos con más calma las inconsistencias de la leyenda mencionada. En primera, el problema de división de apuestas no lo inventó Le Chevalier de Méré, sino que venía de mucho tiempo atrás. Entre los que lo intentaron resolver estuvieron: Gerolamo Cardano, Niccolo Fontana alias Tartaglia, Giovanni Francesco Peverone, Gottfried Leibniz y Galileo Galilei. En segunda, el triángulo de Pascal que resuelve el problema no lo inventó Blaise Pascal, sino que, también, venía de mucho tiempo atrás. En esa época, en que no había computadoras y era importante poder calcular combinaciones, una tabla como la del triángulo de

Pascal resultaba muy útil; incluso, algunos escribían el arreglo en forma rectangular. Además, se sabe que en la India ya tenían conocimiento de esta tabla 200 años antes de Cristo.

Antes de continuar, conozcamos con detenimiento a los personajes de la leyenda. Le Chevalier de Méré, cuyo nombre real era Antoine Gombaud, era un caballero sin dinero y un matemático aficionado. Como muchas personas en la actualidad, siempre estaba tratando de hacer dinero por medio de los juegos de apuestas. Así, se le ocurrió lanzar un dado cuatro veces y apostar a que aparecía al menos un 6.

En respuesta, Pascal calculó que la probabilidad de que no aparezca un 6 en los cuatro lanzamientos es

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2};$$

ésta es la probabilidad del complemento. Entonces, la probabilidad de que sí apareciera al menos un 6 –la probabilidad de que de Méré ganara– era $> 1/2$.

Por cierto, en una ocasión se le ocurrió el siguiente juego: lanzar dos dados 24 veces y apostar a que aparecían dos 5 al menos una vez. Sin embargo, calculó mal las probabilidades de ganar en el juego, porque no eran $> 1/2$, sino $< 1/2$.

Blaise Pascal fue una persona con una amplia cultura, por lo que podía dedicarse a las matemáticas, física, filosofía y teología. En todas estas áreas hizo aportaciones. Además, era una persona de su tiempo, muy creyente, que todo lo relacionaba con la religión. En su autobiografía relata dos anécdotas. En una ocasión tenía un terrible dolor de cabeza y –como es lógico– se puso a pensar en un problema de matemáticas. Como es aún más lógico, así se le quitó el dolor de cabeza. Pascal interpretó que Dios le mandaba la señal de que se dedicara a las matemáticas y así lo hizo por un tiempo. En otra ocasión, en que iba distraído, sentado en el pescante de una carreta y pensando en un problema de matemáticas, se cayó. Pascal interpretó que Dios le mandaba la señal de que ya había sido suficiente, y que dejara de dedicarse a las matemáticas.

Otro personaje de esta historia es Pierre de Fermat, un abogado que en sus ratos de ocio se dedicaba a las matemáticas. Él intentó primero resolver el problema de la división de apuestas, pero al ver la solución de Pascal se convenció de que era la correcta.

Fermat es el autor de la conjetura más famosa en las matemáticas: la ecuación $x^n = y^n + z^n$ no tiene solución en los enteros para $n > 2$. En el margen de un libro de Diofanto que Fermat estaba estudiando, escribió que se le había ocurrido una demostración maravillosa, pero que no cabía en el margen de la página, y por esa razón no la escribió. Esa frase provocó que muchas personas trataran de resolver la conjetura, lo cual generó muchas matemáticas. Finalmente, en la década de 1990, Andrew Wiles demostró lo que ahora conocemos como el teorema de Fermat.

En aquella época, Fermat, de Méré y Pascal eran asiduos comensales del círculo de Roanez, un comerciante y mecenas alemán, quien siempre estaba rodeado de pintores, científicos y caballeros.

Lo que sí refleja la leyenda es que por esa época se empezó a considerar a la probabilidad como una ciencia. La pregunta es por qué surgió tan tardíamente si, por ejemplo, desde la antigua Grecia la geometría ya era considerada una ciencia. Si el origen de la teoría de las probabilidades está en los juegos de azar, ¿cómo se explica que no haya surgido en la antigüedad? Debido a que éstos tienen una larga historia, una posible respuesta es que, hasta que se dieron las condiciones para que surgiera la probabilidad, fue que ésta pudo emerger. Dichas condiciones son:

a) El desarrollo del álgebra

En probabilidad y en estadística es común usar largas expresiones algebraicas. Con métodos geométricos podemos sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades; incluso podemos obtener la raíz cuadrada de un número positivo. Sin embargo, no se llega muy lejos en el álgebra sólo con la geometría. Los griegos no tenían forma alguna de expresar la probabilidad de un evento *A* o la esperanza matemática de una variable aleatoria *X*, como sigue:

$$P(A)=\sum_{x_i\in A} f(x_i) \quad \text{y} \quad E[X]=\sum_{x_i} x_i f(x_i).$$

Si no tenían cómo expresarlos, mucho menos podían resolverlos.

b) El abandono del significado “mágico” de los fenómenos aleatorios

Si pensáramos que una gitana puede leer nuestro futuro con sólo revolver un manojo de cartas y extraer una de ellas, entonces no tiene sentido preguntarnos por la probabilidad de que saque al azar la figura de la muerte. Tendría que ser 1 o 0; es decir, sería un fenómeno determinista que dependería únicamente de a quién se le están echando las cartas por una módica suma. No obstante, este proceso no es igual en todos los casos; por ejemplo, Julio César tenía a su crupier disponible en todo momento para que le lanzara los dados, pues consideraba que era un simple juego de azar.

c) El desarrollo de la combinatoria

Toda ciencia generaliza con base en la experiencia acumulada. En el caso de la probabilidad, hay una gran cantidad de ejemplos particulares de combinatoria resueltos a lo largo de varios siglos. Estos problemas provenían, en su mayor parte, de los juegos de azar.

d) Los juegos de azar

Cuando los señores feudales fueron poco a poco desplazados de la dirección económica, se encontraron con una situación muy particular: tenían mucho dinero, mucho prestigio y, sobre todo, mucho tiempo libre. ¿Qué hicieron? Se dedicaron a jugar. Esto llevó al planteamiento de muchos problemas de combinatoria; algunos se fueron resolviendo.

Antes de que se pudieran fabricar adecuadamente los dados, como hoy los conocemos, se usaba un hueso que existe en varios mamíferos (incluidos los humanos), el astrágalo (figura 3-1). En ciertas especies, éste es lo suficientemente regular para ser usado como un dado rudimentario que sólo puede caer de 7 formas.

Figura 3-1. Astrágalos usados como dados primitivos.

e) El surgimiento de los seguros

La actividad económica siempre es un acicate para el desarrollo de la investigación. Cuando comenzaron las exploraciones alrededor del mundo y los viajes redondos de Europa a América, aparecieron las primeras compañías de seguros. Éstas tenían la necesidad de que dichos fenómenos se estudiaran más a fondo.

Cuando se dieron todas estas condiciones, surgió la probabilidad más o menos rápidamente, con figuras como Gerolamo Cardano, Blaise Pascal, Pierre Nicole, Antoine Arnauld, Gottfried Leibniz, entre otros. Finalmente, este proceso culminó con Jacob Bernoulli y su libro *Ars Conjectandi*, en el que aparece el primer teorema límite de probabilidad. De manera intuitiva, nos dice que el mejor estimador de la probabilidad de un evento es su frecuencia relativa. Bernoulli llama a su teorema la proposición dorada (el adjetivo es por su importancia). El más famoso y usado es el teorema central del límite.

Por su parte, Andréi Kolmogorov fue un gran matemático, quien logró axiomatizar a la probabilidad en el siglo XX (Kolmogorov, 1956). Éste era uno de los problemas abiertos y muy importantes que dejó David Hilbert para la investigación posterior, pues la mayor parte de la matemática se logró axiomatizar antes, a finales del siglo XIX. Además, entre los muchos logros de Kolmogorov están el teorema fundamental de la mecánica celeste, una parte del teorema central del límite, el teorema de consistencia, entre otros.

Para ahondar en esta información, se pueden consultar los libros de Borel (1974), Hacking (1975) y Maistrov (1974).

3.1.3. Fenómenos deterministas y aleatorios

Un fenómeno es determinista si al repetirse exactamente las condiciones en que sucedió, el resultado es el mismo y no otro, a diferencia de los fenómenos aleatorios, en que los resultados no son predecibles. La teoría de las probabilidades pretende representar esta impredictibilidad de forma numérica.

Ejemplos de fenómenos aleatorios son: el resultado en la lotería; cuando se lanza una moneda 10 veces y se cuenta el número de águilas que resultan; si se fabrican artículos en línea, se saca una muestra y se cuenta el número de artículos defectuosos; el tiempo de decaimiento de una partícula radioactiva; el tiempo que dura un foco de luz; las encuesta levantadas en México para medir (estimar) el número de personas que trabajan en el sector informal, etcétera.

La probabilidad interviene en muchos aspectos de la vida diaria mediante los fenómenos aleatorios, como el clima, la bolsa de valores, los diagnósticos médicos, el riesgo de ser asaltado, obtener un premio en la lotería, los temblores, la esperanza de vida, el ADN, entre otros.

¿Cómo es posible decir cosas no triviales de este tipo de fenómenos en los que de antemano no sabemos en cada ensayo cuál va a ser el resultado?

La respuesta es porque, en ciertas condiciones, se ha observado empíricamente una "tendencia central", que en la teoría de las probabilidades son los teoremas límites, como la proposición dorada de Bernoulli y el teorema central del límite. Los teoremas límites justifican muchas de las aplicaciones que se hacen de la estadística. Es decir, el hecho de que sean fenómenos aleatorios no significa que no tengan una estructura.

Actividad: lanzamiento de una moneda

Un estudiante lanza una moneda 100 veces. Otro alumno inventa los resultados de lanzar una moneda 100 veces. Los resultados de cada uno se ponen en una lista al lado de la otra. Los demás compañeros tratarán de adivinar cuál lista corresponde a los datos inventados.

El objetivo es calcular las frecuencias relativas (de los datos no inventados) de las 100 frecuencias relativas del número de veces que salieron águilas en los primeros n volados, para $n = 1, 2, 3, \ldots, 100$ datos. Es decir, calculamos las proporciones del número de veces que cayeron águilas en los primeros n volados divididos entre el número de volados n, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots, 100$. Estos datos se grafican. ¿Qué observamos en la tendencia de la gráfica?

3.1.4. El lenguaje de la probabilidad

En todas las ciencias, para hablar con precisión de los conceptos que se tratan, se desarrolla un lenguaje. Además, en probabilidad y estadística un punto muy importante a recordar es la relación entre el lenguaje de conjuntos y el lenguaje común.

En probabilidad, en lugar del conjunto universal hablamos del espacio muestral, o sea, el conjunto de todos los resultados posibles y que, por supuesto, tiene probabilidad 1. Lo denotaremos en estas notas con la letra griega Ω. Es muy común hablar del evento imposible en lugar del conjunto vacío, que denotamos con $\emptyset$; es decir, es un conjunto sin elementos y que tiene probabilidad 0. Cada resultado en particular se llama punto muestral. Éstos son $P(\Omega) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$.

En lugar de hablar de conjuntos y subconjuntos, hablamos de eventos, para enfatizar que pueden suceder o no y que esta incertidumbre va a ser medida por la probabilidad del evento con un número entre 0 y 1. Dado que se cumple que para cualquier evento A tenemos que $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, entonces, $0 \leq P(A) \leq 1$.

El complemento de un evento son todos los resultados posibles que no están en el evento. Si A es un evento, su complemento se denota como A^C. Si estamos pensando en que suceda un evento, el complemento corresponde a pensar que éste no suceda.

De manera intuitiva, si el evento A tiene probabilidad p, ¿cuál es la probabilidad q del complemento del evento A, es decir, A^C?

$$q = P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

Si el evento A está contenido en B, ¿cómo es la probabilidad de A con respecto a B? O sea, cuál es mayor. ¿Pueden llegar a ser iguales?

$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces, } P(A) \leq P(B).$$

Cuando tenemos eventos los podemos combinar. Si tenemos dos eventos A y B, podemos preguntarnos por la probabilidad de que suceda A o que suceda B; es decir, cuál es la probabilidad de la unión de dos eventos. También inquirimos cuál es la probabilidad de que sucedan ambos, esto es, la intersección de dos eventos.

Por ejemplo, pensemos en las elecciones democráticas. El espacio muestral será el formado por todos los partidos políticos:

$$\Omega = \{\text{PRI, PAN, PRD, PT, PVEM, MC, Morena}\}.$$

Podemos pensar en el evento de que gane el PRI o en el evento de que no gane el PRI; en el evento de que gane el PRI o el PAN; en el evento de que ganen el PRI y el PVEM, si es que van en alianza, etcétera.

¿Cómo calcular la probabilidad de la unión e intersección de dos eventos? En el mismo ejemplo, si es seguro que el PAN y el PRI no van en alianza, entonces la probabilidad de que gane el PAN o de que gane el PRI es la suma de sus respectivas probabilidades. Es decir, cuando dos eventos son mutuamente excluyentes (o gana el PAN o gana el PRI), entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades. También se dice en este caso que los dos eventos son ajenos entre sí o que no tienen elementos en común, esto es, que la intersección es vacía. En resumen, la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades, cuando son ajenos. En otros términos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

¿Qué pasa cuando no son mutuamente excluyentes? Pensemos en un dado perfectamente balanceado. Los resultados posibles, esto es, el espacio muestral, corresponden a:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Como es un dado balanceado, la probabilidad de que al lanzarlo aparezca cualquiera de las caras hacia arriba es $1/6$. Consideremos los eventos:

$$A = \text{cae un número} \leq 3$$
$$B = \text{cae un número par}$$

Entonces, $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Así,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\},\ P(A) = P(B) = \frac{1}{3} \text{ y } P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

Entonces, obtenemos que:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} \neq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = P(A) + P(B).$$

¿Por qué no se cumple que la probabilidad de la unión sea la suma?

Observemos que al sumar $P(A) + P(B) = P(\{1, 2, 3\}) + P(\{2, 4, 6\})$, estamos considerando dos veces al número 2. Entonces, para que se dé la igualdad, necesitamos quitarlo una vez: $P(A \cup B) = P(\{1, 2, 3\}) + P(\{2, 4, 6\}) - P(\{2\})$.

¿Qué es el 2 con respecto a los eventos A y B? Pedimos al lector que primero haga un diagrama de estos conjuntos y, después, un diagrama en general sin referirse específicamente a este ejemplo. ¿Cuál es la fórmula en general?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ahora surge la pregunta: ¿cómo calcular la probabilidad de la intersección? Pedimos al lector que trate de responder.

3.1.5. Independencia de eventos y probabilidad condicional

Pensemos en la probabilidad de que a una persona seleccionada al azar en México le guste ver los partidos de fútbol. Ahora pensemos en la probabilidad de que a una persona escogida al azar le guste ver los partidos de fútbol (evento B), si sabemos que se trata de una mujer (evento A). ¿Es la misma probabilidad? La respuesta es no.

Si queremos calcular esta última probabilidad debemos considerar que el espacio muestral se reduce a sólo las mujeres. Así, para calcular la probabilidad condicional de B dado A, puesto que ya sabemos que se cumple la condición de que se trata de mujeres, debemos calcular la probabilidad de la intersección de A y B. Entonces, la probabilidad condicional es proporcional a la probabilidad de $B \cap A$ y la constante de proporcionalidad es $1/P(A)$. Con esto estamos estandarizando. Así, la probabilidad condicional del evento B dado el evento A, que se denota con $P(B|A)$ y que se lee como la probabilidad condicional de B dado A, o simplemente la probabilidad de B dado A, se calcula como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Pedimos al lector que haga un diagrama en el que aparezcan Ω, A, B, y $A \cap B$.

Puede ser que la probabilidad de un evento B sea diferente cuando sabemos que estamos en presencia de un evento A, como en el párrafo anterior. Pero podría ser que esta probabilidad fuera la misma; es decir, la probabilidad del evento B no se ve afectada por la aparición del evento A. Por ejemplo, si el evento B es que a una persona le gusten las naranjas, en principio, ésta es la misma probabilidad para la población en general que sólo para las mujeres. Asimismo, el evento de que a alguien le guste la música tampoco se ve afectado por el evento de que se trate de mujeres. En este sentido, estamos en presencia de eventos independientes, como se cumple en este caso, que $P(B|A) = P(B)$. Así,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B).$$

Entonces, al despejar $P(B \cap A)$, obtenemos que $P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$.

De esta manera, observamos que en el caso de que dos eventos sean independientes, la probabilidad de la intersección es el producto de sus probabilidades y, entonces, obtenemos una forma de calcularla. Esto responde a la pregunta que nos habíamos planteado, pero sólo en el caso de que tengamos eventos independientes. Hay que recordar a partir de este punto que cuando A y B son independientes, entonces, $P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$.

Supongamos que lanzamos un dado perfectamente balanceado dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en el segundo dado salga un número par, dado que en el primero salió un número ≤ 3?

El espacio muestral es: $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 1), (6, 2), \ldots, (6, 6)\}$.

El primer dado puede ser cualquier número entre 1 y 6, y se puede combinar con cualquier número del segundo dado, que también está entre 1 y 6 (los puntos suspensivos denotan "y así sucesivamente").

Obtenemos que el espacio muestral tiene 36 resultados posibles. Si denominamos A al evento de que con el primer dado salga un número ≤ 3, y B es el evento de que con el segundo dado salga un número par, entonces,

$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), (3, 1), (3, 2), \ldots, (6, 6)\}$,
$B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), \ldots, (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}$ y
$A \cap B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 6)\}$.

Contando el número de elementos de cada conjunto, obtenemos que

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(B|A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},$$

y

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Así,

$$P(B) = P(B|A).$$

Estamos en presencia de eventos independientes. También lo podemos observar en su forma equivalente:

$$\frac{1}{4} = P(B \cap A) = P(B) \times P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

Actividad: acerca de los eventos ajenos e independientes

1. ¿El espacio muestral (Ω) es independiente de cualquier evento?
2. ¿El evento imposible (Ø) es independiente de cualquier evento?
3. ¿El espacio muestral y el evento imposible son independientes?
4. ¿El espacio muestral y el evento imposible son mutuamente excluyentes?
5. ¿Dos eventos ajenos (no vacíos) son independientes?

Llamémosle a estos eventos A y B; sabemos que $A \cap B = \varnothing$.

Entonces, obtenemos que $P(A \cap B) = 0$, $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$.

Así,

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B) > 0.$$

Por lo tanto, los eventos A y B no pueden ser independientes. Como son mutuamente excluyentes, si uno sucede, no puede suceder el otro y, por lo tanto, no pueden ser independientes entre sí. Si gana el PAN, seguro que no gana el PRI. Si dos eventos son ajenos, quiere decir que si sucede uno, entonces el otro tiene probabilidad 0 de suceder.

¿Dos eventos independientes (que no sean vacíos) son mutuamente excluyentes?

Llamémosle A y B a estos eventos. Sabemos, en este caso, que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ y que } 0 < P(A) \times P(B).$$

Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) > 0$. A y B no pueden ser eventos mutuamente excluyentes, ya que si fueran excluyentes, $P(A \cap B) = P\varnothing = 0$; esto contradice $P(A \cap B) > 0$.

Así que no pueden ser mutuamente excluyentes, pues la intersección no puede ser vacía. Dos eventos independientes, que no sean eventos imposibles, no pueden ser ajenos.

Supongamos que $P(A) = 0.4$, $P(B) = p$ y $P(A \cap B) = 0.6$; entonces, ¿para qué valor de p tenemos que los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ¿Para qué valor de p los eventos A y B resultan ser independientes?

Para contestar a la primera pregunta, necesitamos usar la fórmula para la probabilidad de la unión y el hecho de que los eventos son mutuamente excluyentes. Así, al sustituir en $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, vemos que $0.6 = 0.4 + p - 0$.

Si resolvemos para la incógnita p, obtenemos que $p = 0.2$.

Para contestar a la segunda pregunta, usamos la fórmula para la unión de eventos y el hecho de que son independientes. Así, al sustituir en la fórmula de la unión, obtenemos $P(A \cup B)$, $0.6 = 0.4 + p - 0.4p$.

Al resolver para la incógnita p, obtenemos que $p = {}^1/_3$.

Ahora el lector cambiará los valores de $P(A)$ y de $P(A \cup B)$ para resolver las mismas preguntas. ¿Entre qué números deben estar los valores escogidos? ¿Cómo debe de ser el valor de $P(A)$ con respecto al de $P(A \cup B)$?

3.1.6. Fórmula de Bayes

De un cierto grupo, 60% son mujeres. Además, 5% de los hombres y 10% de las mujeres fuman. Si seleccionamos al azar a una persona, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumadora?

Para contestar a esta pregunta, construyamos la tabla 3-1, en la que pasamos todo a decimales.

Tabla 3-1. Probabilidades

	M	H	Suma
$P(\frown)$	0.6	0.4	1.0
$P(F \mid \frown)$	0.1	0.05	—
$P(F \cap \frown)$	0.06	0.02	0.08

El símbolo $\frown$ representa a cualquiera de los eventos, M o H. La probabilidad de que una persona escogida al azar sea fumadora es 0.08; en términos de porcentaje, 8% fuma.

Para obtener la respuesta a la pregunta planteada, debemos considerar que la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea mujer es 0.6, y, si es mujer, la probabilidad de que fume es 0.1. Al multiplicar, obtenemos que la probabilidad de que una persona escogida al azar sea mujer y fume es 0.06, esto proviene de la fórmula $P(F \cap M) = P(M) \times P(F|M)$.

De manera similar, al multiplicar la probabilidad de que una persona escogida al azar sea hombre por la probabilidad condicional de que fume dado que es hombre, resulta la probabilidad de que sea hombre y fume: $0.4 \times 0.05 = 0.02$.

Finalmente, si sumamos la probabilidad de que sea mujer y fume más la probabilidad de que sea hombre y fume, obtenemos la probabilidad total de que una persona escogida al azar fume, ya sin importar si es hombre o mujer: $P(F) = 0.06 + 0.02 = 0.08$.

Notemos que *H* es el complemento de *M,* mientras *F* puede ser cualquier evento. Entonces, la fórmula completa de probabilidad es, para cualquier evento *B*:

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|A^C) \times P(B).$$

Ahora, pensemos en un estudio médico para detectar un cierto tipo de cáncer, el cual funciona en 90% de las personas sanas (*S*) y en 95% de las personas con esa enfermedad (*E*). Es decir, si una persona no tiene dicho cáncer, en 90% la prueba resulta negativa (−); si lo padece, en 95% la prueba resulta positiva (+). Además, tenemos que, en México, 99.5% de la población no tiene esa enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar resulte positiva en el estudio médico?

De nuevo, pasemos a decimales los datos y resolvamos al igual que en el caso anterior.

Tabla 3-2. Probabilidades condicionales.

	S	E	Suma
$P(\frown)$	0.995	0.005	1.0
$P(+ \mid \frown)$	0.10	0.95	—
$P(+ \cap \frown)$	0.0995	0.00475	0.10425

El símbolo $\frown$ representa a cualquiera de los eventos *S* o *E*. Entonces, la probabilidad de que una persona resulte positiva es 0.10425; en términos de porcentaje, 10.425% de quienes se hacen el estudio resultan positivas. Hay ya una sospecha de que puedan tener esa enfermedad, pero no todos los que resultan positivos en la prueba tienen dicho cáncer. Entonces surge la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que si la prueba resulta positiva realmente la persona tenga ese cáncer?

Recordemos la fórmula general de probabilidad total para cualquier evento *B,* así como la de la probabilidad condicional de *B* dado *A* y la de *B* dado A^C:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Como $P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|A^c) \times P(B)$ y $P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$, si sustituimos ambas obtenemos que:

$$P(B|A) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B|A) \times P(A) + P(B|A^c) \times P(A^c)}.$$

Similarmente,

$$P(B|A^c) = \frac{P(B|A^c) \times P(A^c)}{P(B|A) \times P(A) + P(B|A^c) \times P(A^c)}.$$

Éstas conforman la fórmula de Bayes. Pedimos al lector que ponga ambas en una sola fórmula.

Así, esta fórmula es la que se usa en la estadística bayesiana. Su ventaja es que nos permite incorporar información; por eso se usa en las computadoras para actualizar nuestras preferencias de los sitios a los que entramos. Asimismo, en los diagnósticos por computadora permite ir mejorando los diagnósticos iniciales para los pacientes. En los dos ejemplos que abordamos arriba, nos permite incorporar el dato de que una personas fuma, en el primer caso, y el hecho de que la prueba resultó positiva, en el segundo.

En el primer caso,

$$P(M|F) = \frac{P(F|M) \times P(M)}{P(F|M) \times P(M) + P(F|H) \times P(H)} = \frac{0.1 \times 0.6}{0.1 \times 0.6 + 0.05 \times 0.4}$$
$$= \frac{0.06}{0.08} = 0.75$$

$$P(H|F) = \frac{P(F|H) \times P(H)}{P(F|M) \times P(M) + P(F|H) \times P(H)} = \frac{0.05 \times 0.4}{0.1 \times 0.6 + 0.05 \times 0.4}$$
$$= \frac{0.02}{0.08} = 0.25$$

Antes de incorporar la información de que se trata de una persona que fuma, tenemos que la probabilidad de escoger a una mujer o a un hombre al azar es 0.6 y 0.4, respectivamente. Ya sabiendo que fuman, la probabilidad de que se trate de una mujer o un hombre es 0.75 y 0.25, respectivamente.

En el segundo caso,

$$P(S|+) = \frac{P(+|S) \times P(S)}{P(+|S) \times P(S) + P(+|E) \times P(E)} = \frac{0.1 \times 0.95}{0.1 \times 0.95 + 0.005 \times 0.95}$$
$$= \frac{0.095}{0.09975} = 0.95238$$

$$P(E|+) = \frac{P(+|E) \times P(E)}{P(+|S) \times P(S) + P(+|E) \times P(E)} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.1 \times 0.95 + 0.005 \times 0.95}$$
$$= \frac{0.00475}{0.09975} = 0.04761$$

Antes de que la persona se haga la prueba, la probabilidad de que tenga el cáncer es de sólo 0.005. Al hacerse la prueba y resultar positiva, esa probabilidad aumentó a 0.04761. ¿La prueba es mala? No. Al 90% de los sanos los detecta como sanos y al 95% de los enfermos los detecta como enfermos, pero ¿qué está pasando? El error debido a los falsos positivos es grande porque, en general, para cualquier enfermedad son muchos más los sanos que los enfermos. La conclusión es que en caso de que la prueba resulte positiva es urgente realizar una segunda prueba y comenzar a cuidarse.

3.1.7. Casos equiprobables y probabilidad clásica

En probabilidad, la forma de adquirir la intuición consiste en estudiar primero el caso cuando todos los puntos del espacio muestral tienen la misma probabilidad; por ejemplo, con una moneda legal o un dado bien balanceado. Históricamente, de esta manera la estadística se proveyó de casos particulares que se fueron resolviendo y respecto a los cuales la probabilidad pudo realizar generalizaciones. Hay que ser conscientes de que en muchos casos no se cumple el hecho de que los puntos muestrales tengan la misma probabilidad; por ejemplo, no es igual para el nacimiento de niño o niña, a pesar de que durante siglos se creyó que sí.

Cuando el espacio muestral tiene n puntos y éstos tienen la misma probabilidad, entonces

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\#\text{ elementos en } A}{\#\text{ elementos en } \Omega} = \frac{\#A}{n}\,.$$

El símbolo # significa la cardinalidad, esto es, el número de elementos. Así, $\#\varnothing = 0$ y $\#\Omega = n$. Esta probabilidad a veces es llamada probabilidad clásica, en el sentido de que fue la primera que surgió. También se dice que es un caso equiprobable.

Actividad: verificar las propiedades de la probabilidad clásica

Pedimos al lector verificar que la probabilidad clásica, definida como $^{(\#A)}/_{n}$, tiene las propiedades intuitivas que habíamos mencionado:

1. ¿$P(\varnothing) = 0$?
2. ¿$P(\Omega) = 1$?
3. ¿Si $A \cap B$, entonces $P(A) \mathbb{C} P(B)$?
4. ¿$0 \mathbb{C} P(A) \mathbb{C} 1$?
5. ¿Si dos eventos son mutuamente excluyentes, entonces se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

Si dos eventos no tienen elementos en común, el número de elementos en la unión es la suma de los elementos en cada conjunto. Así,

$$P(A \cup B) = \frac{\#\text{ elementos en } A \cup B}{\#\text{ elementos en } \Omega} = \frac{\#\text{ elementos en } A + \#\text{ elementos en } B}{n}$$

y

$$P(A \cup B) = \frac{\#\text{ elementos en } A}{n} + \frac{\#\text{ elementos en } B}{n} = P(A) + P(B).$$

3.1.8. Un poco de combinatoria

Para poder calcular algunas probabilidades en el caso equiprobable, nos ayuda el conocer algunas formas de contar el número de elementos. Si en un día podemos hacer una de tres actividades posibles y en el siguiente podemos hacer otra actividad de cuatro posibles, ¿de cuántas formas se pueden combinar las dos actividades?

Como cualquier actividad del primer día se puede combinar con cualquier actividad del segundo día, tenemos en total $3 \times 4 = 12$ combinaciones posibles de las actividades en los dos días. O sea, si un conjunto tiene 3 elementos y otro conjunto tiene 4 elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto de todas las parejas de actividades? La respuesta es 12.

Si tenemos un conjunto con n elementos y otro conjunto con m elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto de todas las parejas? Respuesta: $n \times m$. A esto se le llama el principio multiplicativo.

Por supuesto, lo podemos aplicar para tres conjuntos y preguntar acerca del número total de ternas; asimismo, lo aplicamos a más conjuntos. Si el conjunto A tiene 10 elementos, el conjunto B tiene 5 elementos y el conjunto C tiene 1 000 elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto de todas las ternas? Respuesta: $10 \times 5 \times 1\,000 = 50\,000$. De nuevo, usamos el principio multiplicativo.

Ahora supongamos que seleccionamos a dos personas de entre cinco candidatos posibles para ocupar dos puestos administrativos: la dirección y el coordinador general; en este caso, una persona sólo puede ocupar un puesto. ¿De cuántas formas puede hacerse la asignación de los dos puestos? La dirección la puede ocupar cualquiera de los 5 candidatos, y para el puesto de coordinador general quedan 4 personas. Así, obtenemos $5 \times 4 = 20$ combinaciones posibles.

En este caso, hay un orden, porque no es lo mismo el puesto de director que el de coordinador general, y no hay repetición, ya que una persona no puede ocupar los dos puestos. Por ello, hablamos de ordenaciones sin repetición. Si existe la posibilidad de que haya repetición, se trata de ordenaciones con repetición.

Supongamos que seleccionamos a tres personas para ocupar tres puestos administrativos: dirección, coordinador general y secretario general. De un total de ocho candidatos, ¿cuántos equipos distintos de trabajo pueden formarse? Siguiendo el razonamiento anterior, para el puesto de director tenemos a cualquiera de los 8 candidatos, para el puesto de coordinador general nos quedan 7, y para el puesto de secretario general, 6. Así, obtenemos $8 \times 7 \times 6 = 316$.

Pensemos en un conjunto con n puntos de tal forma que seleccionemos a dos elementos del conjunto con orden y sin repetición. De forma análoga al ejemplo anterior, podemos seleccionar al primer elemento de cualquiera de los n posibles, y al segundo, de cualquiera de los $n-1$, pues quitamos al primero que se escogió. ¿De cuántas formas puede hacerse la selección? La repuesta es $n\times(n-1)$. Si seleccionamos tres puntos con orden y sin repetición, obtenemos $n\times(n-1)\times(n-2)$. Si seleccionamos cuatro elementos de un total de n con orden y sin repetición, obtenemos $n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)$, y así sucesivamente.

Volvamos al tema de combinatoria. También puede pasar que la selección sea con repetición. Por ejemplo, en las quinielas de fútbol siempre tenemos *L, E, V,* que significan local, empate y visitante, respectivamente, y por supuesto que puede haber varios empates, varios locales y varios visitantes. En el caso que estamos viendo, si escogemos dos elementos, obtenemos $n\times n=n^2$. Si seleccionamos tres, obtenemos $n\times n\times n=n^3$. En general, si seleccionamos k elementos de n posibles con orden y repetición, obtenemos n^k. Por eso se llaman ordenaciones con repetición.

Problema: las quinelas de fútbol

Supongamos que se juegan 13 partidos de fútbol. En cada uno los resultados posibles son $L=$ gana el equipo local, $E=$ hay empate y $V=$ gana el visitante. Si vamos a escoger al azar los resultados de la quiniela, ¿cuál es la probabilidad de atinarle a la quiniela ganadora? Dado que elegiremos 13 elementos de 13 posibles con orden y repetición, tenemos como casos totales $3^{13}=1\,594\,323$ y sólo un caso favorable, entonces,

$$P(\text{atinarle a la quiniela ganadora})=\frac{1}{1\,594\,323}=6.272254744\times10^{-7}.$$

Para ampliar el ejercicio, pedimos al lector calcular la probabilidad de atinarle a la quiniela ganadora si son 10 partidos y, luego, si son 8.

Un caso particular de las ordenaciones es cuando ordenamos a todos los elementos, esto es, cuando de un conjunto de n elementos seleccionamos a todos, pero de tal forma que sí importa el orden en que los vamos escogiendo. ¿De cuántas formas se puede hacer? Para calcular el número de formas en que se puede escoger a n elementos de un total de n con orden y sin repetición tenemos $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times1$. Este número se llama el factorial de n y se denota con $n!$; así, $1!=1$, $2!=2\times1=2$, $3!=3\times2\times1=6$, $4!=4\times3\times2\times1=24$, $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$, etcétera. Este número crece muy rápido. Si buscamos el factorial de 20!, por ejemplo, con una calculadora, el valor que da como resultado es en notación científica. Es decir, el resultado se expresa en las calculadoras con algunos pocos dígitos (dependiendo de la calculadora) multiplicados por una potencia de 10; esto es, $20!=2.432902008\times10^{-18}$.

Problema: cumpleaños repetidos

¿Cuál es la probabilidad de que de entre 10, 20 y 30 personas no haya dos con el mismo cumpleaños?

Para $n = 10$, el número de casos totales implica escoger n números de un total de 365, con orden y repetición, debido a que los cumpleaños se pueden repetir y hay un orden que corresponde a las distintas personas: 1, 2, 3, ..., 10. Los casos favorables consisten en seleccionar 10 números de 365 con orden y sin repetición. Así,

P(que de 10 personas escogidas al azar no haya 2 con el mismo cumpleaños) =

$$= \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 356}{365^{10}} = \frac{3.706080039 \times 10^{25}}{4.196900224 \times 10^{25}} = 0.8830518223$$

Lo mismo aplica para $n = 20$:

P(que de 20 personas escogidas al azar no haya 2 con el mismo cumpleaños) =

$$= \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 346}{365^{20}} = \frac{1.036690753 \times 10^{51}}{1.761397149 \times 10^{51}} = 0.5885616163$$

Y para $n = 30$:

P(que de 30 personas escogidas al azar no haya 2 con el mismo cumpleaños) =

$$= \frac{365 \times 364 \times \ldots \times 336}{365^{30}} = \frac{2.171030184 \times 10^{76}}{7.392408091 \times 10^{76}} = 0.2936837573$$

Observemos que la probabilidad va decreciendo muy rápido, de 0.88 a 0.58 y luego a 0.29. Cuando llegamos a $n = 30$, la probabilidad de que no haya cumpleaños repetidos es < 0.3; o sea, de cada 10 grupos de 30 alumnos en 7 sí habrá cumpleaños repetidos. Sugerimos que entre los estudiantes pregunten por los cumpleaños para ver si hay repeticiones y calculen la probabilidad de que no haya cumpleaños repetidos para el número n de alumnos que hay. Asimismo, pedimos al lector que escriba la fórmula para una n arbitraria.

Ahora supongamos que están disponibles dos puestos de trabajo de la misma categoría y escogemos a dos candidatos de entre cinco posibles. ¿De cuántas formas puede hacerse la asignación de los dos puestos? Para el primer puesto podemos escoger a cualquiera de los cinco; para el segundo, a cualquiera de los cuatro que restan. Sin embargo, debemos tomar en cuenta que no hay un orden. Lo que importa es a quién escogimos y no el orden en que fueron seleccionados. Es decir, lo que le importa a los candidatos es tener o no el trabajo y nada más. Por lo tanto, si a Miguel lo escogimos primero y después a José da lo mismo que si escogimos primero a José y después a Miguel. Entonces, nos falta dividir entre dos $(5\times4)/2=10$. Si fueran 20 elementos posibles, obtendríamos $(20\times19)/2=190$. En general, si escogemos a dos elementos de un conjunto con n elementos sin orden y sin repetición, el número total de formas en que puede hacerse la selección es $(n\times(n-1))/2$.

Ahora supongamos que hay tres puestos de trabajo de la misma categoría y escogemos a tres candidatos de entre cinco posibles. Para el primer puesto podemos escoger a cualquiera de los cinco; para el segundo, a cualquiera de los cuatro que restan; finalmente, para el tercero escogemos a cualquiera de los que restan después de quitar a los primeros dos. O sea, $5\times4\times3$.

Pero debemos tomar en cuenta que no hay un orden, lo que importa es a quién escogimos y no el orden en que fueron seleccionados. Por lo tanto, si escogimos primero a Miguel, después a José y al final a Ana da lo mismo que si escogimos primero a Ana, después a Miguel y al final a José, o bien si escogimos primero a Miguel, después a Ana y al final a José. Luego, nos falta dividir entre el número de filas que podemos formar con tres personas,[2] o sea, entre $3!=3\times2\times1=6$. Así, obtenemos $(5\times4\times3)/6=10$. Si fueran 20 elementos posibles, obtendríamos $(20\times19\times18)/6=1140$. En general, si escogemos tres elementos de un conjunto con n elementos sin orden y sin repetición, el número total de formas en que puede hacerse es $(n\times(n-1)\times(n-2))/6$.

Para contar de cuántas formas podemos seleccionar elementos de un conjunto debemos tener en cuenta si la selección es con o sin repetición y si es con o sin orden.

Como otro ejemplo, todo mundo sabe que el dominó tiene 28 fichas. ¿Por qué resultan 28 fichas? Si el número de puntos en las fichas fuera de 0 a 50, ¿cuántas fichas resultarían?

2. Sean P1, P2 y P3 las personas 1, 2 y 3, respectivamente. Las filas que se pueden formar serían:

P1 P2 P3
P1 P3 P2
P3 P1 P2
P3 P2 P1
P2 P1 P3
P2 P3 P1

Problema: probabilidad un medio[3]

Se tienen a bolas azules y b bolas blancas en una urna. Al tomar al azar dos bolas, sin orden y sin reemplazo, la probabilidad de que sean de distinto color es de $1/2$. Entonces, a y b son números triangulares consecutivos.

Un número triangular es aquel que representa el número de puntos en un triángulo de puntos. En el triángulo tenemos 1 punto en la primer columna, luego dos puntos en la segunda columna, y así sucesivamente, hasta tener n puntos en la n-ésima columna. Al sumar todos los puntos obtenemos: $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$.

Un número triangular debe ser de esta forma para alguna n. Por ejemplo, 1, 3, 6, 10 y 15 son números triangulares. En 1796, el científico alemán Carl Friedrich Gauss descubrió que todo entero positivo puede representarse como la suma de un máximo de tres números triangulares (no necesariamente distintos).

3. Este problema fue sugerido por Alejandro Bravo Mojica, coautor del Bloque 1. Medida y número.

Si $a = b$, ¿se cumple que es $^1/_2$ la probabilidad de extraer dos bolas de distinto color sin orden y sin reemplazo? La respuesta es no. Pedimos al lector que lo verifique.

Volviendo al problema, supongamos que al extraer dos bolas, sin orden y sin reemplazo, la probabilidad de que sean de distinto color es $^1/_2$. Entonces, el número de casos favorables es ab y el número de casos posibles es $(a + b)(a + b - 1) / 2$, por lo que buscamos que a y b cumplan que

$$\frac{ab}{\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$4ab = (a + b)(a + b - 1) = a^2 + b^2 + 2ab - a - b$$

y entonces

$$a^2 + b^2 - 2ab - a - b = 0.$$

Si lo reescribimos en términos de una ecuación cuadrática para a, tenemos que

$$a^2 - (2b + 1)a + (b^2 - b) = 0,$$

por lo que

$$a = \frac{2b + 1 \pm \sqrt{(2b+1)^2 - 4\,(b^2 - b)}}{2}.$$

Como $(2b + 1)^2 - 4(b^2 - b) = 4b^2 + 4b + 1 - 4b^2 + b = 8b + 1$, obtenemos que

$$a = \frac{2b + 1 \pm \sqrt{8b + 1}}{2}.$$

Así, $8b + 1$ es un entero impar y que, además, tiene raíz; entonces su raíz también tiene que ser impar, o sea, es de la forma $8b + 1 = (2n + 1)^2$.

Al despejar de esta ecuación b en términos de n, obtenemos

$$8b + 1 = 4n^2 + 4n + 1$$

y

$$8b = 4n^2 + 4n,$$

de donde

$$b = \frac{n(n+1)}{2},$$

que es un número triangular.

Ahora regresamos a la fórmula para a y sustituimos la b que ya encontramos. Recordemos que

$$\sqrt{8b+1} = \sqrt{(2n+1)^2} = 2n+1.$$

En el primer caso, tomamos el signo +:

$$a = \frac{2\frac{n(n+1)}{2} + 1 + (2n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 1 + (2n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

Así,

$$a = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2},$$

que es el siguiente número triangular.

En el segundo caso, tomamos el signo −:

$$a = \frac{2\frac{n(n+1)}{2} + 1 - (2n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 1 - (2n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-2)}{2}.$$

Así,

$$a = \frac{n(n-2)}{2},$$

que es el anterior número triangular.

De forma natural surge la pregunta respecto a si se cumple el recíproco. Dados dos números triangulares consecutivos a y b, ¿en una urna con a bolas azules y b bolas blancas, la probabilidad de que al extraer dos bolas, sin orden y sin reemplazo, sean de distinto color es $1/2$? La respuesta es positiva.

Para ver esto, tenemos que demostrar que a y b satisfacen la ecuación

$$\frac{ab}{\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}} = \frac{1}{2}.$$

¿Por qué?

Debemos sustituir los valores de a y b.

Pedimos al lector que resuelva el mismo problema cuando la extracción se hace con orden y sin reemplazo.

Ahora, se puede resolver el caso de que se tengan *a* bolas azules y *b* bolas blancas en una urna y al tomar al azar dos bolas con orden y sin reemplazo la probabilidad de que ambas sean blancas es $^1/_2$. Pedimos la lector que compruebe que *a* y *b* deben ser números triangulares.

Por último, sugerimos continuar el desarrollo de los siguientes problemas llegando hasta plantear la cuadrática y la raíz cuadrada que se tendría que resolver:

1. Se tienen *a* bolas azules y *b* bolas blancas en una urna y al tomar al azar dos bolas sin orden y sin reemplazo la probabilidad de que ambas sean blancas es $^1/_2$.
2. Se tienen *a* bolas azules y *b* bolas blancas en una urna y al tomar al azar dos bolas sin orden y sin reemplazo la probabilidad de que ambas sean blancas es $^2/_3$.

3.1.9. El concepto de esperanza matemática

Supongamos que nuestro espacio muestral Ω está formado por los puntos 10 y 20, por lo que $\Omega = \{10, 20\}$; la probabilidad de seleccionar al punto 10 es $^1/_4$ y la probabilidad de seleccionar al punto 20 es de $^3/_4$ (probabilidad del complemento). Entonces, el valor promedio es:

$$10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{3}{4} = \frac{70}{4} = 17.5,$$

valor que se conoce como la esperanza matemática. Es simplemente un promedio, pero toma en cuenta lo que pesa cada valor. Es decir, considera la probabilidad de cada punto muestral.

En general, supongamos que nuestro espacio muestral Ω está formado por los números *a* y *b,* por lo que $\Omega = \{a, b\}$; la probabilidad de seleccionar al número *a* es *p* y la probabilidad de seleccionar al número *b* es $1 - p$ (probabilidad del complemento). Entonces, el valor promedio es:

$$E = a \times b + b \times (1 - p).$$

Este valor se conoce como la esperanza matemática. Es simplemente un promedio de los valores *a* y *b,* pero toma en cuenta lo que pesa cada valor *p* y $1 - p$, respectivamente. O sea, considera la probabilidad de cada punto muestral.

Supongamos que tenemos un juego en el que podemos perder \$1 con probabilidad $^{990}/_{1\,000}$, puede ser que no perdamos nada con probabilidad $^{9}/_{1\,000}$ y podemos ganar \$100 con probabilidad $^{1}/_{1\,000}$. ¿Cuál es nuestra ganancia esperada? En este caso, $\Omega = \{-1, 0, 100\}$ y sus probabilidades respectivas son $^{990}/_{1\,000}$, $^{9}/_{1\,000}$ y $^{1}/_{1\,000}$. Entonces, la ganancia esperada es:

$$(-1)\times\frac{990}{1\,000}+0\times\frac{9}{1\,000}+100\times\frac{1}{1\,000}=-\frac{989}{1\,000}=-0.989,$$

por lo que la ganancia esperada es negativa. Es decir que si jugamos este juego muchas veces, en promedio en cada juego vamos a perder \$0.989. En los centros de juego como los casinos siempre es así. La ganancia esperada para el jugador es negativa, pero para el casino es positiva, por lo que le conviene que sigamos jugando para que perdamos más y más.

Si Ω es un subconjunto de números reales y tiene n puntos, entonces, para calcular su esperanza matemática debemos calcular la suma de todos sus valores multiplicados por sus probabilidades respectivas. Esto es, promediamos los valores tomando en cuenta sus pesos.

En nuestra vida diaria todo el tiempo estamos hablando de valores esperados y promedios: la esperanza de vida, el número promedio de hijos por familia, la ganancia esperada en proyectos de inversión, el número esperado de días para terminar un proyecto de ingeniería, etcétera.

Una vez que calculamos, el valor esperado ya es un número fijo, como en el primer ejemplo, en el que resultó 17.5, o en el segundo, en el que resultó −0.989. Por lo tanto, es un error que cometen muy seguido los noticieros de la televisión decir que la esperanza de vida de los mexicanos es de aproximadamente 69 años.

Problema: división de la apuesta

Veamos un caso particular en el que dos personas compiten en un juego hasta completar un cierto número de puntos. Cada una tiene la misma probabilidad de obtener un punto. Quien llegue primero a obtener los puntos gana y se lleva la apuesta. Pero supongamos que, por alguna razón, el juego tiene que interrumpirse antes de que algún jugador complete los puntos. ¿Cómo deberá dividirse la apuesta?

Por ejemplo, supongamos que dos personas, Pérez y Benítez, juegan a que la que llegue primero a ganar tres volados se queda con los \$64 que apostaron. Pero cuando Pérez lleva 2 puntos y Benítez lleva 1 punto, el juego se interrumpe. ¿Cómo deben dividirse la apuesta?

¿Sería justo repartir la apuesta a la mitad? ¿Por qué?

¿La división debe ser proporcional a los juegos ganados? Ésta era la solución que proponía Le Chevalier de Méré. ¿Por qué?

Pensemos en qué pasaría si en lugar de jugar a ganar 3 juegos se jugara a ganar 5, y el juego se interrumpiera cuando llevan 4 y 3 juegos ganados, respectivamente. O bien si apostaran a ganar 6 juegos y se interrumpiera cuando llevaran ganados 4 y 5, respectivamente.

¿Es válido el siguiente razonamiento? A lo más, en otras dos tiradas se terminaría el juego. Supongamos que se juegan esos 2 puntos y señalemos con a cuando el punto lo gana Pérez y con b cuando lo gana Benítez.

Todos los posibles resultados del juego son: *aa, ab, ba, bb*. De éstos, en 3 casos gana Pérez y sólo en 1 caso gana Benítez, por lo que la fracción de la apuesta que se debe llevar Pérez es 3/4; es decir, \$48 para Pérez y \$16 para Benítez.

1. Resolver el problema de la división de la apuesta cuando Pérez y Benítez juegan a llegar a 7 puntos con una apuesta de \$64, pero el juego se interrumpe cuando Pérez lleva 6 puntos y Benítez, 5.
2. Resolver el problema de división de apuestas cuando juegan a llegar a 4 puntos con una apuesta de \$64 y el juego se interrumpe cuando Pérez lleva 3 puntos y Benítez, 1.

Actividad: el juego del disparejo

Se arrojan dos monedas y si salen disparejas gana el jugador *A,* si salen iguales, gana el jugador *B*. Si el jugador *A* apuesta \$100 y el jugador *B* apuesta *X* pesos, ¿cuáles son los resultados posibles?

Pedimos al lector hacer un diagrama de árbol para ver todos los resultados posibles. ¿Cuál es la fórmula (en términos de la variable *X*) de la ganancia esperada para el jugador *A*? ¿Cuál es la fórmula (en términos de la variable *X*) de la ganancia esperada para el jugador *B*? ¿Cuánto debe apostar el jugador *B* para que el juego sea parejo, en términos de que la ganancia esperada para los dos sea la misma?

Ahora se arrojan 3 monedas y si salen disparejas gana el jugador *A,* si salen iguales gana el jugador *B*. Si el jugador *A* apuesta \$100 y el jugador *B* apuesta *X* pesos. ¿Cuáles son los resultados posibles?

Pedimos al lector hacer un diagrama de árbol para ver todos los resultados posibles. ¿Cuál es la fórmula (en términos de la variable *X*) de la ganancia esperada para el jugador *A*? ¿Cuál es la fórmula (en términos de la variable *X*) de la ganancia esperada para el jugador *B*? ¿Cuánto debe apostar el jugador *B* para que el juego sea parejo?

Sugerimos hacer lo mismo con 4 y 5 monedas. ¿Cuál es la fórmula en general con *n* monedas de lo que debe apostar el jugador *B* para que el juego sea parejo?

Para saber más: historia de lo aleatorio en la ciencia[4]

Normalmente se identifica lo aleatorio con el ruido, y el ruido se piensa como algo que implícitamente es malo, que debe ser removido. No obstante, el azar como objeto de estudio tiene su origen en una pregunta fundamental: existen o no los átomos.

En 1827, Robert Brown estudió el movimiento errático de las partículas de polen en el agua; sus trayectorias eran al azar sin un patrón aparente. Más adelante, Albert Einstein utilizó este fenómeno para mostrar que existían los átomos, que colisionaban para crear este movimiento errático de las partículas de polen. Einstein finalmente resolvió el debate al transformarlo en algo que podía ser verificado, medido, con objetos visibles. Los átomos, hasta muy recientemente, no podían ser vistos, pero a pesar de ello siempre se había podido hacer muchas cosas prácticas y teóricas sin éstos; entonces, ¿para qué se necesitaban? Es más, ¿realmente existían? La mayoría pensaba que no.

Históricamente hablando, los átomos comenzaron sin tener estructura alguna, hasta llegar a ser considerados como objetos increíblemente estructurados, con una belleza y profundidad que nadie pudo haber imaginado. Ciertamente, tampoco nadie llegó a suponer que estos átomos se pueden combinar para formar moléculas cuyas propiedades son tan drásticamente distintas de los originales; que podemos combinar gases para formar agua, o bien venenos para formar sales, y que parece no haber fin para la variedad de moléculas existentes.

En 1738, Daniel Bernoulli tenía una razón científica para inventar a los átomos y comenzó a explicar cosas con ellos. Robert Boyle había mostrado que el aire ejerce una presión, la cual está en proporción inversa al volumen del gas. Entonces, surgió la pregunta ¿cómo es que el aire ejerce una presión? Isaac Newton desarrolló una teoría de la repulsión y la combinó con la idea prevaleciente de que el calor es un fluido. Así, Bernoulli vio claramente que si el gas se compone de pequeñas esferas, entonces, la presión es la fuerza con la que las pequeñas esferas golpean a los lados.

La invención del microscopio llevó a descubrir un mundo muy grande y variado en una sola gota. Al observar una partícula de polen en un líquido y calentarlo, se descubrió el movimiento muy errático de dichas partículas. Robert Brown no fue quien descubrió el movimiento browniano, pero sí lo estudió seria, exhaustiva y apasionadamente. Él usó muchas partículas de polen muertas para asegurarse de que el movimiento no se debía a que tuvieran vida; de alguna forma, también usó partículas de polen con más de 100 años de antigüedad, y además consiguió metales y todo lo que se le ocurrió. El movimiento errático persistía, así que era una propiedad del fluido y no de la partícula. Su famoso artículo lo escribió en 1828.

Por otra parte, Antoine Lavoisier, un abogado que se volvió científico, exploró el papel que desempeña el oxígeno en la combustión y también rompió con la idea de que el agua es indivisible, como se creía en antigüedad, cuando se consideraba que era uno de los elementos; fue entonces que Lavoisier la descompuso

4. Véase Cohen (2004).

(pues recordemos que está compuesta de hidrógeno y oxígeno). Pero otro de sus máximos logros fue entender que cuando los elementos reaccionan para formar nuevos compuestos, lo hacen en proporciones dadas de sus masas. Entonces, ¿por qué siempre reaccionan de la misma forma? Esto llevó a John Dalton a proponer el modelo de los átomos, porque si existieran y si reaccionaran para formar nuevas sustancias que son combinaciones fijas de los átomos, entonces los objetos, por fuerza, tendrían que reaccionar en proporciones fijas.

Amedeo Avogadro, en 1811, argumentó que todo se vuelve transparente si asumimos que en un volumen fijo el número de pequeñas esferas es el mismo para todas las sustancias, sin importar de cuál se trata. Éste es el nacimiento del número de Avogadro, que no fue tomado seriamente, por lo que su autor murió sin el reconocimiento que merecía. El número permaneció olvidado por muchos años, hasta que Albert Einstein y Jean Perrin lo retomaron con gran seriedad y entusiasmo.

Alrededor de 1850, Rudolf Clausius retomó el trabajo de Bernoulli y propuso la idea de que la temperatura es la energía cinética de cada átomo. Fue así que ya se tenía un entendimiento en términos microscópicos de lo que la temperatura realmente es. En ese tiempo se comenzaron a medir las velocidades de las moléculas de los gases. Por sorpresa, éstas eran espectacularmente rápidas. Surgió la pregunta: si se mueven tan rápidamente, entonces ¿por qué no percibimos los olores de forma instantánea? Todo mundo se da cuenta de que si estamos en un cuarto contiguo a otro donde alguien comienza a cocinar algunos antojitos, toma un poco de tiempo para que podamos percibir los sabrosos olores. Clausius contestó que es porque las moléculas chocan entre sí y se preguntó por el tiempo promedio antes de que lo hagan.

Clausius suponía que, a una temperatura dada, todas las pequeñas esferas se mueven a la misma velocidad. No obstante, James Clerk Maxwell, joven pero ya famoso, argumentó y mostró que la hipótesis de que todas las esferas se mueven a la misma velocidad es insostenible. Las moléculas se mueven con velocidades que van desde cero hasta infinito, y estas velocidades tienen una distribución normal.[6] Ludwig Boltzmann se preguntó por qué se sigue esta distribución y, aún más, qué pasa si aplicamos fuerzas externas e internas y por qué si se comienza con una distribución arbitraria de velocidades se evoluciona hacia esas distribuciones. Pedimos al lector que imagine a estos átomos moviéndose erráticamente en todo tipo de trayectorias y en una gran variedad de velocidades, ¿cómo es posible que de cualquier forma se evolucione hacia esas distribuciones normales de velocidades? Boltzmann fue el primero en entender los procesos estocásticos.

Para aquel tiempo, la termodinámica se volvía una ciencia fundamental, con leyes tan generales y poderosas que nadie hoy puede dudar de su absoluta validez, puesto que permean hacia todos los campos y fueron el fundamento de la Revolución Industrial. Sin embargo, había algo que la termodinámica dejaba fuera. Las cosas algunas veces regresan a como estaban, pero casi siempre no lo hacen. ¿Por qué? Clausius propuso que la entropía nunca decrece en un sistema cerrado. Podemos pensarlo como que las cosas siempre tienden a descompo-

6. Para conocer la gráfica de una distribución normal, véase cualquier libro de estadística o probabilidad.

nerse a menos que hagamos un gasto de energía. O en términos de información, ésta va perdiendo su valor conforme pasa el tiempo. Así que la entropía es una medida de la irreversibilidad. Boltzmann propuso una fórmula para medir la entropía en términos estadísticos usando el logaritmo. El debate se enfocó en si realmente la entropía siempre decrece.

Todo mundo le entró al debate: científicos, filósofos, escritores. Era una pregunta fundamental y la mayoría estaba en contra. Entre los principales antiatomistas estaban Wilhelm Ostwald y Ernst Mach. Algunas de las frases que se llegaron a decir en ese tiempo fueron:

- “Yo no creo que los átomos existan”, “los átomos [...] contradicen absolutamente todos los atributos observados hasta la fecha en los cuerpos”, Ernst Mach.
- “Si yo fuera el gran juez, prohibiría la palabra *átomo* de la ciencia”, Alexandre Dumas.
- “Nunca conseguiremos gente para la que el tiempo es dinero que tome mucho interés en los átomos”, Samuel Butler.
- “Yo no acepto la ley de Avogadro, ni lo átomos ni las moléculas”, Marcellin Berthelot.
- “El atomismo es una doctrina que ha fallado miserablemente”, Wilhelm Ostwald.

Por su parte, Gastón Bachelard hace notar que la mayoría de los libros de texto de la época mencionaba la hipótesis acerca de la existencia de los átomos muy marginalmente, en los pies de páginas del capítulo correspondiente a las leyes químicas, o bien la mandaban a un apéndice.

No obstante, el movimiento browniano incluso interviene en los modelos financieros que se usan todos los días. El movimiento aleatorio de las partículas de polen sigue un comportamiento conocido como movimiento browniano, el cual también se presenta en el precio de las acciones en una casa de bolsa. La razón es que las series económicas se describen mejor mediante los procesos estocásticos. Varios de los premios Nobel de Economía han tenido que ver con estas áreas; quien inició esto fue Louis Bachelier, alumno de Henri Poincaré, con su tesis de doctorado titulada *Teoría de la especulación*, que escribió en 1900.

Igualmente, Einstein le entró a este problema y se dio cuenta de que si los átomos existen, entonces, las pequeñas partículas sumergidas en un líquido se deben comportar de una forma que tendría ser descrita, y esto lo hizo mediante ecuaciones que desarrolló. De confirmarse esto, quería decir que los átomos existen. Es decir, Einstein transformó el problema en algo práctico que ya podía ser observado y medido. Además, proveyó de una forma para calcular el número de Avogadro con el uso de las fluctuaciones, distribuciones de probabilidad y el ruido. Posteriormente, se dio cuenta de que era por el movimiento browniano. El resultado fue que todo mundo tuvo que aceptar la existencia de los átomos.

De esta manera, llegamos a la mecánica cuántica, que reconoce a escala microscópica que todas las partículas se describen mediante distribuciones de probabilidad. El gran éxito de esta teoría lo podemos constatar en todos los aparatos que usen microcircuitos. Sin el azar, nuestra vida sería más aburrida, pues prácticamente nos regresaríamos al siglo XIX.

3.2. Estadística descriptiva[7]

7. Para profundizar en el material de esta sección, recomendamos revisar, de la bibliografía, Batanero y Godino (2001), Domínguez (2006), Gonick y cols. (2000), Kazmier y Díaz (1993), Mendenhall y Reinmuth (1981) y Pérez (1992).

En esta sección abordamos el material de estudio de estadística para el nivel secundaria acerca de los primeros conceptos de esta disciplina: frecuencias absolutas y relativas, tablas de frecuencias absolutas y relativas; la representación gráfica más adecuada dado cierto tipo de datos, por ejemplo, diagramas de pastel, diagramas de barras, gráficas de líneas, diagramas de cajas, y su discusión; también, las medidas de tendencia central, como la media, la moda y la mediana; las medidas de dispersión, así como los cuartiles.

3.2.1. Introducción a la estadística

La estadística es muy importante en nuestra vida diaria, ya que sirve para recolectar, organizar y analizar todo tipo de datos. En la actualidad, en México se aplica la estadística, por ejemplo, para hacer modelos econométricos en el Banco de México, para llevar el control de calidad en la industria, para los conteos rápidos de las elecciones que organiza el INE, en los censos de población que levanta el Inegi, o bien en los pronósticos deportivos. En los periódicos, la sección de economía básicamente se constituye con estadística e interpretación de datos. Sobre todo las compañías internacionales con las que compiten las empresas mexicanas hacen uso extensivo de la estadística y otras técnicas que son llamadas tecnologías blandas (por oposición a las tecnologías duras, las máquinas). Por todo lo anterior, es importante aprender acerca de estos temas y resulta inaplazable que la sociedad mexicana, y en particular nuestras industrias, hagan uso extensivo de las tecnologías blandas. Siempre que queramos hacer una evaluación práctica y seria, requeriremos de la estadística.

3.2.2. Un poco de historia de la estadística

Cada que un pueblo sojuzga a otro, se hace un recuento de los recursos para después cobrar impuestos. En otras palabras, se hacen estadísticas y, a partir de éstas, se hacen inferencias estadísticas. Con los datos recabados, en la antigüedad se hacían inferencias, pero sin una base formal, sólo conforme a la experiencia. El surgimiento de la probabilidad le dio un fundamento a estas inferencias y a partir de entonces podemos ver que la probabilidad es la parte aplicada y la estadística corresponde a la parte teórica.

John Graunt observó en las tablas de mortalidad y natalidad que se hacían en Inglaterra algo que resultó sorprendente. La probabilidad de nacimiento entre niño y niña no es la misma, como siempre, durante milenios, se había creído. Esto tuvo un gran impacto filosófico, pues se empezó a considerar a la probabilidad como algo a ser medido, y no algo a ser calculado por medio de razonamientos. Cuando hablamos de calcular puede ser, por ejemplo, algo como casos favorables entre casos totales; si hablamos de una cosa a ser medida puede referirse a algo como medir la probabilidad de que una persona escogida al azar muera en un accidente de tránsito.

Cuando se hicieron los primeros censos en el Nuevo Mundo, en la Nueva España se suscitó una discusión muy profunda entre el virrey Juan Vicente de Güemes, segundo conde de Revillagigedo, y el padre José Antonio Alzate y Ramírez. Uno defendía el censo de población y el otro argumentaba que no podía estar bien hecho, pues resultaba incongruente al comparar los datos de la Ciudad de México con los datos de Madrid. Sus comparaciones fueron de alimentos consumidos, extensión de las ciudades, números de curas, entre otros. Finalmente, el censo de México no se difundió, aunque el de Perú, el de República Dominicana y otros sí.

Una buena parte de la estadística clásica tiene su origen en el trabajo realizado por Francis Galton, Karl Pearson y sus alumnos o colaboradores: Ronald Fisher, William Sealy Gosset (con el seudónimo de Student), entre otros. Ellos plantearon problemas muy concretos que en la actualidad podrían pertenecer a la ingeniería de alimentos; por ejemplo, buscaron medir la mejor combinación de factores de la tierra para obtener la mejor producción de cebada, con el fin de producir la cerveza, o bien medir los cambios entre los huesos de las patas de dos generaciones de bovinos, es decir, hacer una correlación, para tener al mejor ganado.

En su desarrollo histórico, la estadística siempre ha tenido un carácter aplicado. Dichas aplicaciones llevaron a desarrollar la estadística, lo cual continúa hasta la actualidad.

Para saber más acerca de estos temas, recomendamos consultar Maistrov (1974) y Pearson (1948).

3.2.3. Primeros conceptos de la estadística

Una población es el conjunto de todos los individuos o las cosas de los cuales nos interesa saber algo. Cuando las poblaciones son pequeñas, es posible estudiarlas completas; a esto se le llama censo. Por ejemplo, si deseamos conocer algunas de las características de los 500 alumnos de una escuela, podemos entrevistarlos a todos y preguntarles lo que sea.

Pero cuando las poblaciones son muy grandes, resulta muy caro y complicado hacer un censo. Es por esto que en México se realiza el Censo de Población y Vivienda cada 10 años; el último se realizó en 2010.

"La información captada sirve para saber cuántos somos y dónde vivimos, así como la edad, sexo, escolaridad y lugar de nacimiento de la población, entre otros datos. Asimismo, para conocer algunas características de las viviendas, como el material con el que están construidas y los servicios que disponen."

Por lo general, lo que se utiliza para conocer las características de las poblaciones grandes es una muestra, la cual es un subconjunto de la población. Ésta tiene que ser aleatoria, es decir, los individuos deben ser elegidos al azar, y representativa, esto es, todos deben estar representados (y, por lo tanto, todos deben de poder, en principio, ser elegidos), según las características a estudiar.

Veamos un ejemplo. El equipo de voleibol mixto de San Juan de los Números tiene en total 15 jugadores. Queremos saber cuántos hombres y cuántas mujeres hay, así como cuántos uniformes de cada talla se van a hacer. Con este fin, a cada participante le preguntamos su edad, género, talla y estatura.

Tabla 3-3. Datos de los integrantes del equipo de voleibol mixto.

Nombre	Género	Edad (años cumplidos)	Talla	Estatura (m)
Estela Muñoz	Femenino	14	Mediana	1.57
Carlos Garza	Masculino	15	Grande	1.81
María González	Femenino	14	Chica	1.51
Jaime Jaimez	Masculino	15	Chica	1.55
Juana García	Femenino	14	Grande	1.73
José Espinoza	Masculino	15	Grande	1.71
Blanca Hernández	Femenino	13	Chica	1.53
Concepción Delgado	Femenino	13	Mediana	1.59
Josefina Sandoval	Femenino	15	Mediana	1.61
Isidora Sánchez	Femenino	13	Chica	1.49
Pablo Pérez	Masculino	14	Grande	1.70
Laura Martínez	Femenino	14	Mediana	1.64
María Pérez	Femenino	13	Grande	1.67
Jaime Gómez	Masculino	15	Chica	1.52
Pedro González	Masculino	15	Chica	1.50

Como vemos en la tabla 3-3, hay diferentes tipos de datos. Género y talla se definen por categorías: en el caso de género, las categorías son masculino y femenino; mientras que en talla, son chica, mediana y grande. Este tipo de datos se llaman categóricos o cualitativos, ya que se refieren a categorías o cualidades. En cambio, edad y estatura tienen valores numéricos, razón por la cual se les conoce como datos cuantitativos. Dependiendo del tipo de datos es el tipo de análisis que se puede hacer.

En estadística, cada característica que se va a estudiar es una variable; en este sentido, género, edad, talla y estatura son variables. Si observamos la tabla 3-3, ¿todos los datos son del mismo tipo? ¿Existe alguna diferencia entre ellos? ¿Habrá variables que son del mismo tipo?

En efecto, género y talla son del mismo tipo, pues las respuestas de ambas características son palabras o, mejor dicho, categorías. En el caso de género, las categorías son masculino y femenino; mientras que en talla son chica, mediana y grande. Como se mencionó, este tipo de datos son categóricos o cualitativos.

En tanto, las otras dos variables, edad y estatura, parecen ser del mismo tipo, ya que sus valores son numéricos. A este tipo de datos se les conoce como cuantitativos.

Dependiendo del tipo de datos es el tipo de análisis que se puede hacer.

3.2.4. Frecuencias absolutas y frecuencias relativas, datos cualitativos

El problema inicial en el ejemplo anterior era saber cuántos uniformes de cada talla se van a hacer y cuántos hombres y mujeres hay; sin embargo, con la tabla 3-3 aún no tenemos la respuesta. Como podemos observar, los datos sin estructura no son muy útiles; por ello, necesitamos encontrar una manera de organizarlos.

Comenzaremos por trabajar con los datos cualitativos.

Lo primero que deseamos saber es cuántos hombres y cuántas mujeres hay. ¿Cómo podríamos organizar esta información?

Lo más adecuado es construir tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas. La frecuencia absoluta (o simplemente frecuencia) es el número de individuos en cada categoría; la frecuencia relativa se obtiene de dividir la frecuencia absoluta entre el total de individuos.

Las tablas 3-4 y 3-5 son de frecuencias absolutas de género y talla, respectivamente.

También podemos utilizar la frecuencia relativa, que es la frecuencia absoluta entre el total de individuos (véanse las tablas 3-6 y 3-7).

Tabla 3-4. Frecuencias de los géneros.

Género	Frecuencia absoluta
Femenino	9
Masculino	6
Total	**15**

Tabla 3-5. Frecuencias de las tallas.

Talla	Frecuencia absoluta
Chica	6
Mediana	4
Grande	5
Total	**15**

Tabla 3-6. Frecuencia relativa de género.

Género	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Femenino	9	9/15 = 0.6
Masculino	6	6/15 = 0.4
Total	**15**	**15/15 = 1**

Tabla 3-7. Frecuencia relativa de talla.

Talla	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Chica	6	6/15 = 0.4
Mediana	4	4/15 = 0.267
Grande	5	5/15 = 0.333
Total	**15**	**15/15 = 1**

Como se vio con este ejemplo, los datos sin estructura no son muy útiles; por ello, requerimos encontrar una manera de organizarlos, para extraer la información necesaria, posteriormente analizarla y, así, obtener nuevo conocimiento del tema de interés.

Para saber más: la visión y las gráficas

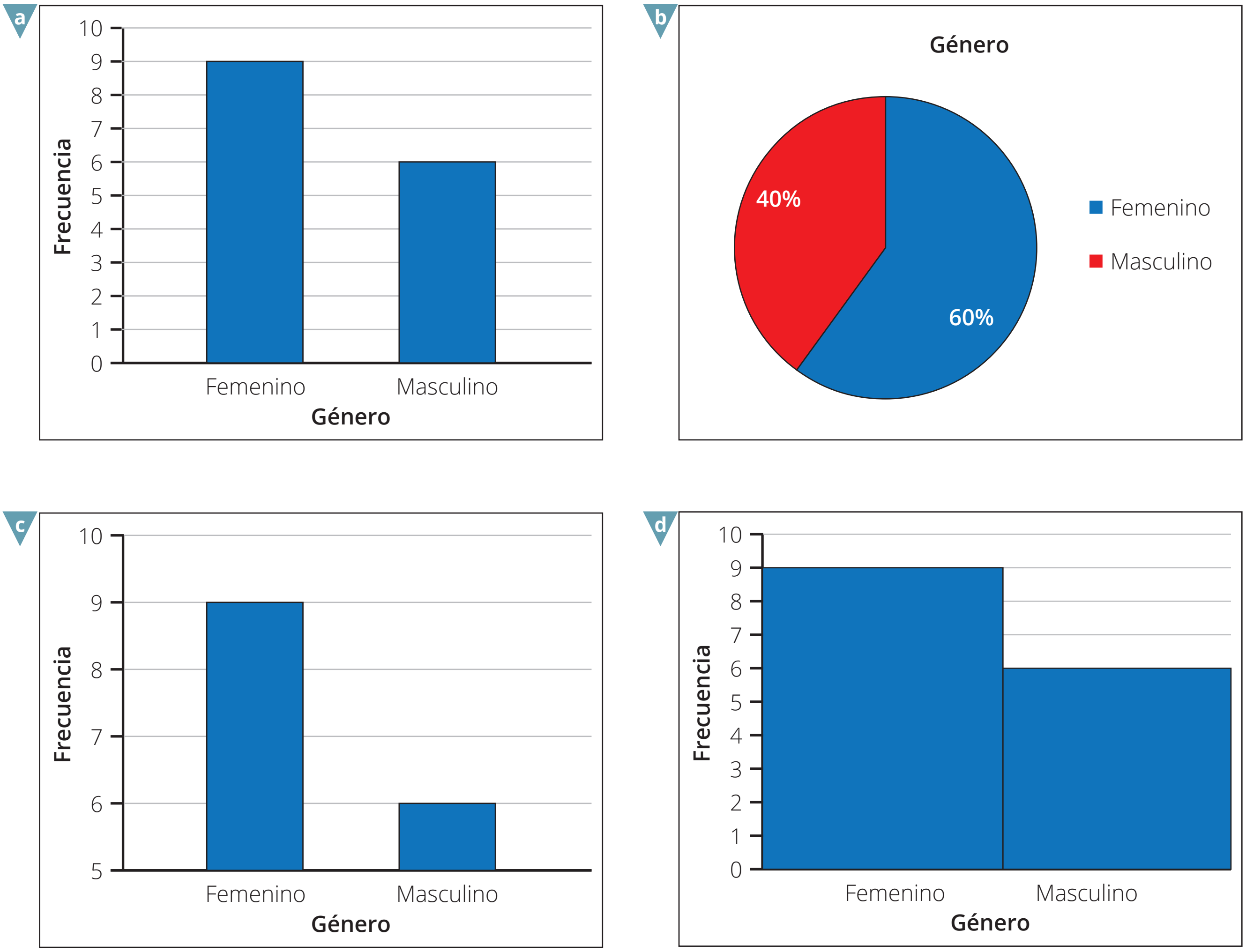
La visión es una componente muy importante del cerebro, aproximadamente 50% de este órgano está dedicado (directa o indirectamente) a las funciones visuales. Por tal motivo, observar la información mediante las gráficas puede ser de gran ayuda para comprender un fenómeno complejo. Podemos constatar que a lo largo de la historia el ser humano ha tratado de utilizar gráficos para representar bases de datos complejos. En 1350 el filósofo francés Nicole Oresme creó una de las primeras gráficas para explicar cómo medir un objeto en movimiento. En 1786 el ingeniero escocés William Playfair fue uno de los primeros en utilizar gráficas lineales, gráficas circulares y gráficas de barras. En 1857 la enfermera Florence Nightingale ilustró en una gráfica el número de muertes de los soldados y sus causas; esto convenció a la reina Victoria para mejorar las condiciones higiénicas de los hospitales militares. En 1870 el ingeniero francés Charles Joseph Minard empleó gráficos para ilustrar las causas del fracaso de Napoleón en su intento por invadir Rusia. En 1970 comenzó el auge de las gráficas en publicaciones periódicas, como el dominical *The Sunday Times* (Reino Unido), la revista *Time* y el periódico *USA Today* (Estados Unidos de América). Actualmente las gráficas de datos abundan en los medios de comunicación; por ello es muy importante saber analizar y hacer gráficas de manera correcta para tomar decisiones acertadas.

3.2.4. Gráficas para datos cualitativos

Para visualizar los datos se realizan gráficas que nos permiten analizar más fácilmente la información. Para los datos categóricos se utilizan principalmente dos tipos de gráficas: gráfica de barras y diagrama circular.

Pedimos al lector que decida ¿cuáles de las siguientes gráficas considera que son adecuadas para representar a la variable género en el ejemplo del equipo de voleibol?

Gráfica 3-1. Gráficas de géneros.



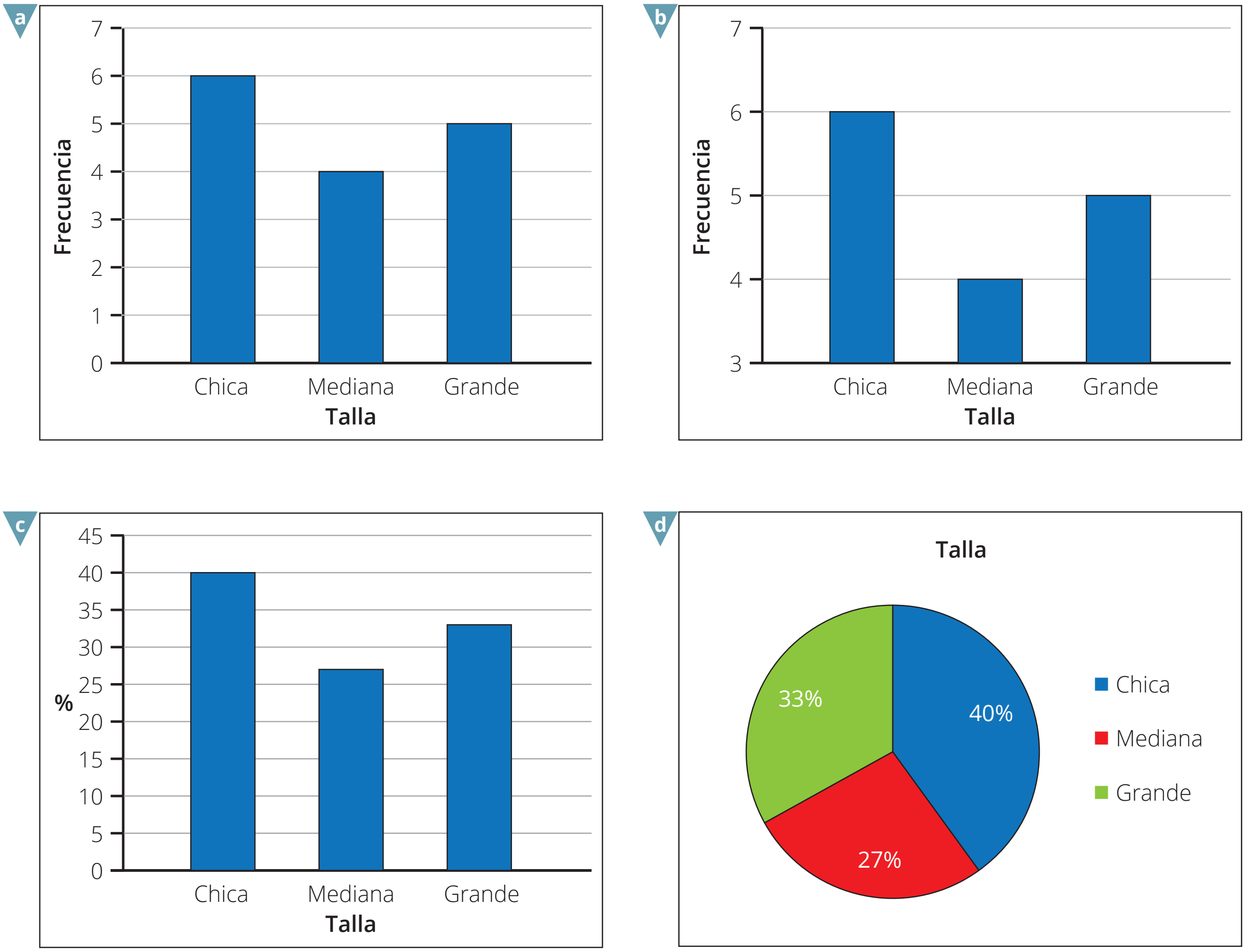
La gráfica a) es una gráfica de barras, la gráfica b) es un diagrama circular. Si el lector eligió alguna de las dos primeras gráficas, está en lo correcto; tanto la gráfica de barras como el diagrama circular son las más adecuadas para representar a los datos categóricos.

Por su parte, la gráfica c) también es una gráfica de barras, razón por la cual podríamos suponer que también es correcta; sin embargo, no es así. En esta gráfica parece que hay cuatro veces más mujeres que hombres, lo cual no es cierto, pues sólo hay tres mujeres más. El problema con esta gráfica es que el eje vertical (frecuencia) no comienza en cero; esto hace que la visualización de los datos sea engañosa.

También la gráfica d) es una gráfica de barras y, además, su eje vertical (frecuencia) sí comienza en cero. No obstante, al poner las barras pegadas se le da a la gráfica cierto sentido de continuidad que no existe entre el género femenino y el masculino, ya que son categorías diferentes. Es importante que en las gráficas de barras, éstas se coloquen separadas entre sí, para indicar que hay diferencia entre las categorías.

Considerado todo lo anterior, ¿cuáles de las siguientes gráficas son más adecuadas para representar a la variable talla?

Gráfica 3-2. Gráficas de tallas.



En este caso, la única gráfica incorrecta es la b), debido a que la escala del eje *Y* (frecuencia) no comienza en cero. Esto provoca que parezca que hay el doble de personas de talla grande que de talla mediana y el triple de personas de talla chica que de talla mediana, cuando en realidad esto no es así. Sólo hay una persona más de talla grande que de talla mediana y hay dos más de talla chica. Como mencionamos, en las gráficas a) y c) las barras van separadas, ya que las categorías son diferentes y no hay sentido de continuidad entre ellas.

Hacer una gráfica de barras es sencillo; sólo se grafican las categorías contra la frecuencia o el porcentaje (frecuencia relativa × 100%). Pero los datos categóricos también se pueden visualizar mediante un diagrama circular.

3.2.5. Diagrama circular

Para realizar un diagrama circular debemos saber qué porcentaje y a cuántos grados (de un ángulo) corresponde cada sector, por lo cual es necesario comenzar con las tablas de frecuencia relativa y agregar el porcentaje.

Tabla 3-8. Frecuencias y porcentajes de género.

Género	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
Femenino	9	9/15 = 0.6	0.6 × 100 = 60%
Masculino	6	6/15 = 0.4	0.4 × 100 = 40%
Total	**15**	**15/15 = 1**	**1 × 100 = 100%**

Para encontrar cuántos grados corresponden a cada categoría multiplicamos la frecuencia relativa por 360°. Esto equivale a hacer una regla de tres (15 corresponde a 360° y 9 corresponde a *G* grados, el número que deseamos encontrar).

Para el género femenino:

$$\frac{9}{15} \times 360° = 216°.$$

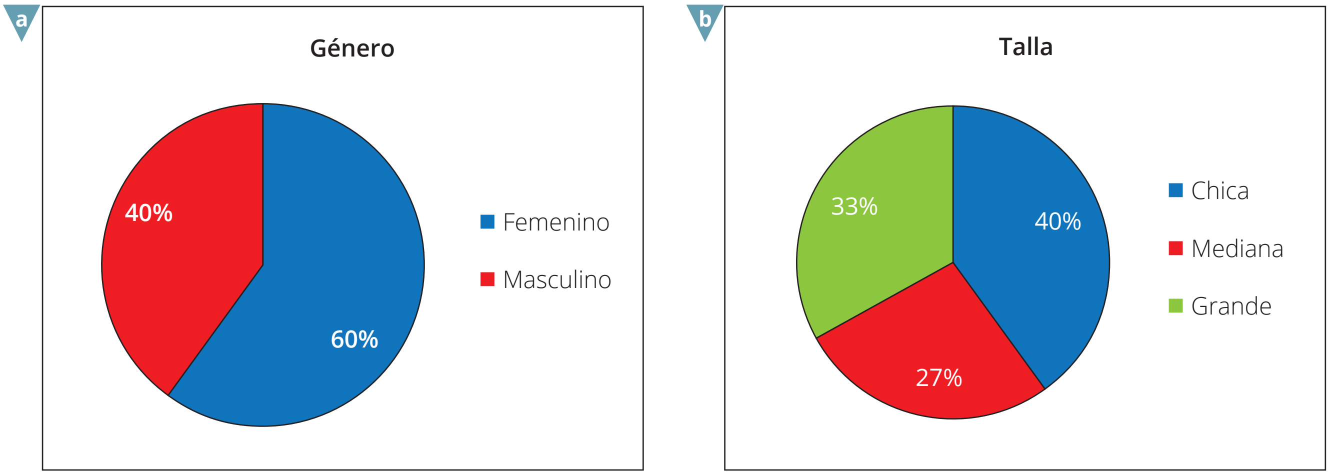
Para el masculino:

$$\frac{6}{15} \times 360° = 144°.$$

En la gráfica 3-3a, se elabora el diagrama circular de género. De la misma manera, en la gráfica 3-3b se elabora el diagrama circular de talla. Pedimos al lector que haga los cálculos correspondientes.

Por otra parte, para los datos cualitativos se puede encontrar la moda, que es la categoría que tiene mayor frecuencia. De esta manera, en la tabla de género, la moda es femenino; en la de talla, la moda es chica. Cabe mencionar que puede

Gráfica 3-3. Diagrama circular de los integrantes del equipo de voleibol.



haber más de una moda.

Aunque las gráficas de barras y los diagramas circulares son muy útiles, veremos que los datos cualitativos se pueden visualizar utilizando otros tipos de gráficos.

3.2.6. Frecuencias absolutas y relativas, datos cuantitativos

Como mencionamos anteriormente, la edad y la estatura son tipos de datos cuantitativos o numéricos. En el caso de la edad, podemos generar fácilmente una gráfica similar a la de barras, llamada gráfica de columnas. Pero primero debemos construir una tabla de frecuencias.

Tabla 3-9. Frecuencias absolutas de edad.

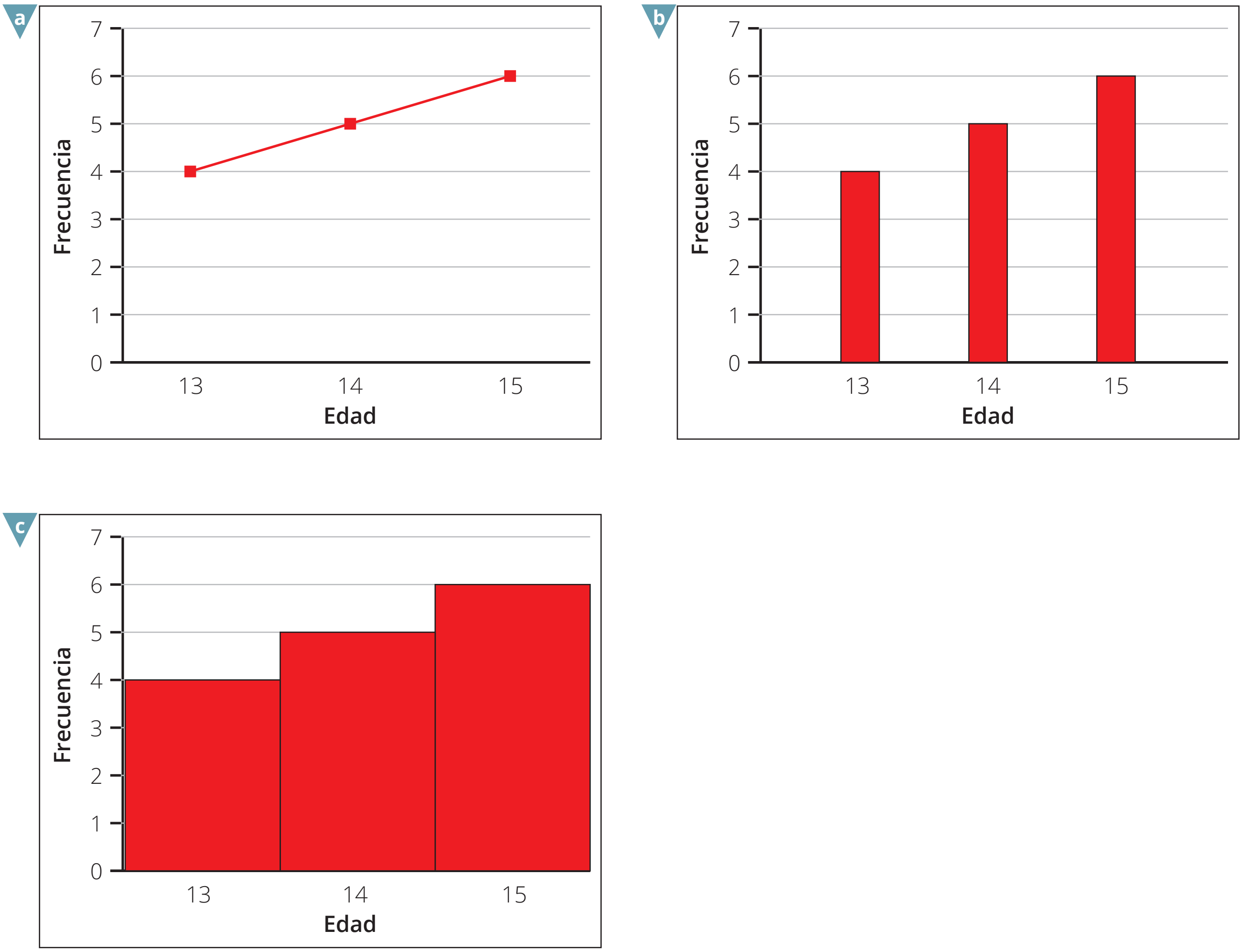
Edad (años)	Frecuencia
13	4
14	5
15	6

3.2.7. Gráficas para datos cuantitativos

¿Cuáles de las siguientes gráficas (gráfica 3-4) considera el lector que son más adecuadas para representar a la variable edad de los integrantes del equipo de voleibol?

La gráfica a) se llama de línea, se utiliza cuando el eje *X* es el tiempo y el eje *Y*

Gráfica 3-4. Gráficas de edades.



es cualquier otra variable cuantitativa y sirve para saber cómo se comporta una variable a través del tiempo. Según la descripción, esta gráfica no es adecuada para representar la variable edad. En este caso, registramos los años cumplidos, razón por la cual cualquier valor no entero no tiene sentido.

Asimismo, la gráfica c) es incorrecta, ya que al estar juntas las barras se tiene cierta idea de continuidad; es decir, significa que cualquier valor entre 13 y 14 o entre 14 y 15 sería válido, pero esto no es así.

Por lo tanto, la gráfica b) es la correcta para representar este tipo de variable, porque las barras delgadas y separadas entre sí nos indican que los únicos valores son 13, 14 y 15.

Por otro lado, en el caso de la variable estatura no podemos hacer una gráfica de manera tan directa, ya que hay muchos valores diferentes. Primero, debemos trabajar con este tipo de datos.

3.2.8. Medidas de tendencia central

Al analizar los datos debemos identificar hacia dónde se centran; esto nos da las medidas de tendencia central. También nos interesa conocer qué tan dispersos están los datos; esto nos lleva a las medidas de dispersión. Además, pueden ser importantes los datos extremos, según el contexto. Dependiendo de lo que nos interese saber y el tipo de datos que tenemos, nos debemos fijar en distintas medidas.

Por ser la edad y la estatura datos numéricos, podemos calcular las llamadas medidas de tendencia central. Las tres más comunes son: media, mediana y moda.

Moda

Es el número que más se repite. No siempre va a existir, como en el caso de la estatura. Dependiendo de la interpretación, se dice que hay más de una moda o que no existe. Usamos la moda principalmente para datos categóricos.

Media aritmética

Comúnmente lo conocemos como promedio. Es la suma de todos los datos entre el número total de éstos.

La media aritmética es sensible a los valores extremos (valores grandes o chicos que parecen no tener nada en común con los demás datos), ya que los valores muy grandes o muy chicos pueden afectar el resultado de la media. Esto lo abordamos en los siguientes ejemplos.

.

Tabla 3-10. Cálculo de la media.

Datos	Media
1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6	30/9 = 3.33
1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 12	36/9 = 4
0.02, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6	29.02/9 = 3.22

Podemos notar que un valor muy chico (0.02) hace que la media disminuya, mientras que un valor muy grande (12) hace que la media aumente. Es por ello que se prefiere utilizar la media cuando los datos tienen simetría y no hay valores extremos.

Mediana

Para calcular la mediana primero ordenamos los datos. Si el número de datos es impar, la mediana es el número que está en medio. Por ejemplo, tenemos:

1, 3, 3, 5, 7, 9, 10

En este caso, 5 es la mediana y 3 es la moda.

Si el número de datos es par, la mediana es el promedio de los dos números de en medio. Por ejemplo, tenemos:

1, 3, 4, 8, 9, 10, 10, 11

La mediana es el promedio entre el 8 y el 9, es decir, 8.5, y la moda es 10.

Cuando hay asimetría en los datos o se tienen valores extremos, es preferible utilizar la mediana.

En el ejemplo del equipo de voleibol se tienen las siguientes medidas de tendencia central:

Tabla 3-11. Medidas de tendencia central a partir del ejemplo del equipo de voleibol.

	Media aritmética	Moda	Mediana
Edad	14.13333	15	14
Estatura	1.608667	No hay	1.59

Existen otras medidas de tendencia central que se utilizan en diversas áreas. Por ejemplo, en el deporte de clavados, cuando un atleta realiza un salto, varios jueces lo califican. La puntuación final se obtiene después de eliminar la puntuación más alta y la más baja (extremos) para promediar las notas que quedan. Esto se conoce como media truncada.

Actividad: acerca de las medidas de tendencia central

Pedimos al lector que exprese su opinión respecto de las siguientes afirmaciones:

1. Los datos se agrupan alrededor de la media.
2. Los datos se agrupan alrededor de la moda.
3. Los datos se agrupan alrededor de la mediana.
4. Un estadístico es una persona que puede tener la cabeza en un horno caliente, los pies en un cubo de hielos y decir que en promedio se siente bien.
5. En una revista aparece el resultado de la siguiente encuesta. En promedio, un hombre tiene seis parejas en su vida, mientras que las mujeres, en promedio, tienen dos. Asumiendo que los hombres y las mujeres de la encuesta son heterosexuales y que hay tantos hombres como mujeres, ¿es esto posible?

6. Para una cena hay cinco invitados de las siguientes edades: 100, 99, 17, 2, 2. Al mayordomo, quien escoge la música, le indicaron que la mediana de las edades es 17; al cocinero le dijeron que la moda es 2; al mesero que sirve las bebidas le comentaron que el promedio es 44. Entonces, en la cena hay música de Justin Bieber, papilla de chícharos y un fino coñac.

3.2.9. Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión nos indican qué tan dispersos están los datos; es decir, qué tan separados están unos de otros.

Cuartiles

Los cuartiles son una medida de dispersión que nos ayuda a saber qué tan separados entre sí, o dispersos, están los datos. Se divide al conjunto de datos en cuatro partes iguales. Hay tres cuartiles: Q1 (primer cuartil), Q2 (mediana y segundo cuartil) y Q3 (tercer cuartil). Mediante un ejemplo, mostraremos la forma más sencilla de encontrarlos.

Tenemos los siguientes datos:

1, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11

1. Encontrar la mediana (el segundo cuartil Q2), para dividir los datos en dos partes iguales.

1, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11

$$\text{Mediana} = \frac{(7+8)}{2} = 7.5$$

2. Encontrar el primer cuartil Q1. Éste es la mediana de la primera mitad, por lo cual usamos el procedimiento para encontrar la mediana aplicada a la primer mitad.

1, 3, 3, 4, 5, 7

$$\text{Primer cuartil} = \frac{(3+4)}{2} = 3.5$$

3. Encontrar el tercer cuartil Q3. Es la mediana de la segunda mitad.

8, 8, 8, 9, 10, 11

$$\text{Tercer cuartil} = \frac{(8+9)}{2} = 8.5$$

4. De esta manera, los cuartiles quedan así:

1, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11

Q1 = 3.5 Q3 = 8.5

Mediana = 7.5

Debemos notar que siempre entre un cuartil y otro hay el mismo número de datos (25%).

3.2.10. Gráfica de caja (o caja y brazos)

Es una gráfica que utiliza los cuartiles y nos ayuda a saber qué tan dispersos están los datos. Véase la figura 3-2 para conocer la forma básica de este tipo de gráfico.

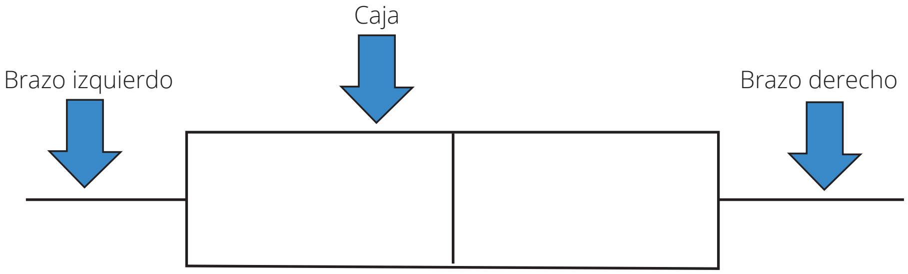


Figura 3-2.
Caja y brazos.

Para construir esta gráfica, debemos encontrar o calcular los siguientes valores (figura 3-3):

1. Mínimo.
2. Primer cuartil (Q1).
3. Mediana.
4. Tercer cuartil (Q3).
5. Máximo.

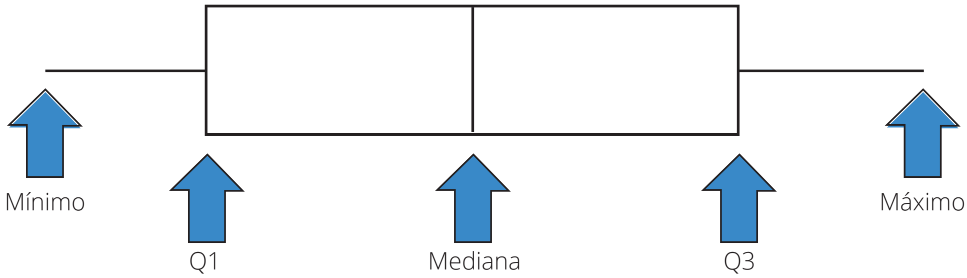


Figura 3-3.
Valores de la gráfica de caja.

Por ejemplo, realizaremos la gráfica de caja de los datos con los cuales calculamos antes los cuartiles.

1, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11

Para estos datos tenemos que:

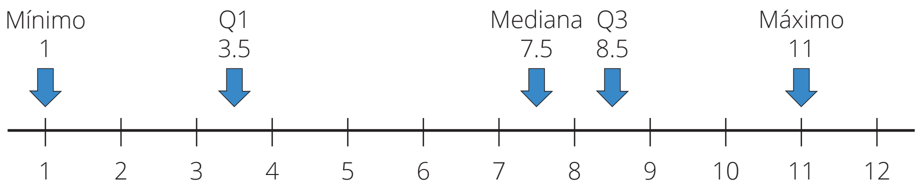
1. Mínimo = 1.
2. Q1 = 3.5.
3. Mediana = 7.5.
4. Q3 = 8.5.
5. Máximo = 11.

Lo primero es dibujar un eje –que puede ser horizontal o vertical– con una escala adecuada para que quepan los cinco valores (figura 3-4).

Figura 3-4.
Eje con una escala adecuada según los valores.

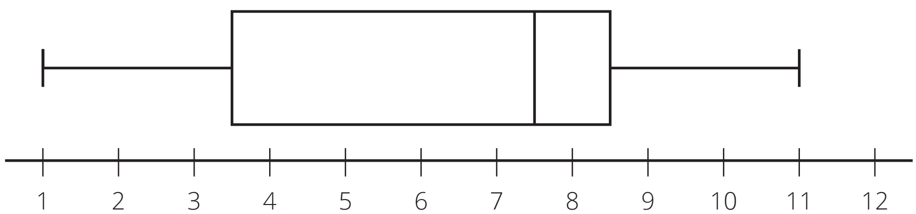
Sobre este eje ubicamos los valores (figura 3-5).

Figura 3-5.
Localización de los valores.



Por último, unimos los valores para formar la caja y los brazos (figura 3-6).

Figura 3-6.
Gráfica de caja y brazos.



A la hora de interpretar esta gráfica debemos tomar en cuenta que para obtenerla se utilizaron los cuartiles; esto significa que entre el mínimo y Q1 hay el mismo número de datos que entre Q1 y Q2, entre Q2 y Q3 y entre éste y el máximo. Sin embargo, en la gráfica el espacio entre Q1 (3.5) y la mediana (Q2) no es del mismo tamaño que el espacio entre la mediana y Q3. ¿Por qué pasa esto?

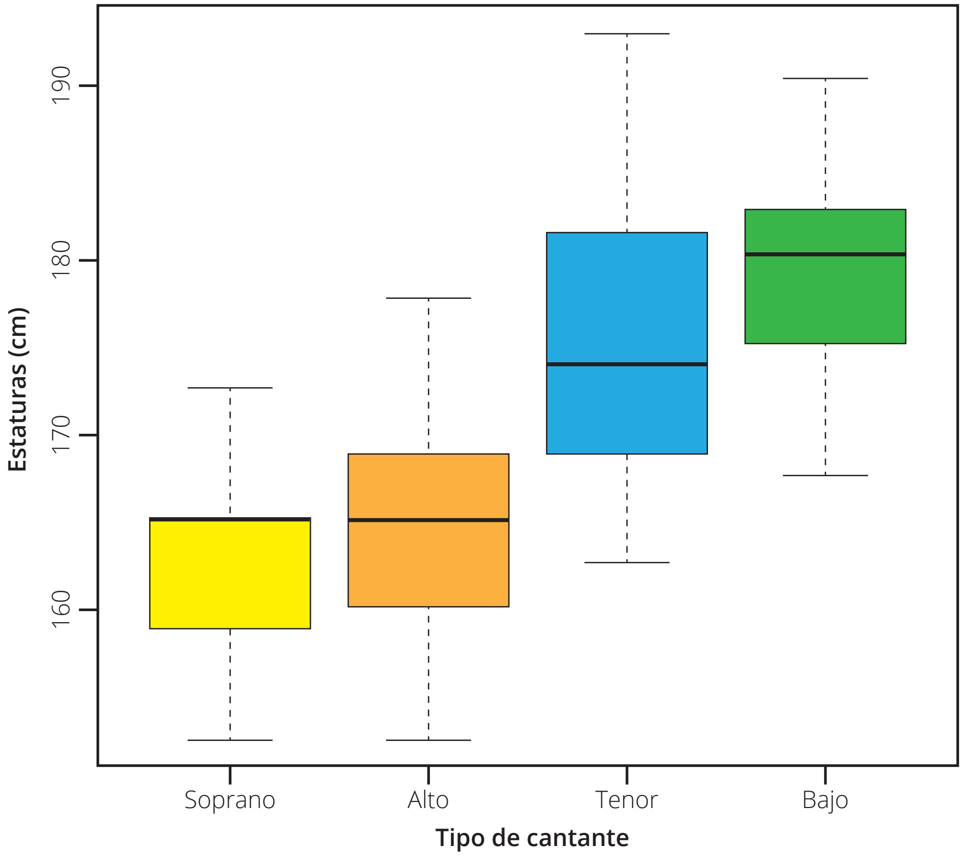
Los diagramas de caja pueden ser muy útiles para comparar poblaciones. A continuación presentamos las estaturas de los miembros de una compañía de cantantes de ópera, considerados según su registro vocal: soprano, alto, tenor y bajo. Los dos primeros tipos de voz corresponden a mujeres y los dos últimos, a hombres (tabla 3-12).

Tabla 3-12. Estaturas de cantantes.

Soprano	Alto	Tenor	Bajo
162.56	165.1	175.26	182.88
157.48	157.48	182.88	177.8
167.64	172.72	180.34	182.88
165.1	170.18	167.64	175.26
152.4	170.18	193.04	185.42
154.94	160.02	187.96	180.34
165.1	170.18	180.34	182.88
167.64	167.64	167.64	172.72
165.1	160.02	172.72	172.72
160.02	182.88	170.18	180.34
170.18	157.48	177.8	167.64
165.1	154.94	165.1	172.72
157.48	167.64	182.88	180.34
165.1	162.56	177.8	185.42
172.72	152.4	172.72	185.42
165.1	154.94	185.42	177.8
160.02	167.64	167.64	172.72
165.1	167.64	172.72	177.8
157.48	167.64	170.18	190.5
165.1	157.48	162.56	172.72
167.64	177.8		180.34
157.48	165.1		177.8
165.1	162.56		187.96
160.02	160.02		177.8
165.1	165.1		190.5
167.64	175.26		190.5
165.1	154.94		175.26
157.48	167.64		182.88
165.1	165.1		180.34
167.64	154.94		177.8
165.1	160.02		180.34
154.94	162.56		172.72
165.1	170.18		177.8
167.64	167.64		190.5
165.1	172.72		182.88
157.48			167.64
			182.88
			177.8
			175.26

Nota: los datos de estatura se expresan en centímetros.

Gráfica 3-5. Diagramas de caja de estaturas.



3.2.11. Gráfica de datos

Una gráfica se utiliza para representar la relación entre dos variables. Por ejemplo, en un salón se apuntan el peso y la estatura de cada alumno (tabla 3-13). En el eje *X* colocamos la estatura y en el eje *Y*, el peso (gráfica 3-6).

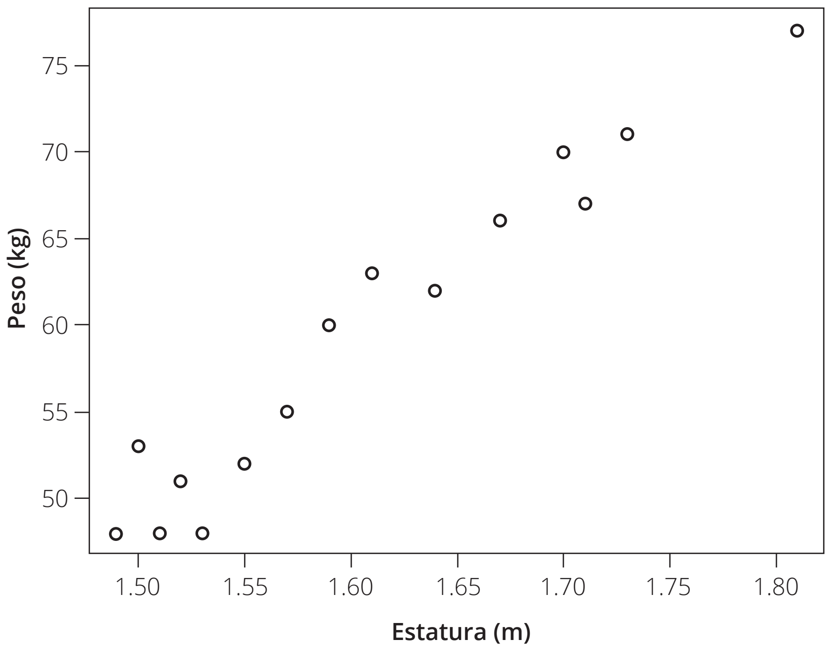
La asociación lineal entre dos variables no implica causalidad. El hecho de que dos variables parezcan tener una relación lineal, o que una crezca cuando lo hace la otra, no necesariamente significa que una esté causando los cambios en la otra.

Por ejemplo, una vez se graficó el número de cigüeñas en Oldenburg, Alemania, contra el número de habitantes, de 1930 a 1936. En dicha gráfica podemos observar que a mayor número de cigüeñas, mayor número de habitantes. Sin embargo, esto no significa que las cigüeñas sean las que traen a los bebés de París. Hay una tercera variable: el tiempo, que se asocia tanto al aumento del número de habitantes como al del número de cigüeñas, ya que las poblaciones de los seres vivos tienden a crecer a medida que pasa el tiempo; de ahí la relación lineal entre el número de cigüeñas y el número de habitantes de Oldenburg (gráfica 3-7).

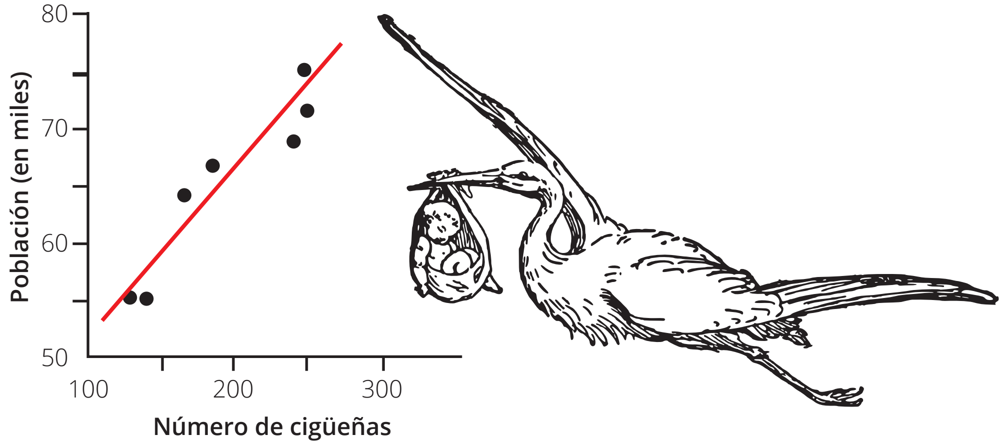
Tabla 3-13. Estaturas y pesos.

Nombre	Estatura (m)	Peso (kg)
Estela Muñoz	1.57	55
Carlos Garza	1.81	77
María González	1.51	48
Jaime Jaimez	1.55	52
Juana García	1.73	71
José Espinoza	1.71	67
Blanca Hernández	1.53	48
Concepción Delgado	1.59	60
Josefina Sandoval	1.61	63
Isidora Sánchez	1.49	48
Pablo Pérez	1.70	70
Laura Martínez	1.64	62
María Pérez	1.67	66
Jaime Gómez	1.52	51
Pedro González	1.50	53

Gráfica 3-6. Estaturas y pesos.

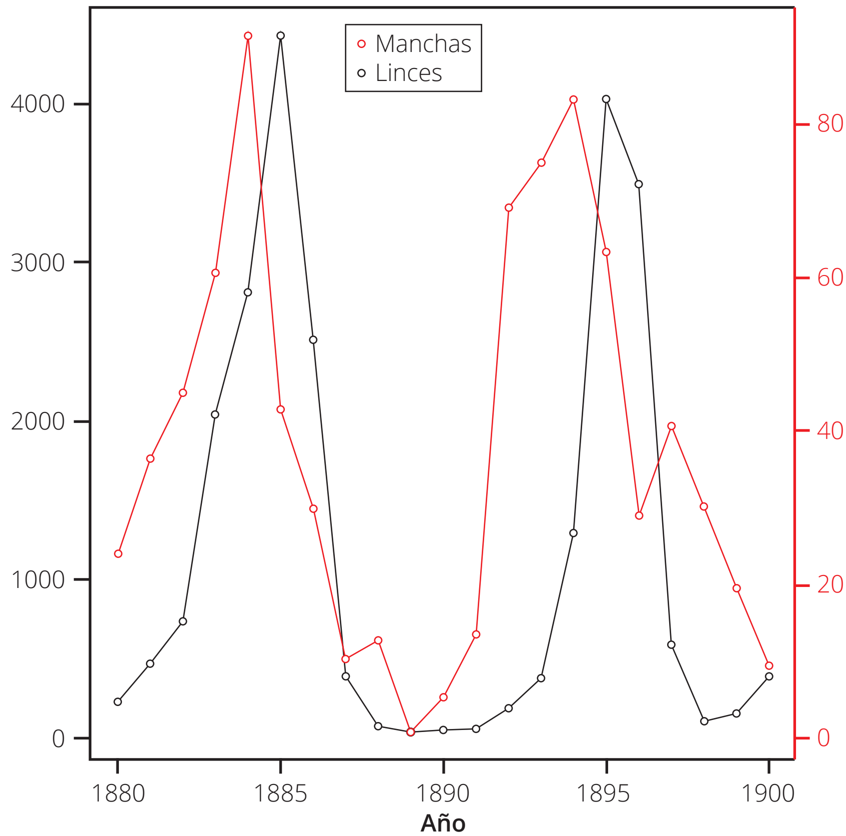


Gráfica 3-7. Gráfico de la población de Oldenburg al final de cada año en función del número de cigüeñas observadas en ese año (1930-1936).



Otro ejemplo es la gráfica que nos muestra la intensidad de las manchas solares y la densidad de la población de linces (gráfica 3-8).

Gráfica 3-8. Intensidad de manchas solares y densidad de población de linces.



En la gráfica podemos ver que cuando crece la intensidad de las manchas del sol, hay un aumento en la población de linces; mientras que cuando la intensidad baja, también lo hace la población de linces. Obviamente las manchas solares no causan una mayor población de linces.

En las noticias aparecen falacias de este tipo muy frecuentemente. Por ejemplo, en un periódico apareció un estudio que afirma que las personas que fuman "ligan más", pues unos investigadores que entrevistaron a un grupo de fumadores y a otro grupo de no fumadores encontraron que los que fumaban más tenían mayor número de encuentros sexuales que los que no fumaban.

En la Edad Media, se pensaba que los piojos daban buena salud porque no se veían en la gente enferma. En realidad era al revés, la buena salud hacía probable que tuvieras piojos, porque éstos picaban a casi todo el mundo, menos a los enfermos.

En otro ejemplo, en el verano se observa que a mayor consumo de helados, mayor número de ahogamientos. La conclusión rápida de que comer helados provoca una mayor probabilidad de ahogarse parece mucho menos ajustada a la realidad de que, por decir, el calor es la causa de que haya un mayor consumo de helados y más baños refrescantes, lo que aumenta la posibilidad de ahogamientos. Éste es uno de los ejemplos más usados, pero podríamos pensar en cientos de casos, debido a que es un error muy común.

3.2.12. Muestra aleatoria

Una muestra aleatoria es un subconjunto de la población que ha sido seleccionado al azar. Esto significa que el subconjunto se elige mediante un procedimiento aleatorio, de tal forma que todos los elementos de la población tengan la misma probabilidad de ser seleccionados.

No obstante, notemos que no todo subconjunto de la población constituye una muestra aleatoria. Por ejemplo, si un programa de noticias pide que la gente llame para indicar cuál es el partido político de su preferencia, esto no constituye una muestra aleatoria, ya que no toda la población está viendo el programa o no todos los que están viendo tienen teléfono, o bien muchos no desean compartir esta información. Para contar con una muestra aleatoria, debemos asegurar que cada individuo de la población a estudiar tenga la misma probabilidad de ser escogido. De esta manera, si una encuesta se hace aleatoriamente, nos permite llegar a conclusiones respecto de la población total, mientras que si la muestra no es aleatoria, no nos proporciona información acerca de toda la población.

Por ejemplo, el libro *Mujeres y amor, una revolución cultural en progreso,* de Shere Hite (1987) tiene varios resultados que son ampliamente citados:

1. 84% de las mujeres no están satisfechas emocionalmente con sus relaciones.
2. 70% de las mujeres con cinco o más años de casadas tienen relaciones sexuales fuera del matrimonio.

3. 95% de las mujeres informan de diversas maneras de acoso emocional y psicológico por parte de los hombres con los que mantuvieron alguna relación sentimental.

Para esta encuesta, Hite mandó 100 000 cuestionarios de manera aleatoria; la cuestión es que sólo 4.5% contestó. Por ello, esto no constituye una muestra aleatoria de las mujeres, ya que, por decir, una mujer que tenga algún resentimiento encontrará mayores incentivos para contestar el cuestionario que una mujer en una relación feliz. Por lo tanto, los resultados de esta encuesta no son representativos de todas las mujeres.

Actividad: acerca de las muestras

1. En Facebook, Juan López publicó una encuesta para saber qué marca de refresco prefiere la gente. Encontró que 80% de sus amigos eligió Vladiplex. ¿Esto es una muestra aleatoria? ¿Significa que alrededor de 80% de los mexicanos prefieren Vladiplex?
2. En una página de internet se pregunta a las personas por su programa de televisión favorito. ¿Esto constituye una muestra aleatoria de las personas que ven televisión en México?
3. En un salón de clases, la maestra utiliza la lista de alumnos para seleccionar al azar a 10 estudiantes que participen en una actividad. ¿Es esto una muestra aleatoria? ¿Por qué?

Bibliografía

Batanero, C. y Godino, J. D., *Análisis de datos y su didáctica,* Granada, Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2001. Disponible en: <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Apuntes.pdf>.

Borel, E., *El azar*, Buenos Aires, La Pléyade, 1974.

Cohen, L., "The History of Noise", en White, L. B., Geoghiades, C. N., Hoffman, M. H. y Pradel, L. (eds.), *Noise in Communication. Proceedings of SPIE,* vol. 5473, Bellingham, SPIE, 2004.

Domínguez Domínguez, J., *Estadística y probabilidad. El mundo de los datos y el azar,* Oxford University Press, 2006.

Feller, W., *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones,* vol. I, Nueva York, Limusa y Wiley, 1973.

Goldberg, S., *Probability, an Introduction*, Nueva York, Dover, 1986.

Gonick, L., Smith, W. y Zariquiey, Z., *La estadística en cómic (en el periódico),* Barcelona, Zendrera Zariquiey, 2000.

Hacking, I., *The Emergence of Probability,* Londres, Cambridge University Press, 1975.

Kazmier, L. y Díaz Mata, A., *Estadística aplicada a la administración y a la economía,* 2.ª ed., México, McGraw-Hill Interamericana de México, 1993.

Kolmogorov, A. N., *Foundations of the Theory of Probability,* Nueva York, Chelsea, 1956.

Lipschutz, S. y Lipson, M. L., *Teoría y problemas de probabilidad,* 2.ª ed., Bogotá, McGraw-Hill, 2001.

Loève, M., *Probability Theory I,* 4.ª ed., Estados Unidos de América, Springer-Verlag, 1977.

Maistrov, L. E., *Probability Theory, A Historical Sketch,* Nueva York y Londres, Academic Press, 1974.

Mendenhall, W. y Reinmuth, J. E., *Estadística para administración y economía,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1981.

Pearson, E. S., *Pearson creador de la estadística aplicada,* Buenos Aires y México, Espasa-Calpe Argentina, 1948.

Pérez Salvador, B. R., *Estadística para las ciencias sociales,* vol. I, México, Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa, 1992.

4 | Actitudes hacia el estudio de las matemáticas

Mucuy Kak Guevara Aguirre
Miguel Lara Aparicio

4.1. Introducción

Los autores de este capítulo estamos conscientes de la enorme carga que tienen los profesores de secundaria y sabemos que es probable que ésta influya de manera negativa respecto a la actualización de sus conocimientos, en particular, los de matemáticas. Por ello, hemos planteado y resuelto una serie de problemas genéricos que ayuden a los docentes a ponerse al día y, de esta manera, con la experiencia que han adquirido en la práctica con sus alumnos, puedan generar, plantear y resolver nuevos problemas que inciten a desarrollar una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas.

Para abordar cualquier tema de esta materia resulta más atractivo si, primero, presentamos a los estudiantes un panorama histórico de los conceptos, con el fin de que descubran que las matemáticas no son fórmulas y reglas a las cuales se tienen que ajustar. Con la ayuda de su profesor, verán que son capaces de razonar y de resolver los problemas. Pensamos que de esta forma ellos mismos comprenderán que es importante ayudar a su maestro al participar activamente en las clases, preguntar, pasar al pizarrón, discutir con otros compañeros acerca de los problemas planteados, etcétera.

En este sentido, concordamos plenamente con George Polya cuando propone que enseñemos a los estudiantes a aprender de sus errores. Así, si alguno se equivoca en un paso del razonamiento, no podemos decirle que está mal e inmediatamente hacer la pregunta a otro alumno; por el contrario, se trata de razonar con ellos, de manera que descubran, por sí mismos, en qué consiste su error.

Lo mismo aplica para la evaluación de tareas y exámenes; es decir, hay que tener en cuenta tanto el resultado como el proceso de solución, para así otorgar una calificación conforme el alumno va razonando, según lo considere el profesor, y a la vez guiarlo para conocer cuáles fueron sus errores. De esta manera, se descubrirá que la evaluación no depende simplemente de tener la respuesta correcta, sino también de comprender la manera en que se está resolviendo el problema.

Por otro lado, los estudiantes deben saber que no basta con sólo dar el resultado, ya que hay casos en los que la combinación de ciertos errores en el proceso puede llevar a un resultado correcto.

Además, muchas veces nosotros mismos, como profesores, somos responsables de inhibir la participación de los alumnos y hacemos que se interesen solamente por aprobar el curso. De esta manera, no logramos que adquieran una actitud adecuada hacia el estudio de las matemáticas y provocamos que, por lo tanto, sus conocimientos de la materia sean prácticamente nulos.

También es importante ir descubriendo algunas aplicaciones de lo que se estudia y acabar con la acostumbrada pregunta: ¿y eso para qué sirve?, lo cual muestra poco interés en la teoría. Es claro que muchas de las aplicaciones son idealizaciones de problemas reales, pero ésta es una manera de ir construyendo el interés por las matemáticas y, así, ayudar a la formación de nuestros alumnos. Con toda seguridad, esto provocará una actitud positiva no sólo hacia las matemáticas, sino también respecto al estudio de otras materias, así como en su vida misma.

De todos es conocido que la educación matemática en México muestra niveles muy bajos de calidad. Los factores que intervienen en la problemática anterior son múltiples; por ejemplo, las necesidades económicas de las familias mexicanas o la falta de empleos bien remunerados, lo cual lleva a una mala alimentación en casa, así como la carencia de un ambiente familiar adecuado que priorice la educación de los hijos en edad escolar. Esto provoca que los alumnos, en general, tengan poco interés en el aprendizaje de sus materias y que su dedicación al estudio sea casi nula, dado que les resulta imposible concentrarse en los temas que deben cubrir.

Por todo lo antes dicho, el problema con el que se enfrenta un profesor es un verdadero reto. ¿Cómo lograr una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas a nivel secundaria? En el presente capítulo ofrecemos a los docentes algunas sugerencias de enseñanza para lograr que los alumnos vayan modificando su actitud, mediante la resolución de problemas que requieran el empleo de los conocimientos adquiridos en el transcurso de las clases de matemáticas en los tres grados de educación media. De esta manera, al diseccionar algún problema, los estudiantes deberán poder aplicar su aprendizaje, por ejemplo, respecto a las propiedades de los triángulos, la noción de semejanza entre figuras geométricas, las características de los números reales, entre otros temas.

4.2. Equivalencia de dos escalas de temperatura

En este apartado encontraremos la equivalencia entre las medidas de temperatura en grados Fahrenheit y grados Celsius. Para tal fin, observemos que con el objetivo de fijar los valores extremos de temperatura se considera el punto de ebullición del agua como límite superior y su punto de congelación como límite inferior.

En casi todos los países anglosajones se emplea la escala Fahrenheit, la cual marca 212 °F como punto de ebullición del agua, mientras que el punto de congelación es 32 °F.

No obstante, en nuestro país y en los trabajos científicos internacionales se emplea la escala Celsius, en la cual se marca el punto de ebullición del agua a 100 °C, mientras que 0 °C es el punto de congelación.

En la figura 4-1 representamos las dos escalas y hemos hecho coincidir tanto el punto de ebullición del agua en ambas (32 °F con 100 °C) como el punto de congelación (212 °F con 0 °C). De esta manera, tenemos que 212 − 32 = 180 corresponde a 100 divisiones de la escala Celsius, por lo que la relación de las magnitudes es $\frac{180}{100} = \frac{9}{5}$.

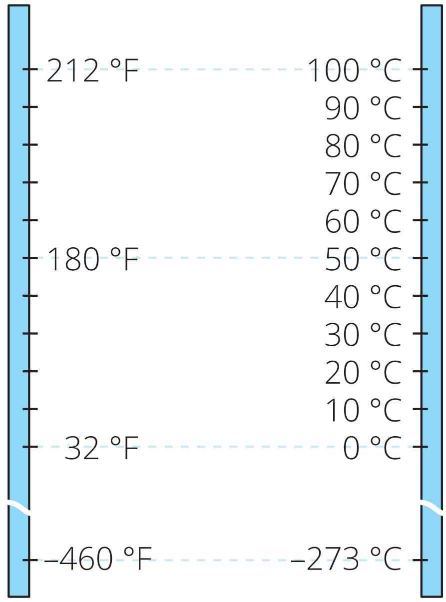


Figura 4-1. Escalas Fahrenheit y Celsius.

¿Cómo establecemos una ecuación que relacione a ambas escalas? Por ejemplo, queremos saber a cuántos grados Fahrenheit equivalen 26 °C. De acuerdo con lo que acabamos de ver, 26 °C corresponden a 26 subdivisiones a partir de 0 en la escala Celsius, por lo que en la escala Fahrenheit tendremos 26 × 1.8 = 46.8. Como la temperatura de congelación es 32 °F, debemos sumar 32 al resultado, con lo cual obtenemos 46.8 + 32 = 78.8. De esta manera, establecemos una ecuación lineal:

$$\text{Temperatura en grados Fahrenheit} = \frac{9}{5}\left(\text{Temperatura en grados Celsius}\right) + 32.$$

Ejercicio

Buscamos establecer una ecuación para convertir de grados Fahrenheit a grados Celsius. Dicha ecuación también es lineal. Podemos plantear a los alumnos el siguiente problema.

Una persona desea hornear un pastel. La receta indica que el horno deberá estar a 200 °F, pero la escala de temperatura del horno está en grados Celsius. ¿A cuántos grados debe colocarse la perilla del control de temperatura del horno para seguir la receta? La respuesta es aproximadamente a 93.3 °C.

Por supuesto, existen otras escalas para medir la temperatura, como la que considera que el punto más bajo que se puede tener es el denominado cero absoluto, que corresponde a −273.15 °C o −459.67 °F. Con el fin de aplicar una escala de temperatura cuyo cero coincida con el cero absoluto, se utilizan las escalas Fahrenheit y Celsius absolutas; por lo tanto, sus temperaturas se denominan absolutas. La escala mencionada también se conoce como escala Kelvin. El grado Kelvin es su unidad fundamental y corresponde a la temperatura teórica a la cual las moléculas de una sustancia tienen su mínima energía. Su nombre se debe a que la instauró el físico británico William Thomson, quien adoptó el nombre de Lord Kelvin al recibir el título nobiliario.

Como las temperaturas de la escala Kelvin exceden en 273 grados a las correspondientes de la escala Celsius, entonces el punto de congelación del agua (0 °C) es igual a 273 K, y el de ebullición (100 °C) es 373 K.

Por otra parte, las temperaturas de la escala Kelvin exceden en 460 grados a las de la escala Fahrenheit, por lo que el equivalente del cero absoluto es −460 °F. El punto de congelación del agua es 492º absolutos Fahrenheit y la temperatura de ebullición del agua es 670º absolutos Fahrenheit.

4.3. Área de un hexágono regular

El problema que planteamos en esta sección consiste en calcular el área de un hexágono regular de lado a, inscrito en un círculo de radio r, a partir de la definición del área de un cuadrado de lados x.

Para obtener el área de un cuadrado de lados x, de acuerdo con *Los elementos de Euclides,* multiplicamos $x \cdot x$ y obtenemos que el área es x^2. Pero para pasar de un cuadrado a un hexágono regular todavía nos falta considerar dos lados más, de manera que antes de dar un salto grande debemos dar uno más pequeño. ¿Podemos calcular el área de otro polígono de cuatro lados (un rectángulo) a partir de la definición del área de un cuadrado de lados x? Para resolver este paso observemos que, conforme a la figura 4-2, una manera de hacerlo es disponer cuatro rectángulos, iguales entre sí, en los cuatro lados de un cuadrado, de la manera que se indica.

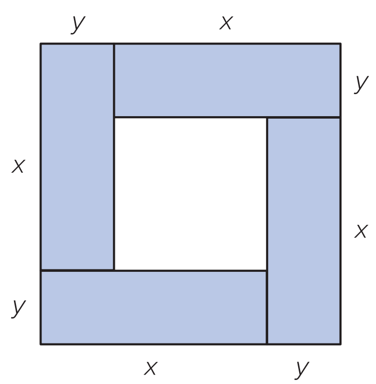


Figura 4-2.
Cuadrado de lados $x + y$.

Podemos ver que el nuevo cuadrado agrandado, de lados $x + y$, está constituido por cuatro rectángulos, así como también por un cuadrado en el centro, de lados $x - y$. Por lo tanto, el área total del cuadrado, que representamos como A_C, es igual a cuatro veces el área del rectángulo R (que denotamos con A_R) más el área del cuadrado interno I (que es A_I). Entonces,

$$\begin{aligned} A_c &= 4(A_R) + A_1, \\ (x+y)^2 &= 4(A_R) + (x-y)^2, \\ A_R &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}. \end{aligned}$$

Al desarrollar los binomios del numerador tenemos que:

$$A_R = \frac{(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)}{4},$$

por lo que

$$A_R = \frac{4xy}{4} = xy.$$

¿Hemos avanzado para conocer el área de un hexágono regular?

Como podemos observar, dimos un paso hacia el objetivo, puesto que obtuvimos el área de un polígono no regular de cuatro lados.

En seguida, notemos que al trazar una diagonal en un rectángulo obtenemos dos triángulos rectángulos congruentes entre sí. Por tanto, el área de cada uno de ellos (A_T) es la mitad del área del rectángulo; es decir,

$$A_T = \frac{xy}{2}.$$

Para calcular el área del hexágono regular en cuestión ¿podemos usar el área de un triángulo rectángulo como el que obtuvimos?

Desde el centro del hexágono regular hacia cada uno de los vértices del mismo, trazamos segmentos de rectas que los unan, como se ilustra en la figura 4-3.

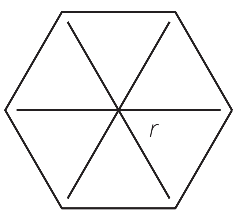


Figura 4-3. Hexágono regular.

Aunque hemos obtenido triángulos, éstos no son triángulos rectángulos. Tracemos las medianas de cada uno para tener 12 triángulos rectángulos. De cada uno conocemos el valor de un cateto de longitud $\frac{a}{2}$ y otro de longitud r. Por tanto, según el teorema de Pitágoras, el otro lado del triángulo es

$$\sqrt{\left(r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}.$$

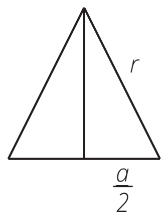


Figura 4-4. Dos triángulos rectángulos.

Entonces, el área de cada uno de estos triángulos rectángulos es

$$\frac{\frac{a}{2}\sqrt{\left(r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}}{2}=\frac{a\sqrt{\left(r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}}{4}.$$

Así, al multiplicar por el número de triángulos obtenidos (12) el lado derecho de la igualdad, alcanzamos nuestro objetivo. El área de un hexágono regular de lado a y que está inscrito en un círculo de radio r es

$$3a\sqrt{\left(r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}.$$

4.4. La división en la razón extrema y media (razón áurea)

En *Los elementos de Euclides* (VI, 30) encontramos la siguiente definición:

> "Una recta está dividida según la razón extrema y media, cuando toda (la recta) es a la parte menor."

Consideremos un segmento de longitud l.

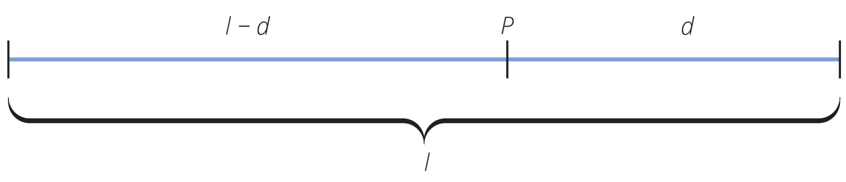


Figura 4-5. Recta dividida en la razón extrema y media.

Si *P* es un punto que divide a la recta en los segmentos *d* y *l* – *d,* entonces, de acuerdo con la definición de Euclides, para que la recta esté dividida en una razón media y extrema debemos tener que

$$\frac{l}{d}=\frac{d}{l-d},$$

de donde

$$l^2-ld=d^2,$$

o sea que

$$d^2+ld-l^2=0.$$

Por lo tanto,

$$d\frac{-l+\sqrt{l^2+4l^2}}{2}=l\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

El número entre corchetes que aparece en la fórmula anterior se conoce como la razón áurea y se le designa con la letra griega ø.

Esta enigmática proporción áurea se puede hallar en la naturaleza, como en las alas de la libélula, en la concha del *Nautilus* (véase la figura 4-6) y en la dispo-

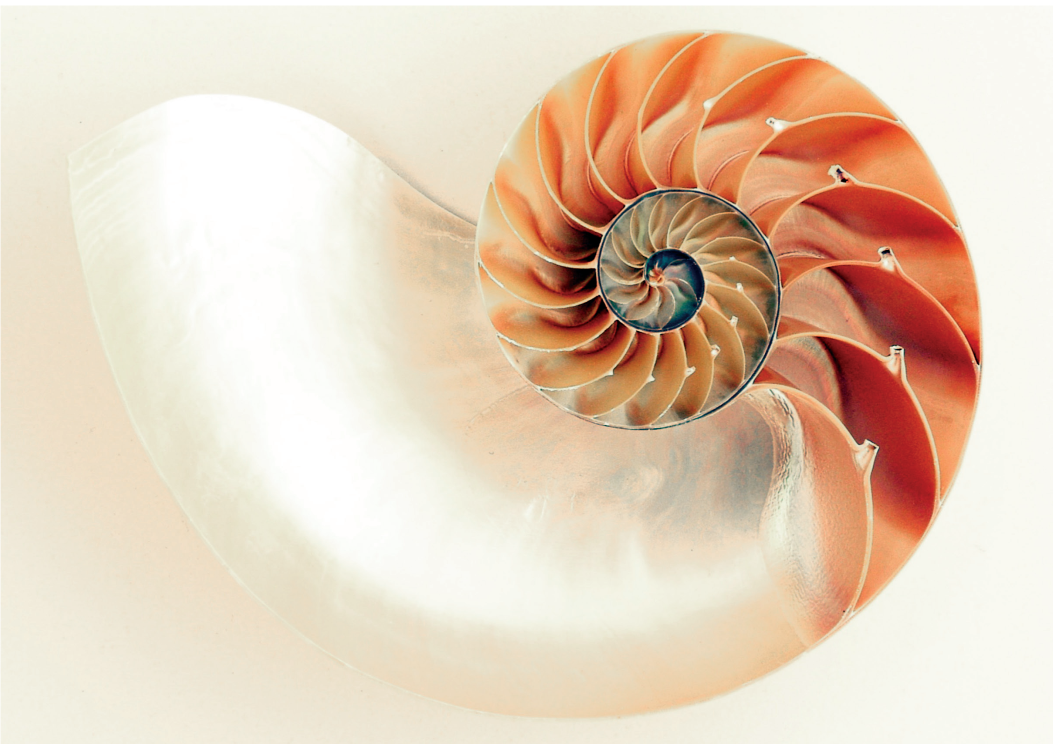


Figura 4-6. *Nautilus.*Tomada de <www.pixabay.com>.

Figura 4-7.
Girasol. Tomada de <www.pixabay.com>.

sición de las semillas del girasol (véase la figura 4-7). Al respecto, recomendamos el video *Nature by Numbers,* de Cristóbal Vila.[1]

Leonardo da Vinci indicó que las proporciones de la figura humana están relacionadas con la razón áurea. ¿Puede el lector analizar la figura 4-8 para encontrar en qué partes aparece dicha proporción?

1. Disponible en <vimeo.com/9953368>.

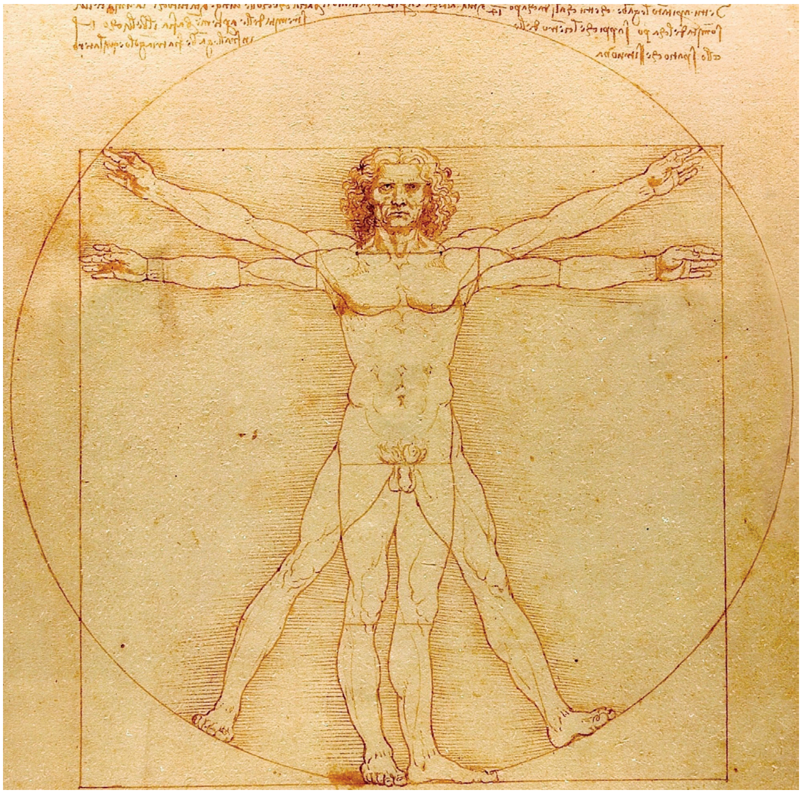


Figura 4-8.
Hombre de Vitruvio. Tomada de <www.pixabay.com>.

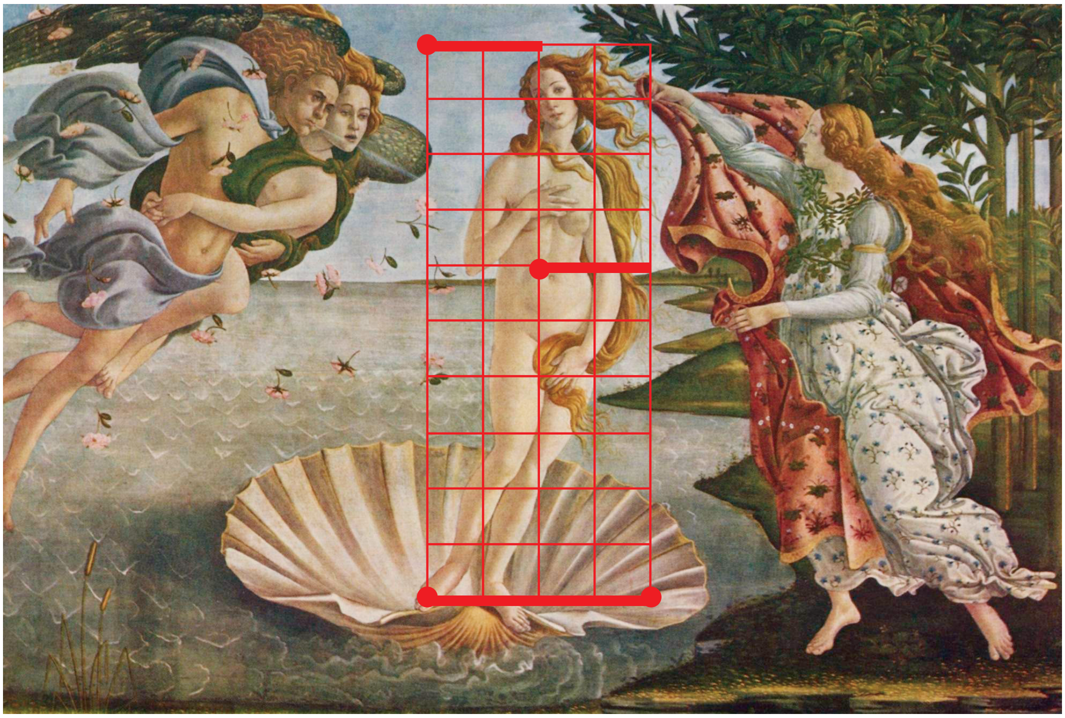


Figura 4-9. Proporción áurea en *El nacimiento de Venus.* Tomada de <www.pixabay.com>.

En la *Geometría en el arte,* de Dan Pedoe (1979), aparece una ilustración que corresponde al cuadro del maestro italiano Sandro Botticelli *El nacimiento de Venus,* el cual se analiza mediante la proporción áurea (véase la figura 4-9).

Por su parte, Fidias, considerado el más grande escultor griego de todos los tiempos, frecuentemente usaba esta proporción en sus construcciones.

Resulta curioso constatar la atracción de tipo estético que ejerce la proporción áurea sobre nuestros sentidos. Alguna vez un grupo de psicólogos alemanes estudió a un conjunto de personas a las que les mostraban diversas figuras geométricas rectangulares para que eligieran el rectángulo cuyas proporciones más les agradaran. Resultó que el rectángulo más popular era aquel que se ajustaba a las proporciones de la razón áurea (aproximadamente 3 × 5).

Asimismo, de alguna manera, parece que el coseno del ángulo de inclinación de cada lado de las pirámides de Egipto es cercano a 0.618, lo cual corresponde a la razón áurea.

Ahora invitamos al lector a que admire la siguiente propiedad de la razón áurea a partir de la figura 4-10.

Figura 4-10. Segmento *AB.*

Consideremos que el punto P_1 divide al segmento AB en la razón áurea, donde $AP_1 > P_1B$. Si el punto P_2 es tal que $AP_2 = P_1B$, entonces, el segmento AB está dividido en la razón áurea donde está el punto P_2, y así se puede seguir indefinidamente. Por ejemplo, si el punto P_3 es tal que $AP_3 = P_2P_1$, entonces, el punto P_3 divide al segmento AP_2 en la razón áurea. Si procedemos de manera inductiva, tendremos que el punto P_{n+1} divide al segmento AP_n en la razón áurea. No obstante, no sabemos si los pitagóricos llegaron a conocer este proceso infinito.

En este texto nos restringimos a lo que se sabe acerca de lo que los griegos encontraron con relación a dicha proporción. En el libro *Los matemáticos griegos,* tercera jornada (Lara, 1993), aparece una propiedad iterativa de la sección áurea en la que se muestra la construcción de la espiral.

En párrafos anteriores mencionamos el teorema de Pitágoras, quien, al haber adoptado el símbolo del pentágono regular cuyas diagonales forman una estrella de cinco puntas, probablemente observó que las diagonales se cortan en la razón áurea. Veamos cómo podría demostrarse esto.

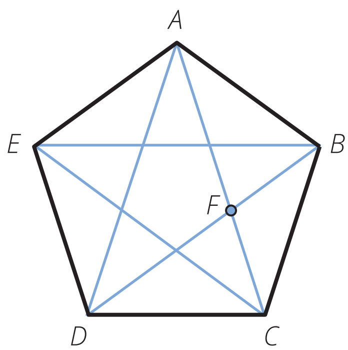


Figura 4-11. Pentágono regular cuyas diagonales forman una estrella de cinco puntas.

Para ello consideramos las diagonales arbitrarias como las mostradas en la figura 4-11.

Vamos a probar que la recta *BD* interseca a la recta *AC* en la proporción áurea; es decir, ambas rectas se intersecan en el punto *F,* de manera que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{FC}\,.$$

Demostración

Circunscribamos el pentágono como se muestra en la figura 4-11. Por ser un pentágono regular, tenemos que $AB = BC$. Ahora probaremos que $AF = AB$ y, por tanto, que $AF = BC$. Para ello, observemos que $\angle FBC = \angle BCF = \alpha$ (ambos ángulos subtienden arcos iguales), por lo que $\angle AFB = 2\alpha$; como $\angle ABF = \angle ABD$ y éste subtiende el arco *AED*, $\angle AFB = 2\alpha$; por tanto, $AB = AF = BC$. Ahora observemos que el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *FBC,* por lo que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{FC}.$$

Dado que $BC = AF,$ finalmente llegamos a lo que buscábamos demostrar; es decir,

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AF}{FC}.$$

Debido a que las dos diagonales consideradas en la demostración son arbitrarias, podemos concluir que todas las diagonales se cortan entre sí en la razón áurea.

Este resultado, entre otros, fue un secreto celosamente guardado por los pitagóricos debido a que, quizá, se dieron cuenta de que en la razón áurea aparece una cantidad no racional,[2] a saber: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; este valor no se puede expresar scomo la razón de dos cantidades conmensurables y esto era un gran obstáculo

2. Un número *r* es racional si se puede expresar con la razón de dos números enteros *p* y *q,* donde q ≠ 0, esto es, si $r = p/q$.

para la construcción del universo, incluidas sus armonías y las propiedades de los números.

Con respecto a la figura que hemos visto, aparece otro proceso infinito. Observemos que debido a la intersección de las diagonales se forma otro pentágono; éste también es un pentágono regular, lo cual significa que las diagonales del nuevo pentágono se intersecan en la razón áurea. Volvemos a observar que se ha formando un nuevo pentágono regular, cuyas diagonales se intersecan en la razón áurea, y así hasta el infinito.

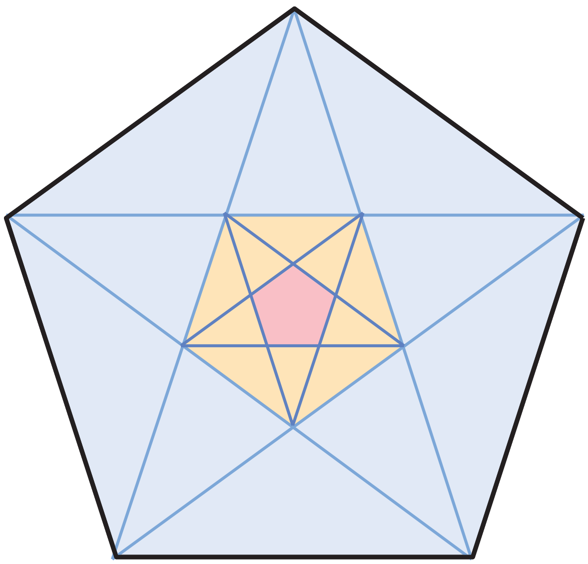


Figura 4-12. Se muestran dos iteraciones de este proceso.

No tenemos datos certeros respecto a las construcciones o demostraciones que hayan hecho Pitágoras o los pitagóricos; no obstante, nos preguntamos si para dividir un segmento en la razón áurea procedieron de la manera que se indicó en los párrafos anteriores, o bien si llevaron a cabo otro procedimiento, que explicamos a continuación.

Para dividir un segmento AB en la razón áurea, construyamos sobre éste un cuadrado $ABCD$ (véase la figura 4-13).

Luego bisequemos el segmento AC en el punto E y tracemos el segmento EB. Prolongamos el segmento CEA hasta F, de manera que $EF = EB$. Ahora completamos el cuadrado $AFGH$. De esta manera, el punto H es el que estábamos buscando, ya que

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}.$$

Demostración

Por el teorema de Pitágoras sabemos que

$$AB^2 + AE^2 = EB^2,$$

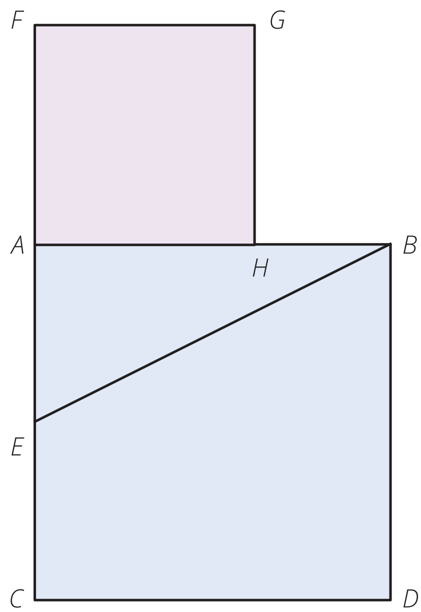


Figura 4-13.

y como

$$AE = \frac{1}{2}AB \text{ y } EF = EB,$$

tenemos que

$$AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = EF^2,$$

pero

$$EF = EA + AF,$$

por lo tanto,

$$AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = (EA + AF)^2.$$

Al desarrollar, cancelamos y tomamos en cuenta que

$$EA = \frac{1}{2}AB$$

y como

$$AF = AH,$$

tenemos que

$$AB^2 = AB \cdot AH + AH^2.$$

Despejamos y factorizamos

$$AB(AB - AH) = AH^2.$$

Como

$$AB - AH = HB,$$

por último,

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}.$$

En esta prueba usamos algunos hechos algebraicos que, con toda seguridad, Pitágoras conocía gracias a los babilonios, por lo que pudo haberlos interpretado geométricamente. Sin embargo, nos inclinamos a creer que esta última construcción no fue la que utilizó Pitágoras, pues la geometría griega fue mucho más poderosa que su álgebra, aunque hay que considerar que esta demostración aparece en *Los elementos de Euclides*.

4.4.1. Un poco de historia acerca de Pitágoras y los pitagóricos

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego, quien es, probablemente, el más mencionado pero el menos conocido en todo el mundo. Fundó una sociedad denominada hermandad pitagórica, en la cual los descubrimientos de la teoría de los números eran conocidos tan sólo por unos cuantos de sus miembros, mientras que los resultados de tipo operacional que constituían lo que ellos llamaban logística se compartían entre todos.

Los pitagóricos tenían una religión basada en las propiedades de los números; entre otras cosas, asociaban un número a cada planeta de acuerdo con su armonía; asimismo, asociaban a la mujer con el 0 y al hombre con el 1, por lo que el símbolo del matrimonio era el número 10.

Al parecer, muchos resultados atribuidos a Pitágoras fueron en realidad obra de los miembros de la hermandad. No obstante, se cree que Pitágoras sí demostró su famoso teorema de la relación entre el cuadrado de la hipotenusa con la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo.

Que los pitagóricos se dieron cuenta o no de la irracionalidad de la razón áurea cae en el terreno de la especulación, por las razones que hemos mencionado. Sin embargo, debemos considerar que los babilonios ya manejaban las soluciones de la ecuación cuadrática, que Pitágoras estuvo en contacto con aquella civilización y que la propiedad de la intersección de las diagonales del pentágono regular (razón áurea) fue mantenida en secreto. Todo esto nos induce a pensar que es muy probable que los pitagóricos se hayan dado cuenta del carácter del número $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Más aún, el hecho de que expulsaran de su hermandad a Hipaso de Metaponto, a quien consideraron un apóstata, probablemente por haber revelado la existencia de cantidades inconmensurables, apoya esa hipótesis.

Para tener una idea de la actitud de los pitagóricos respecto de la irracionalidad de $\sqrt{5}$, partimos del hecho de lo que significaba para ellos la existencia de los números no conmensurables, ya que, de acuerdo con su filosofía, todo lo explicaban con los aritmos, o sea, las propiedades intrínsecas de los números enteros y de sus razones.

Los pitagóricos pensaron en las matemáticas ya no como una rama de la filosofía, sino como una base de unificación de los diversos aspectos de la naturaleza. De esta manera, creían que todo el universo material y espiritual está formado y se puede explicar gracias a los números enteros. Esto ha trascendido la época de los pitagóricos y, de alguna manera, influyó en pensadores muy posteriores, como Galileo Galilei, quien parece resumirla cuando dice: “El lenguaje que Dios empleó para construir el universo fue el de las matemáticas.”

Proclo le adjudica a Pitágoras dos hechos de relevancia para el desarrollo de las matemáticas; a saber, la construcción de los sólidos regulares (véase la figura 4-14) y la teoría de las proporciones.

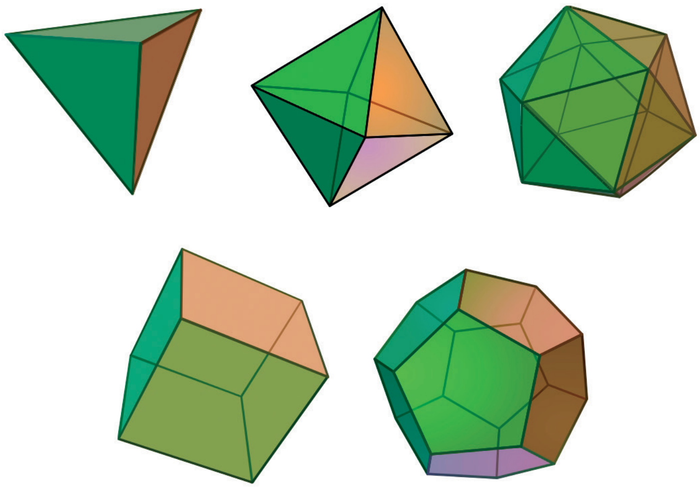


Figura 4-14. Sólidos regulares o platónicos. Tomado de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platonic_solids.jpg>.

No obstante, los babilonios ya conocían tres proporciones: la aritmética, la geométrica y la armónica.[3] Es muy probable que Pitágoras las haya conocido en Babilonia y las haya introducido en Grecia. Lo mismo sucedió con la proporción perfecta, la cual dice que, dados dos números *a* y *b*, tenemos que *a* es a la media aritmética de *a* y *b* como la media armónica de *a* y *b* es a *b*; es decir,

$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}}=\frac{\frac{2ab}{a+b}}{b}.$$

3. Dados dos números *a* y *b* distintos de 0, tenemos que

$$\frac{a+b}{2}$$

es la media aritmética, $\sqrt{ab}$ es la media geométrica y

$$\frac{2ab}{a+b}$$

es la media armónica.

Sin embargo, Pitágoras logró generalizar dichas proporciones y encontró siete más. Así, si *b* es una media de dos números *a* y *c*, y tenemos que $a < c$, entonces las tres cantidades están relacionadas entre sí, de la siguiente manera:

1. $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}$

2. $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}$

3. $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$

Éstas son tan sólo tres de las siete proporciones y corresponden a las medias aritmética, geométrica y armónica, respectivamente, ya que:

1. Implica que $b - a^3 = ac - ab$, de donde $b = \frac{a+c}{2}$.
2. Implica que $b^2 - ab = ac - ab$, de donde $b = \sqrt{ac}$.
3. Implica que $bc - ac = ac - ab$, de donde $b = \frac{2ac}{a+c}$.

4.5. La regla de los signos

Al cubrir el temario de matemáticas es conveniente que el profesor muestre a sus alumnos algunos temas extras que permitan aclarar ciertas dudas y, en caso de que no las haya, ofrezcan una información que resulte interesante y fundamental.

Por ello, a continuación ilustraremos el significado geométrico de las operaciones algebraicas referentes al producto y a la división de dos números reales del mismo signo y de signos contrarios. Además, explicaremos por qué no se puede dividir entre 0 y por qué la multiplicación es conmutativa.

Es conveniente que el alumno comprenda las razones de dichas reglas y cómo es que mediante la geometría se pueden justificar, de manera que se vaya dando cuenta de que las matemáticas son un proceso de construcción y no simplemente de memorización. Todo lo anterior le puede resultar interesante o hasta divertido cuando trate de hacer sus dibujos y confirme que puede usar lo que ha aprendido acerca de la semejanza y congruencia de los triángulos.

Problema 1

Vamos a deducir la denominada regla de los signos a partir de la interpretación geométrica de la multiplicación y la división.

Antes de empezar a resolver el problema, veremos la construcción de una recta coordenada. Una recta está orientada en sentido positivo si, de manera convencional, se recorre a la derecha; en caso de que se recorra al revés, se dice que está orientada en sentido negativo (véase la figura 4-15). Por tanto, un segmento dirigido de recta tendrá la misma orientación que la recta, pero con una magnitud propia.

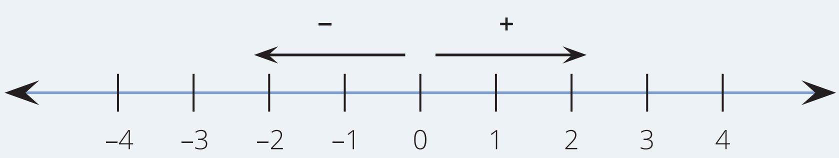


Figura 4-15. Recta coordenada.

Para asignar un número real a un punto de la recta, consideremos un punto de la recta *O*, al que llamaremos origen, y otro punto que se encuentre a la derecha de *O*, que denotaremos con *U*, tal que el segmento determinado por tales puntos sea de magnitud 1.

¿Cómo subdividimos un segmento *AB* en *q* partes iguales? Pensemos en dos rectas no paralelas entre sí, cuya intersección se denomina *A*. En una de ellas se marca un segmento unitario *AU* y, en la otra, el segmento a dividir, *AB*. Copiamos *q* veces el segmento unitario *AU* de manera sucesiva y al extremo de la última copia lo llamamos *Q* (véase la figura 4-16). Trazamos una segmento de recta de *Q* a *B* y con unas escuadras obtenemos paralelas a *QB* desde cada punto de la subdivisión del segmento *AQ* hasta que intersequen al segmento *AB*. Cada intersección de estas paralelas con *AB* determina la subdivisión de este segmento en *q* partes iguales. El primer segmento de la subdivisión se denomina *AS*, ya que por la semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{AU}{AS} = \frac{AQ}{AB}.$$

Despejamos

$$AS = \frac{(AU)(AB)}{AQ}.$$

Como $AQ = q$ y $AU = 1$, entonces

$$AS = \frac{AB}{q}.$$

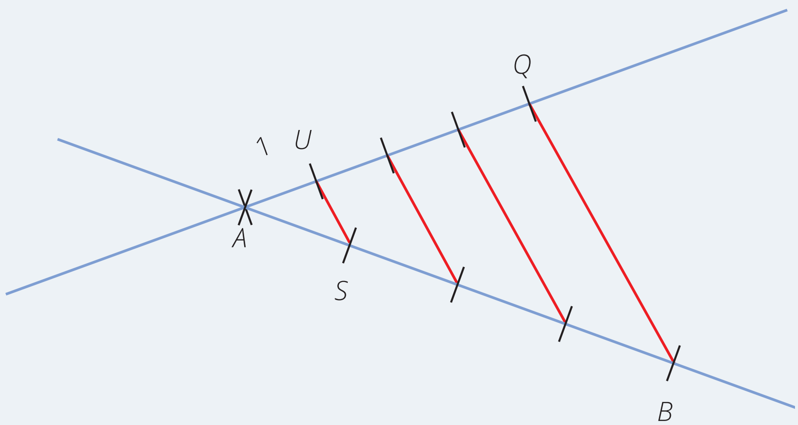


Figura 4-16. División de un segmento en partes iguales.

4.5.1. Localización en la recta coordenada

Al origen de la recta le asignamos el número 0. En el sentido positivo de la recta, de manera arbitraria, determinamos un segmento que parte de 0 y a cuyo otro extremo le asignamos el número 1. Por tanto, este segmento tiene una magnitud de 1. Copiamos el segmento unitario sucesivamente hacia la derecha y vamos localizando los números enteros positivos; a partir del 0 hacia la izquierda, tomamos los simétricos de los números positivos y así ubicamos los enteros negativos.

¿Cómo localizamos a cualquier número real en la recta?

Ilustraremos un ejemplo del proceso para localizar en la recta un número real escrito en su forma decimal. Consideremos el número real 3.1416. Como ya están marcados los enteros en la recta, buscamos la parte entera del número, es decir, 3. Ya que la cifra buscada es > 3 y < 4, subdividimos el segmento comprendido entre 3 y 4 en 10 partes iguales y tomamos el primer punto obtenido para determinar el número 3.1. Dado que 3.1416 es > 3.1 y < 3.2, subdividimos el intervalo en 10 partes iguales y localizamos el número 3.14 en el cuarto punto de la subdivisión. Continuamos con este proceso hasta llegar al decimal 6 (véase la figura 4-17).

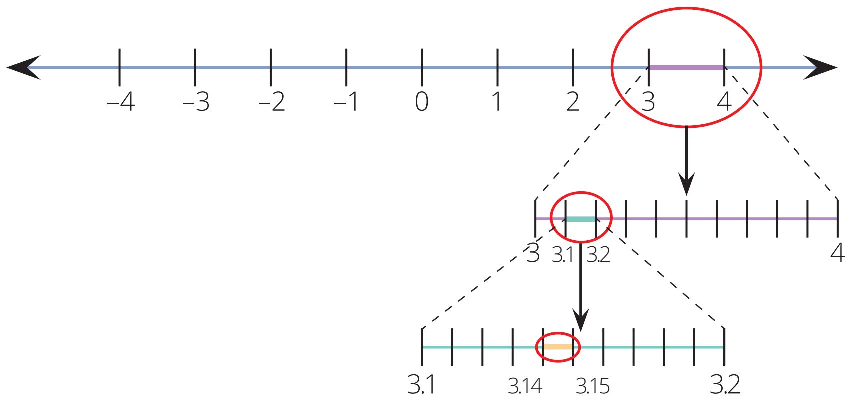


Figura 4-17. Localización de 3.1416 en la recta.

Debido a que hemos asignado a cada punto de la recta un número real, ésta se designa como recta real.

Con estos antecedentes procederemos a interpretar la regla de los signos mediante las interpretaciones geométricas de la multiplicación y división que abordaremos a continuación.

Interpretación geométrica de la multiplicación de positivo por positivo

Consideremos a y b números positivos. Marquemos los puntos a y b a la derecha de O en las rectas R_1 y R_2, respectivamente. Determinemos un segmento unitario en cualquiera de las dos rectas, por ejemplo, OU en R_1 (véase la figura 4-18). A continuación, unamos un segmento de recta l_1, de B a U, y tracemos un segmento paralelo a l_1, que denominaremos l_2, desde A hasta la intersección de C del segmento l_2 con la recta R_2.

Obtuvimos dos triángulos semejantes, OUB y OAC; por lo tanto, la siguiente relación:

$$\frac{OU}{OA} = \frac{OB}{OC}.$$

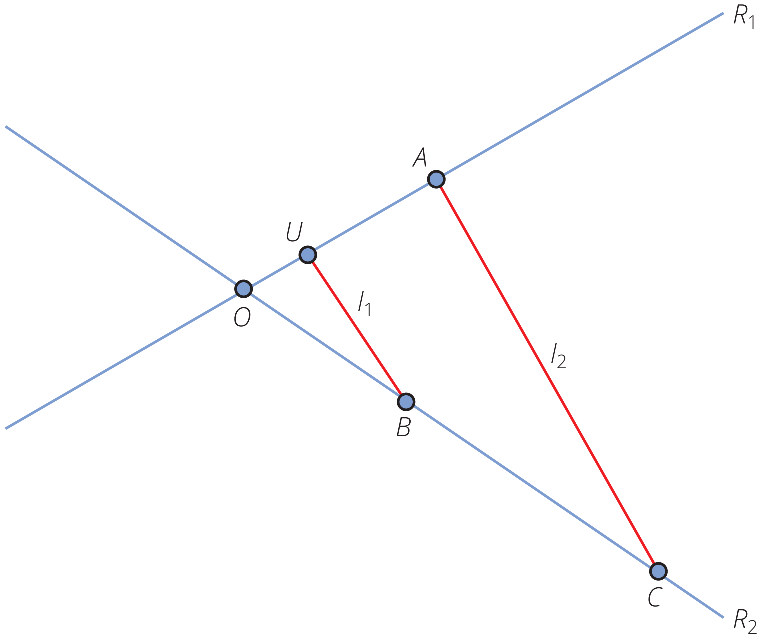


Figura 4-18.
Multiplicación de positivo por positivo.

Al sustituir,

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{c}.$$

En esta esta relación, c está representado por el punto C del segmento OC.

Al despejar obtenemos $c = ab$. Por lo tanto, el segmento OC representa el producto de $a \cdot b$ y se encuentra a la derecha del 0, por lo que c es positivo.

Interpretación geométrica de la multiplicación de negativo por positivo

De manera similar al ejercicio anterior, determinaremos un segmento unitario a la derecha del origen de la recta R_1 (véase la figura 4-19). Coloquemos arbitrariamente los puntos A y B, que representan a los números $a < 0$ y $b > 0$ en las rectas R_1 y R_2, respectivamente. Notemos que A se coloca a la izquierda de O, mientras B está a la derecha.

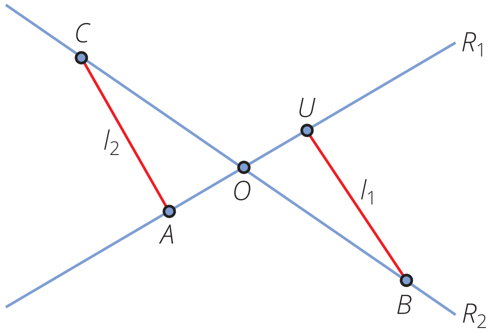


Figura 4-19.
Multiplicación de negativo por positivo.

De nuevo, tenemos dos triángulos semejantes, *OUB* y *OAC;* por consiguiente, la misma relación:

$$\frac{OU}{OA} = \frac{OB}{OC}.$$

Esto implica, nuevamente, que $c = ab$. El segmento *OC* representa al producto de $a \cdot b$, mientras c es negativo.

Cabe hacer notar que en los dos casos anteriores se procedió de manera semejante, ya que trazamos dos rectas no paralelas, R_1 y R_2, orientadas y coordenadas, las cuales se intersecan en el origen *O*. Los puntos *A* y *B* en las rectas R_1 y R_2, respectivamente, representan a los números reales a y b. Determinamos un segmento unitario en una de las rectas, por ejemplo, *OU* en R_1. A continuación, trazamos un segmento de recta l_1, de *B* a *U,* y un segmento paralelo a l_1 desde A, que denominamos l_2, mientras que la intersección del segmento l_2 con la recta R_2 la denotamos con *C*.

Con base en lo anterior, podemos realizar los siguientes ejercicios.

Ejercicios

1. Demostrar que el producto de un número positivo por un número negativo es negativo (véase la figura 4-20).

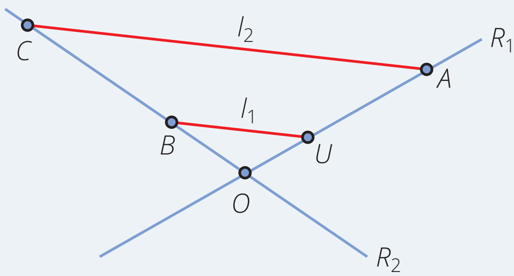


Figura 4-20. Multiplicación de positivo por negativo.

2. Demostrar que el producto de dos números negativos es positivo (véase la figura 4-21).

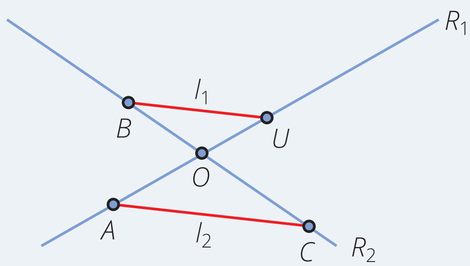


Figura 4-21. Multiplicación de negativo por negativo.

3. Demostrar la conmutatividad de la multiplicación, es decir, que $a \cdot b = b \cdot a$.

Interpretación geométrica de la división

Ahora deseamos dividir el número b entre el número a, y suponemos que ambos son positivos. De nuevo, trazamos dos rectas no paralelas, R_1 y R_2, que se intersecan en O. El punto U representa al número 1 en la recta R_1. Representamos con A y B los números a y b, respectivamente. A continuación, trazamos el segmento de recta l_1, desde B hasta A, así como su paralelo, l_2, el cual pasa por U. El punto de intersección de las rectas l_2 y R_2 es C.

Otra vez tenemos los triángulos semejantes OUC y OAB (véase la figura 4-22) y, por lo tanto, la relación:

$$\frac{OU}{OA} = \frac{OC}{OB},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{a} = \frac{c}{b},$$

donde c está representado por el segmento de recta OC.

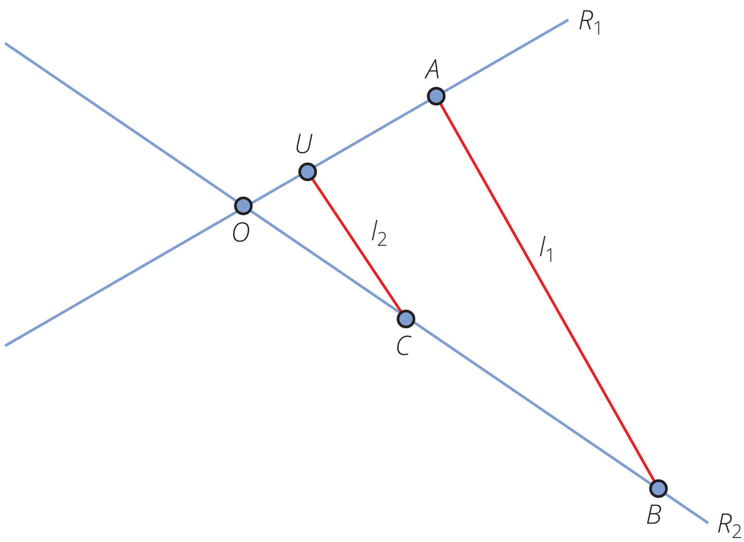


Figura 4-22.
División de positivo entre positivo.

Despejamos

$$c = \frac{b}{a}.$$

Observemos que OC es un segmento positivo, por tanto, c es positivo. De esta manera, se tiene que más entre más es más.

Ahora analizaremos el cociente de un número b positivo entre un número a negativo. En la figura 4-23 podemos apreciar que los triángulos OAB y OUC son semejantes, por lo que

$$\frac{OU}{OA} = \frac{OC}{OB}.$$

Al sustituir tenemos que

$$\frac{1}{a} = \frac{c}{b},$$

donde c está representado por el segmento de recta OC.

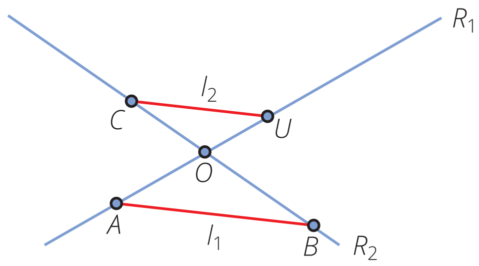


Figura 4-23. División de positivo entre negativo.

Despejamos y tenemos que

$$c = \frac{b}{a}.$$

Vemos que OA representa al número negativo a, mientras OB, al número positivo b. Tenemos que c es negativo, ya que C está a la izquierda de O.

Como última parte del ejercicio, pedimos que el profesor complete los casos que faltan de la división; esto es, negativo entre negativo y negativo entre positivo.

Cabe hacer notar que si acercamos el punto A al origen O, el cociente crece indefinidamente (tiende al infinito), por lo que no existe la división entre cero (véase la figura 4-24).

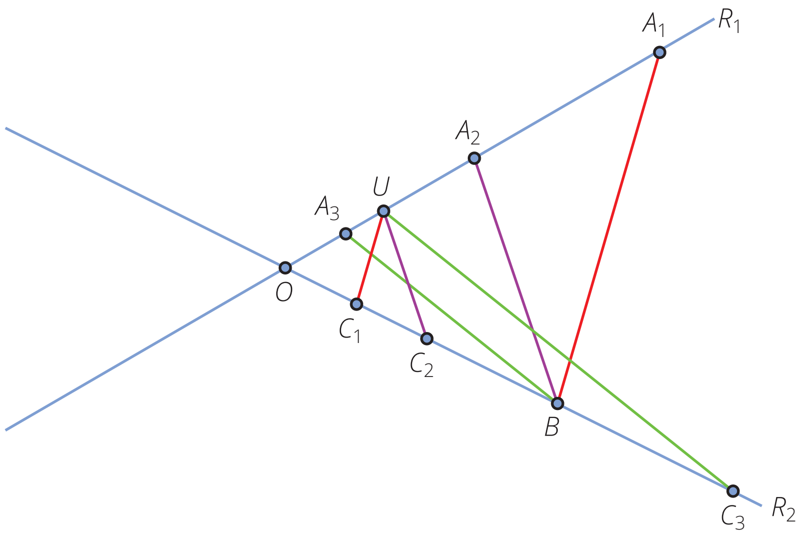


Figura 4-24. Interpretación geométrica de la imposibilidad de la división entre cero.

4.6. Pirámide truncada

Cuando el profesor resuelve un problema en la clase, por lo general, utiliza la mayor parte del tiempo en el desarrollo, en vez de sólo dar la solución. Para ello, debe conocer los datos y cómo manejarlos, saber plantear el plan de ataque y su ejecución; todos estos elementos son importantes porque nos llevan a obtener el resultado. El razonamiento es una concatenación de ideas o argumentos que conectan los datos con la solución. Es claro que si alguna de las ideas no es congruente con nuestra argumentación, todo el razonamiento falla. Es por ello que cada una es importante, tanto como lo es la demostración en cuestión. Una cadena es fuerte en función de que cada uno de sus eslabones lo sea.

No obstante, un error común consiste en olvidar cuál es el problema central y, aunque podemos hacer una concatenación de argumentos correctos, no logramos conectar los datos con la solución buscada. Por ello, ofrecemos un ejemplo, basado en una argumentación de Polya (1981), para resolver un problema. Veremos cómo hilar los datos con los argumentos hasta llegar a nuestra solución.

Pero antes de desarrollar este tema, recurriremos a la descripción histórica de un problema que aparece en el llamado papiro de Moscú. Originalmente fue conocido como papiro de Golenishchev, quien lo obtuvo en 1883; sin embargo, en 1912 el Museo de Bellas Artes de Moscú lo adquirió. Éste es uno de los documentos más importantes de la matemática desarrollada en el antiguo Egipto. De entre los varios problemas que contiene, describiremos de forma breve el problema 14, en el cual aparece una figura y un texto, obviamente escrito con jeroglíficos (véase la figura 4-25).

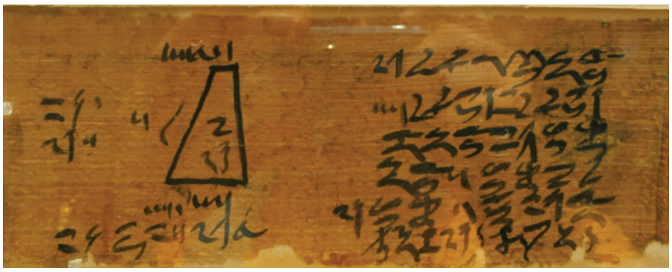


Figura 4-25. Problema 14 del papiro de Moscú.

Aunque la figura geométrica es un trapecio, gracias al análisis de la escritura jeroglífica hoy sabemos que se trata de una pirámide truncada. Como los egipcios no habían adquirido en esa época la noción de perspectiva (suposición que se respalda al ver los dibujos que hacían de las figuras humanas), es probable que esta figura se les complicara, y simplemente a la pirámide la representaran como aparece en el papiro. Al analizar el esquema de la figura 4-25, observamos que en la parte superior del “trapecio” aparece el número 2 y en la parte inferior está el número 4 (todo esto representado con signos hieráticos). En el interior de la figura aparecen los números 56 y 6, y en el texto el escriba indica lo siguiente:

- Eleva al cuadrado a los números 2 y 4.
- Multiplica 2 por 4.
- Suma todos los resultados.
- Divide entre un tercio de 6.
- Y obtendrás 56.
- Ves, es 56, lo has calculado correctamente.

Para comprender las instrucciones dadas por el escriba, llamemos a al número 2, que es el lado del cuadrilátero de la base superior; b corresponde al número 4, que es el lado del cuadrilátero de la base inferior, y h es el número 6, la altura de la pirámide truncada. Ahora llevemos a cabo las operaciones indicadas por el escriba, con lo cual obtenemos la fórmula

$$\frac{(a^2+b^2+ab)h}{3}.$$

Ésta corresponde a la fórmula que conocemos para obtener el volumen de una pirámide truncada de base cuadrangular. No obstante, no se sabe cómo obtuvieron los egipcios esta expresión, lo cual vamos a tratar a continuación.

Problema 2

Determinaremos el volumen V de una pirámide truncada con base cuadrada, de altura h, cuyo cuadrado superior tiene lado a y su cuadrado inferior tiene lado b. Este problema fue tomado de Polya (1981).

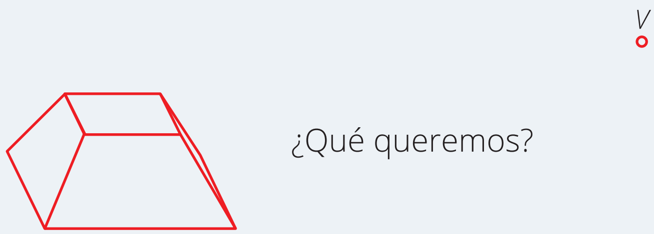


Figura 4-26. Pirámide truncada. Queremos encontrar el volumen.

El primer paso consiste en establecer cuál es el problema y qué datos tenemos. Éstos son la altura h, el lado del cuadrado superior a y el lado del cuadrado inferior b. No olvidamos insistir en que el problema central es calcular el volumen V de una pirámide truncada, para lo cual suponemos que los estudiantes ya conocen el volumen de una pirámide de base cuadrada. Por lo tanto, debemos trazar un puente desde el volumen requerido a los datos a, b y h.

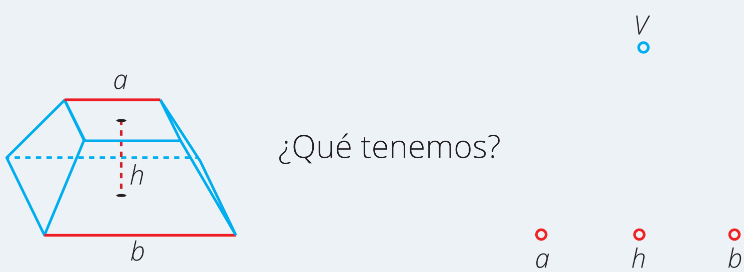


Figura 4-27. Datos de la pirámide truncada.

El segundo paso es buscar problemas auxiliares que reduzcan el espacio entre el volumen por determinar y los datos.

Si los alumnos logran encontrar estos problemas auxiliares, pasamos al siguiente paso; en caso contrario, sugerimos completar la pirámide truncada para que tenga como base un cuadrado de lado *b,* por lo que se obtiene una pirámide de volumen V_b, pero observemos que también tenemos una pirámide que tiene como base un cuadrado de lado *a* y cuyo volumen es V_a, por lo que:

$$V = V_b - V_a\,.$$

Para el tercer paso, determinamos los volúmenes V_a y V_b.

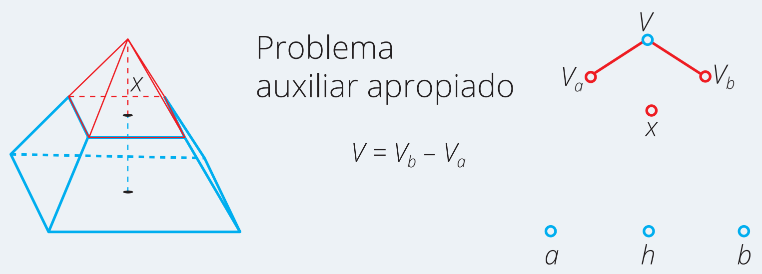


Figura 4-28. Pirámide completa sobre la pirámide truncada. Volumen V_a y volumen V_b.

El volumen V_a es

$$\frac{a^2x}{3}\,.$$

¡Aparece una nueva variable *x*! Lo mismo ocurre para V_b, que es

$$\frac{b^2(x+h)}{3}\,.$$

Notemos que esta nueva variable *x* en nuestro esquema mental se encuentra en un nivel distinto al de los volúmenes V_a y V_b y al de los datos.

¿Qué hacemos en el cuarto paso para calcular *x*? Sugerimos preguntar a los alumnos si pueden expresar alguna idea para resolver esto; en caso contrario, podemos guiarlos a pensar en una posible solución dada por triángulos semejantes que se obtienen al pasar un plano por el centro del

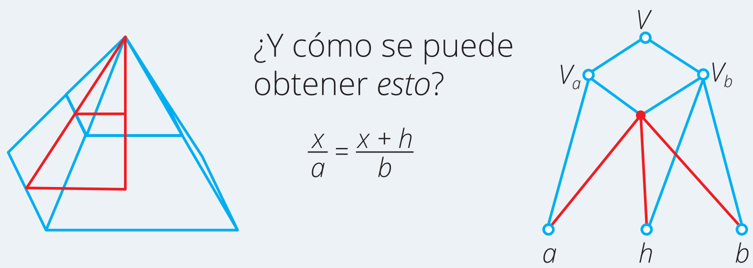


Figura 4-29. Pirámide completa sobre la pirámide truncada con el plano.

cuadrado inferior y la cúspide de la pirámide con volumen V_b; así, obtenemos dos triángulos semejantes debido a la intersección del plano con la pirámide.

Con lo anterior, obtenemos la relación de semejanza

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{x+h}{\frac{b}{2}},$$

por tanto,

$$\frac{x}{a} = \frac{x+h}{b},$$

y

$$xb - xa = ah.$$

Al despejar x tenemos

$$x = \frac{ah}{b-a}.$$

Con esto logramos relacionar a la variable x con los datos. Hemos construido nuestro puente entre los datos y el volumen buscado.

Cabe comentar que un error frecuente que cometemos los profesores es decirles a los alumnos "ya nada más sustituyen y obtienen el resultado buscado". Debemos recordar que el problema se termina hasta descubrir el valor del volumen V de la pirámide truncada.

Llegamos al quinto paso, en el cual hay que sustituir x en V_a y V_b. Obtenemos

$$V_a = \frac{1}{3}a^2\left(\frac{ah}{b-a}\right) = \frac{1}{3}\frac{a^3h}{b-a},$$
$$V_b = \frac{1}{3}b^2\left(\frac{ah}{b-a}+h\right) = \frac{1}{3}b^2\,\frac{ah+h(b-a)}{b-a},$$

por lo que podemos encontrar:

$$V = \frac{h}{3}\left[b^2\,\frac{ah+h(b-a)}{b-a} - \frac{a^3h}{b-a}\right]$$

y con esto obtenemos

$$V=\frac{h}{3}\left[b^2+ab+a^2\right].$$

Ahora sí llegamos a la solución del problema.

Observemos que la última fase de la sustitución no la podemos menospreciar, aunque se trate de simples mecanizaciones, de manera que no dejemos la impresión a nuestros estudiantes de que este paso no tiene importancia. Asimismo, debemos considerar que el proceso de la solución no es único. Por ejemplo, planteamos el siguiente ejercicio para el profesor.

Ejercicio

Calcule el volumen de la pirámide truncada anterior mediante el siguiente método:

1. Corte con 4 planos perpendiculares al plano del cuadrado superior y haga que pasen por cada uno de sus lados.
2. Con este corte se obtiene un prisma con base cuadrada de volumen *Q,* 4 prismas con base triangular de volumen *P* y 4 pirámides con base triangular de volumen *T*.
3. A continuación, sume todos los volúmenes para obtener el volumen buscado.

OJO VERIFICAR CON AUTORES LA FIGURA. SEGÚN YO DEBE SER ASÍ PERO NO TENÍA LA IMAGEN. SINO ES ASÍ SOLICITAR IMAGEN

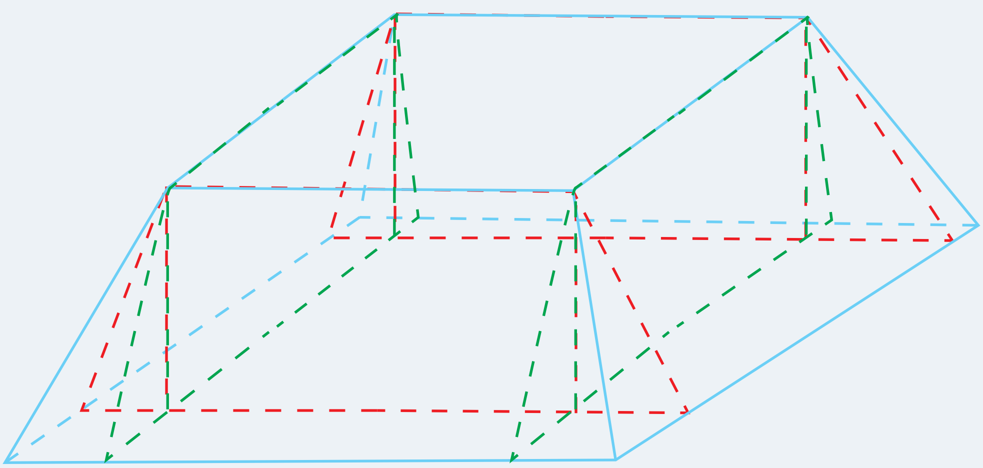


Figura 4-30. Pirámide truncada cortada por los cuatro planos.

4.7. Un problema de valor mínimo

Por lo general, cuando pensamos en problemas relacionados con máximos y mínimos de una función, solemos emplear el cálculo diferencial, como en el siguiente ejemplo.

Queremos encontrar el valor máximo de un producto xy de dos números, x y y, cuya suma es igual a p; es decir, $x + y = p$.

Observemos que si x es uno de los números dados, entonces $(p - x) = y$ es el otro número, por lo que tenemos la función $f(x) = x(p - x)$, de la cual queremos obtener el valor máximo.

Para llegar a la solución podemos aplicar el cálculo diferencial, como se mencionó antes, el cual se estudia en el bachillerato, y cuyo método mostramos a continuación.

Busquemos el punto crítico de la función $f(x) = xp - x^2$. Así, tenemos que $f'(x) = -2x + p$, lo que implica que f tiene un punto crítico en $x = \frac{p}{2}$. Como la segunda derivada de f es negativa, entonces en $x = \frac{p}{2}$ tenemos un máximo y los números deben ser $x = \frac{p}{2}$ y $y = \frac{p}{2}$.

Sin embargo, ciertos problemas, como el que aquí planteamos, se pueden resolver sin el cálculo diferencial. Veamos cómo.

El enunciado del problema es el mismo; a saber, se quiere determinar dos números x y y, de manera que su suma sea igual a p, y que su producto sea máximo.

De igual forma que en la solución anterior, vemos que $y = (p - x)$ y la función a maximizar es $f(x) = x(p - x) = xp - x^2$. Si completamos cuadrados, entonces tenemos que

$$f(x) = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} \qquad (4\text{-}1)$$

Al analizar la expresión anterior, concluimos que en se obtiene el valor máximo de $f(x)$. ¿Por qué? Esto que implica que los sumandos x y y deben ser iguales entre sí.

Observemos que la ecuación (4-1) representa una parábola que se abre hacia abajo, por lo que si se introducen números, como $p = 10$, entonces obtenemos una gráfica mediante la cual es posible visualizar el resultado analítico.

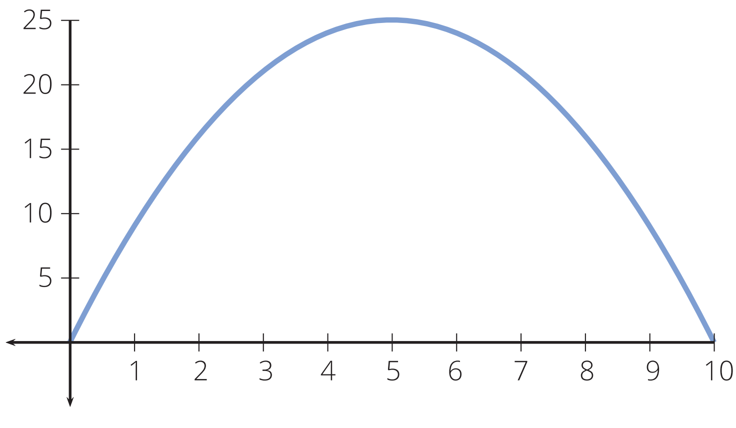


Figura 4-31.

Aunque presentamos un problema muy sencillo, éste se puede ver para casos más elaborados, e incluso es posible llegar a una generalización, de la manera que lo hace Natanson (1977). Sin embargo, queremos mostrar cómo es posible resolver problemas, en muchos casos, sin recurrir a herramientas tan elaboradas (en este caso, el cálculo diferencial).

Con este tipo de problemas se busca que los alumnos, al aplicar los conocimientos que han adquirido, puedan proponer otras maneras de resolver los problemas en cuestión; claro, con la guía de su profesor. Con esto se logrará que entiendan cómo desarrollar su trabajo en clase, y que también se den cuenta de sus limitaciones. Los docentes podemos lograr que su inquietud los lleve a buscar fuentes más generales y, así, no se conformen simplemente con seguir el temario. De esta manera, impulsaremos en nuestros estudiantes una actitud positiva hacia las matemáticas, que será una base de apoyo para desarrollar el interés en la materia.

Para conocer más problemas de este tipo, nos remitimos al apéndice de este capítulo.

4.8. Epílogo

Podemos decir que la dificultad inicial ante un problema de matemáticas es la actitud del alumno; esto es, la manera en que interactúa por primera vez con el problema planteado, pues debido a que carece de entrenamiento para su resolución, no puede comprender en qué consiste el problema y, por tanto, no tiene idea de qué hacer para llegar al resultado. En muchas ocasiones, el planteamiento resulta incomprensible, o bien el problema es muy difícil, porque el alumno no sabe cómo aplicar lo que supuestamente ha aprendido en sus cursos o tal vez porque piensa que se le está exigiendo un nivel de conocimiento superior al que posee.

De acuerdo con el programa de estudios y la guía del maestro de la Secretaría de Educación Pública, al término de la educación básica el alumno:

A1. Desarrolla un concepto positivo de sí mismo como usuario de las matemáticas, así como el gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.

A2. Aplica el razonamiento matemático a la solución de problemas personales, sociales y naturales, ya que acepta el principio de que existen diversos procedimientos para resolver los problemas particulares.

A3. Desarrolla el hábito del pensamiento racional y utiliza las reglas del debate matemático al formular explicaciones o mostrar soluciones.

A4. Comparte e intercambia ideas acerca de los procedimientos y resultados de los problemas.

En este capítulo presentamos ejercicios y problemas que sirven como apoyo para que el profesor promueva las actitudes 1, 2 y 4. Por su parte, impulsar la actitud 3 depende por completo del maestro.

Dado que el eje temático de Actitudes hacia el estudio de las matemáticas es fundamental en el plan de estudios de secundaria, los profesores tienen la obligación de atenderlo, por lo que sugerimos dedicarle un espacio importante en el temario. Es necesario pasar tiempo de calidad en la discusión del tipo de problemas que hemos propuesto. Así, el alumno aprenderá a plantear, analizar, entender y resolver algunos de estos problemas en clase, con lo cual buscamos contribuir de manera esencial a mejorar sus actitudes hacia el estudio. Esperamos que nuestra aportación resulte de utilidad al profesor y, por ende, a los estudiantes, y que el docente pueda proponer muchos más problemas, de manera que se enriquezca el espíritu sugerido en este trabajo.

Bibliografía

Arizmendi, H., Carrillo, A. y Lara, M., *Cálculo*, México, Instituto de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana, 2012.

Lara, M., *Los matemáticos griegos*, Querétaro, Universidad de Querétaro, 1993.[4]

Natanson, I. P., *Problemas elementales de máximos y mínimos. Lecciones populares de matemáticas,* Moscú, Mir, 1977.

Pedoe, D., *La geometría en el arte*, Barcelona, Gustavo Gili, 1979.

Polya, G., *Mathematical Plausible Reasoning*, Princeton, Princeton University Press, 1954.

Polya, G., *Mathematical Discovery*, vol. II, ed. corregida, Estados Unidos de América, John Wiley & Sons, 1981.

4. En esta publicación se encuentra una descripción somera de los XIII libros de *Los elementos de Euclides*.

Apéndice. Miscelánea de ejercicios

Ejercicio 1

Para la interpretación geométrica de la raíz cuadrada de un número real, se recurre a la siguiente construcción:

1. Consideremos un número real a positivo. Tracemos una recta orientada tal como en la figura 4-32, marquemos el origen y determinemos sobre esta recta la distancia $OA = a$.
2. Apoyamos el brazo de un compás en A, lo abrimos hasta lograr una longitud igual a 1 y marcamos a la derecha de A en la recta el punto B, determinado por el otro brazo del compás, por lo que $AB = 1$.
3. Ahora tracemos un semicírculo cuyo diámetro sea OB, y levantemos por A una perpendicular a OB. La intersección del semicírculo con esta perpendicular es C.
4. Unimos a O con C y a C con B. Consideremos que los ángulos α, β y δ son los que aparecen en la figura 4-32.

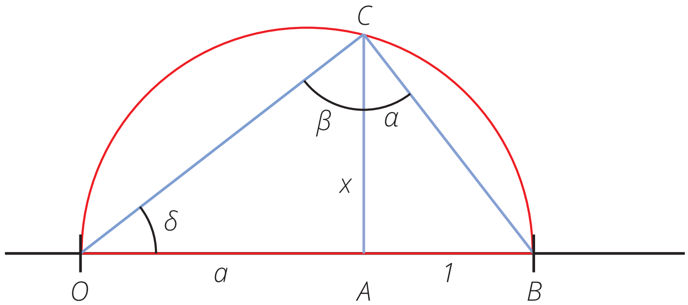


Figura 4-32. Interpretación geométrica de la raíz cuadrada de un número a.

Para demostrar que el segmento $AC = x$ tiene longitud $\sqrt{a}$, sugerimos usar la semejanza de triángulos.

Ejercicio 2

Un historiador francés afirma que cuando Napoleón Bonaparte invadió Rusia, un factor importante que incidió en su derrota fue el invierno, ya que la temperatura alcanzó −40 °C. Por su parte, un historiador inglés refiere el mismo hecho, pero afirma que la temperatura fue de −40 °F.

¿Existe un error por parte de alguno de los historiadores respecto al dato de las unidades de temperatura?

Si no es así, explique por qué los dos tienen la razón.

Ejercicio 3

Un explorador está situado en un punto *A* y camina hacia el sur, en una trayectoria 1, hasta el punto *B,* para ver a un oso. Como no lo encuentra, se dirige hacia el este con una trayectoria 2, que forma un ángulo de 90° con respecto a la trayectoria 1. Al llegar al punto *B* sí encuentra un oso y lo fotografía para sus estudios. Después de esto se dirige al punto de partida en una trayectoria 3, con un ángulo de 90° con respecto a la trayectoria 1. Al llegar al punto de partida, se da cuenta de que el ángulo formado entre dos de las trayectorias, 1 y 3, que concurren al punto de partida, es de 90°.

¿De qué color es el oso que fotografió?

Ejercicio 4

En una mesa hay tres sombreros negros y dos blancos. Tres señores en fila india se ponen, cada uno, un sombrero al azar y sin mirar el color.

Se le pregunta al tercero de la fila, quien puede ver el color del sombrero del segundo y del primero, si puede decir cuál es el color de su sombrero, a lo que responde negativamente.

El segundo señor, que sólo ve el sombrero del primero, tampoco puede responder a la pregunta.

Por último, el primero de la fila, aunque no ve ningún sombrero, responde de forma acertada de qué color es el sombrero que tiene puesto.

¿Cuál es este color y cómo es la lógica que usó para saberlo?

Observemos que todas las combinaciones posibles, donde B representa a los sombreros blancos y N a los sombreros negros, son:

BBN
BNN
BNB
NNN
NBN
NBB
NNB